



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Méréstechnika és Információs Rendszerek Tanszék

Gitárerősítő valós idejű modellezése K-módszerrel

TDK dolgozat

Készítette:

Jedla Martin

Konzulens:

Dr. Bank Balázs

2024

Tartalomjegyzék

Összefoglalás	i
Abstract	ii
1. Bevezetés	1
1.1. Áramkör-modellező pluginok kihívásai	1
1.2. A dolgozat célja	1
1.3. Az Orange Crush 20L erősítő modellezése	2
2. Analóg áramkörök digitális modellezése	3
2.1. Lineáris áramkörök modellezése	3
2.1.1. Előrelépő Euler-módszer	3
2.1.2. Hátralépő Euler-módszer	4
2.1.3. Bilineáris transzformáció	5
2.1.4. Impulzus invariáns transzformáció	6
2.1.5. Diszkrétizálás utáni szimuláció	7
2.2. Nemlineáris elemek	7
2.2.1. Előrelépő Euler-módszer	7
2.2.2. Hátralépő Euler-módszer	8
2.2.3. Negyedfokú Runge-Kutta módszer	8
3. K-módszer	10
3.1. A K-módszer alapgondolata	10
3.2. A K-módszer elemzése	13
3.3. A nemlineáris rész	14
3.3.1. Dini-tétel	14
3.3.2. A Dini-tétel alkalmazása a K-módszerben	15
3.4. A K-módszer alkalmazása	16
3.5. Példa	16
3.5.1. Megvalósítás	17
3.5.2. Eredmény	18
4. A K-módszer összehasonlítása más állapotteres módszerekkel	19
4.1. Az állapotteres módszerek	19
4.1.1. Euler-módszerek	19
4.1.2. K-módszer	20
4.2. Rugalmasabb diszkrétizáció a K-módszerben	20
4.3. Számítási igény	21
4.3.1. Hátralépő Euler-módszer	21
4.3.2. K-módszer	21
4.4. Az összehasonlítás összefoglalása	22

5. A K-módszer lehetséges felhasználási területei	23
6. Gitárerősítő modellezése	24
6.1. A torzító rész megvalósítása K-módszerrel	25
6.2. Eredmények	28
7. Eredmények, tapasztalatok, jövőbeli tervek	30
7.1. Összehasonlítás	30
7.2. Különböző alkalmazási területek	31
7.3. Az Orange Crush 20L erősítő valós idejű szimulálása K-módszerrel	31
7.4. Jövőbeli tervek	31
Köszönetnyilvánítás	32
Irodalomjegyzék	33
Függelék	35
F.1. A további részáramkörök elemzése	35
F.1.1. Bemeneti szűrő	35
F.1.2. Erősítő rész	36
F.1.3. Tone stack	37
F.1.4. Aktív szűrő	39
F.1.5. Összeadó áramkör	40
F.1.6. Hangerőszabályozó	41
F.1.7. Végfokozat	42

Összefoglalás

Napjainkban a zeneiparban és a zenészek körében a hangzás megváltoztatása céljából alkalmazott hardver-effektek helyett egyre gyakrabban használnak számítógépen futtatható pluginokat. Ezek a pluginok valós időben futnak, és gyakran a fizikai effekt áramköre alapján valósítják meg őket, lehetőleg úgy, hogy ugyanazt a hangzásélményt nyújtsák.

Ezeknek a pluginoknak az elkészítése nem triviális: a zenei eszközök áramkörében gyakran találhatóak nemlineáris elemek (diódák, elektroncsövek stb.), amelyek megnehezítik digitális modellezésüket. A valós idejűség követelménye miatt olyan módszereket kell találni, amelyek elfogadható számítási igény mellett is megfelelő pontossággal oldják meg a nemlineáris differenciálegyenlet rendszert. Ezek a módszerek jellemzően nem triviális egyszerűsítésekkel (akár az egyenletrendszer másképpen való felírásával, akár algebrai átalakítások segítségével) próbálják ezt elérni.

Nemlineáris differenciálegyenletek megoldására az egyik legegyszerűbb és leggyakrabban használt eljárások az úgynevezett Euler-módszerek. Azonban az előrelépő Euler-módszernél a modell stabilitása nem garantált, a hátralépő Euler-módszer pedig a nemlineáris differenciálegyenlet numerikus megoldását igényli, ezzel nagy számítási igényt előidézve.

A kevésbé ismert K-módszer a számítási igényt azzal igyekszik csökkenteni, hogy az áramkör lineáris és nemlineáris részáramkörökre bontása után először a nemlineáris részkimenetét számolja ki geometriai módszerek segítségével, majd csak ezután számolja ki a további szükséges változókat. Korábban ezt a módszert a kutatott irodalom nem hasonlította össze más állapotterezes módszerekkel. A TDK dolgozat célja a K-módszer és a hátralépő Euler-módszer kapcsolatának vizsgálata, valamint hasonlóságaik és különbségeik feltérképezése. Emellett a dolgozat azt is részletezi, hogy milyen előnyei és hátrányai vannak a K-módszernek a hátralépő Euler-módszerrel szemben, és a lehetséges alkalmazási területeit is ismerteti.

A K-módszer bemutatásához az Orange Crush 20L gitárerősítőt modelleztem, illetve ez alapján egy valós időben futó VST3 plugint készítettem JUCE fejlesztői környezetben.

Abstract

In today's music industry and among musicians, instead of using hardware effects to alter sound, digital plugins are increasingly being used. These plugins are run in real time and are mostly designed to emulate the physical circuit of the desired effect, aiming to deliver the same listening experience.

The design of these plugins is not trivial: the circuits of musical devices often contain nonlinear components (diodes, vacuum tubes, etc.), which complicates their digital modeling. Due to the real-time requirement, methods must be applied that can solve the ordinary differential equation caused by the nonlinearity with sufficient accuracy while having an acceptable computational demand. These methods typically achieve this through non-trivial simplifications (either by defining the equation system differently or through algebraic transformations).

One of the simplest and most common methods used for solving nonlinear differential equations are the so-called Euler methods. However, with the forward Euler method, the stability of the system is not guaranteed, and with the backward Euler method, the numerical solving of a nonlinear differential equation is required.

The lesser-known K-method tries to reduce the computational demand by dividing the circuit into a linear and nonlinear subcircuit. First, it calculates the output of the nonlinear part by geometric methods and only then calculates the other necessary variables. Previously, this method has not been compared to other state-space methods in the literature. The goal of this paper is to examine the connection between the K-method and the backward Euler method, as well as to detail their similarities and differences. Additionally, the paper details the advantages and disadvantages of the K-method against the backward Euler method and also outlines its possible application areas.

To demonstrate the K-method, I have modeled the Orange Crush 20L guitar amplifier, and I have programmed a VST3 plugin in the JUCE framework.

1. fejezet

Bevezetés

A digitális technológia fejlődésével a zeneipar egyre inkább a szoftveres megoldások felé fordult, és ennek egyik legjelentősebb következménye a digitális pluginok térnyerése. Az olyan fizikai eszközök, mint az analóg keverőpultok, erősítők, kompresszorok, zengetők vagy különféle effektpedálok egyre gyakrabban helyettesíthetők digitális változataikkal, amelyek akár egyetlen laptop segítségével is alkalmazhatóak, így a zenei produkció mobilisabbá, költséghatékonyabbá és hozzáférhetőbbé vált.

Az elmúlt évtizedekben a pluginok fontossága drámai módon növekedett, ami részben annak köszönhető, hogy a digitális audio munkaállomások (DAW: Digital Audio Workstation) népszerűsége megugrott, és ma már az otthoni stúdióktól a professzionális felvételekig minden területen jelen vannak. A DAW-ok olyan szoftverkörnyezetek, amelyek lehetővé teszik a felhasználók számára, hogy különféle hangszerek, ének és egyéb hangforrások sávjait rögzítsék, szerkesszék és effektezzék. Ezek a platformok pluginok által biztosítják azt a lehetőséget, hogy a korábban csak fizikai hardver formában elérhető effekteket alkalmazhassák a felvételeiken.

A pluginok hatalmas előnye, hogy a fizikai eszközökkel szemben rugalmasabbak és dinamikusabbak. Emellett a legtöbbjük könnyen beilleszthető bármelyik modern DAW környezetbe. A különböző plugin-formátumok, mint például a VST, AU, AAX vagy a VST3 biztosítják, hogy ezek az eszközök széles körben elérhetők legyenek, kompatibilisek legyenek a különböző operációs rendszerekkel és platformokkal, és lehetővé teszik, hogy mind a professzionális, mind a hobbi zenészek elérjék és használhassák őket saját produkcióikban.

1.1. Áramkör-modellező pluginok kihívásai

A fizikai áramköröket valós időben modellező pluginok létrehozása gyakran komoly kihívást jelent: ezek bonyolultsága megköveteli, hogy a készítő optimalizálja a számítási igényt, hogy a szimuláció minél kisebb erőforrásigénnyel valósulhasson megvalós idejű futása alatt.

1.2. A dolgozat célja

Napjainkban áramkörszimulációra gyakran alkalmaznak állapotterez módszereket, amelyek a rendszer állapotváltozós leírására épülnek, majd különféle eljárásokkal oldják meg a keletkező egyenletrendszert. A legtöbb áramkör tartalmaz valamilyen nemlineáris elemet, amely jelentősen megnehezíti az egyenletek megoldását.

A dolgozat célja a K-módszer ismertetése és összehasonlítása a valós idejű szimulációkban leggyakrabban használt állapotterez módszerekkel. Az összehasonlítás során elemzem

a számítási igényt, az egyes módszerek előnyeit és hátrányait, valamint az alkalmazhatósági feltételeket.

1.3. Az Orange Crush 20L erősítő modellezése

A K-módszer használatát egy összetettebb áramkör szimulációjában demonstrálom, amely az Orange Crush 20L gitárkombó erősítő modellezésére irányul. Ennek alapján egy valós idejű VST3 plugint készítek, amely célja, hogy hangzásában megegyezzen az erősítő eredeti hangjával, és adott esetben helyettesíteni tudja azt.

2. fejezet

Analóg áramkörök digitális modellezése

2.1. Lineáris áramkörök modellezése

A lineáris áramkörök modellezésének leggyakoribb módszereit ismertetem [12, 17].

Egy lineáris, időinvariáns rendszert pontosan jellemez az átviteli függvénye, amely a kimenet és a bemenet Laplace-transzformáltjainak hányadosaként definiálható. A legtöbb, általunk vizsgált rendszer megadható s -beli polinomok hányadosaként.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (2.1)$$

Cél ebből a hányadosból olyan végtelen impulzusválaszú szűrő kifejezése, ami ezt a viselkedést valósítja meg.

Lehetséges az a megközelítés is, hogy az állapotváltozós leírás alapján szimuláljuk a rendszert. Ebben az esetben minden belső változó is kiszámítható lenne, azonban a legtöbb esetben ez nem szükséges, mivel csupán a rendszer kimenete a lényeges. Az állapotváltozós leírás szerinti szimuláció több egyenlet megoldását igényli, ezért lineáris hálózat esetén, a számítási igény minimalizálása érdekében, kerülendő.

2.1.1. Előrelépő Euler-módszer

Az előrelépő (explicit) Euler-módszer a derivált közelítéséből indul ki. Ezt a következő és az aktuális állapotváltozóból fejezi ki, a többi tagnak az ezelőtti állapotát használja.

$$\dot{\mathbf{w}} = \frac{\mathbf{w}[n+1] - \mathbf{w}[n]}{\Delta t} \quad (2.2)$$

$$\dot{\mathbf{w}} = \frac{\mathbf{w}[n+1] - \mathbf{w}[n]}{\Delta t} = \mathbf{A}\mathbf{w}[n] + \mathbf{B}\mathbf{u}[n] \quad (2.3)$$

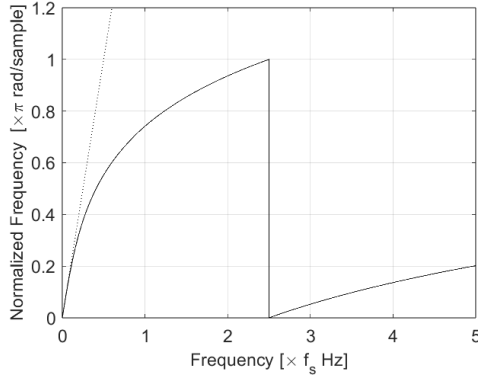
A (2.2)-t Laplace-transzformálva:

$$s = \frac{z-1}{T} = \frac{1-z^{-1}}{Tz^{-1}} \quad (2.4)$$

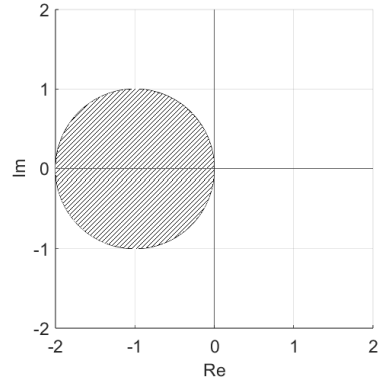
Az előrelépő Euler-módszer nem mindig fog stabil folytonos idejű rendszerből stabil diszkrét idejű rendszert eredményezni, ami 2.4-ből egyértelműen kifejezhető [12]. A stabilitás függeni fog a mintavételi frekvenciától, és ha az nem elég nagy, akkor instabil lesz a diszkrétizált rendszer.

$$z = sT + 1 \quad (2.5)$$

Az előrelépő Euler-módszerrel diszkrétizált rendszer stabilitási feltétele a 2.1b ábrán, frekvenciatorzítása pedig a 2.1a ábrán látható. Érdekes megjegyezni, hogy a frekvenciatorzítás során a magasabb frekvenciák átlapolódnak.



(a) Az előrelépő Euler-módszer frekvenciatorzítása



(b) Az előrelépő Euler-módszer alkalmazásával létrehozott diszkrét rendszer stabilitásának feltétele

2.1. ábra. A 2.1a ábrán látható, hogy az analóg rendszer ω körfrekvenciái melyik θ diszkrét körfrekvenciára képződnek le a transzformáció során. A stabilitás feltétele, hogy az sT szorzatnak a 2.1b ábrán jelölt tartományon belül legyen.

2.1.2. Hátralépő Euler-módszer

A hátralépő (implicit) Euler-módszer a deriváltat az aktuális és az ezelőtti állapotváltozóból fejezi ki, a többi tagnak az aktuális állapotát használja.

$$\dot{\mathbf{w}} = \frac{\mathbf{w}[n] - \mathbf{w}[n-1]}{\Delta t} \quad (2.6)$$

$$\dot{\mathbf{w}} = \frac{\mathbf{w}[n] - \mathbf{w}[n-1]}{\Delta t} = \mathbf{A}\mathbf{w}[n] + \mathbf{B}\mathbf{u}[n] \quad (2.7)$$

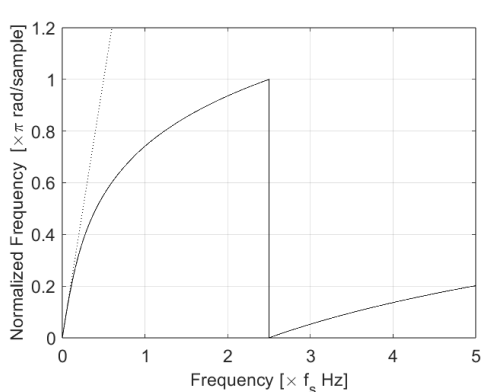
A (2.6)-t Laplace-transzformálva:

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T} = \frac{z - 1}{Tz} \quad (2.8)$$

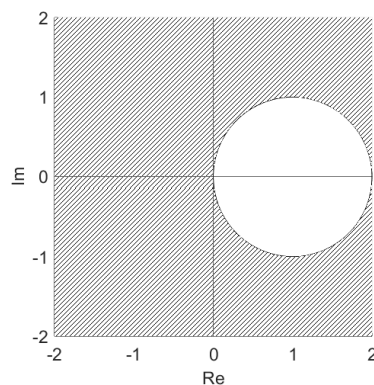
A hátralépő Euler-módszerrel modellezett folytonos idejű rendszer mindig stabil diszkrét idejű rendszerhez vezet, ami 2.8 alapján belátható [12].

$$z = \frac{1}{1 - sT} \quad (2.9)$$

A hátralépő Euler-módszerrel diszkrétizált rendszer stabilitási feltétele a 2.2b ábrán, frekvenciatorzítása pedig a 2.2a ábrán látható. Ugyan úgy, mint az előrelépő Euler-módszer esetén, a frekvenciatorzítás miatt lesznek magas frekvenciák, amelyek átlapolódnak.



(a) A hátralépő Euler-módszer frekvenciatorzítása



(b) A hátralépő Euler-módszer alkalmazásával létrehozott diszkrét rendszer stabilitásának feltétele

2.2. ábra. A 2.2a ábrán látható, hogy az analóg rendszer ω körfrekvenciái melyik θ diszkrét körfrekvenciára képződnek le a transzformáció során. A stabilitás feltétele, hogy az sT szorzatnak a 2.2b ábrán jelölt tartományon belül legyen.

2.1.3. Bilineáris transzformáció

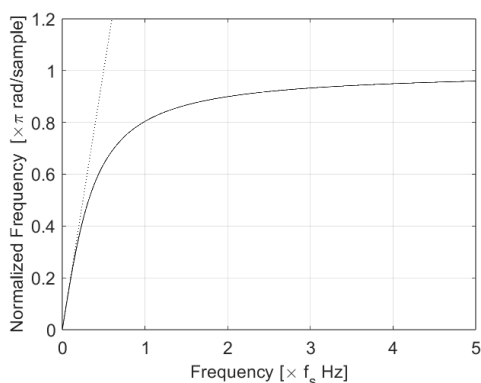
Egyik leggyakrabban használt módszer a bilineáris transzformáció, amely az s -síkból a z -síkra transzformál a trapézsabály, azaz az előre- és a hátralépő Euler-módszer átlaga szerint.

$$s = \frac{2}{T} \frac{z - 1}{z + 1} = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (2.10)$$

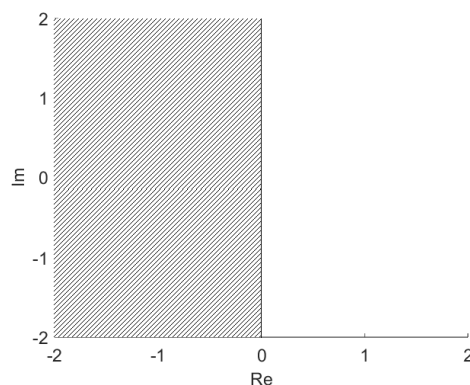
A transzformáció után a rendszer stabilitása megmarad, amit 2.10-ből ki lehet fejezni [12].

$$z = -\frac{4}{sT - 2} - 1 \quad (2.11)$$

Az Euler-módszerekkel ellentétben a bilineáris transzformáció során nincs jelen átlapolódás. Emiatt a tulajdonság miatt használják olyan széles körűen a gyakorlatban.



(a) A bilineáris transzformáció frekvenciatorzítása



(b) A bilineáris transzformáció alkalmazásával létrehozott diszkrét rendszer stabilitásának feltétele

2.3. ábra. A 2.3a ábrán látható, hogy az analóg rendszer ω körfrekvenciái melyik θ diszkrét körfrekvenciára képződnek le a transzformáció során. A stabilitás feltétele, hogy az sT szorzatnak a 2.3b ábrán jelölt tartományon belül legyen.

2.1.4. Impulzus invariáns transzformáció

Az impulzus invariáns transzformációhoz ugyanúgy szükség van a transzformálni kívánt rendszer átviteli függvényére.

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \triangleq \frac{b_0 s^{N-1} + b_1 s^{N-2} + \dots + b_{N-2} s + b_{N-1}}{s^N + a_1 s^{N-1} + \dots + a_{N-1} s + b_N} \quad (2.12)$$

Az átviteli függvényt részlet törtre bontva, inverz Laplace-transzformálva, majd mintavételezve:

$$H(s) = \sum_{i=1}^N \frac{K_i}{s - s_i} \quad (2.13)$$

$$h(t) = \sum_{i=1}^N K_i e^{s_i t} \quad (2.14)$$

$$h[n] = \sum_{i=1}^N K_i e^{s_i n T} \quad (2.15)$$

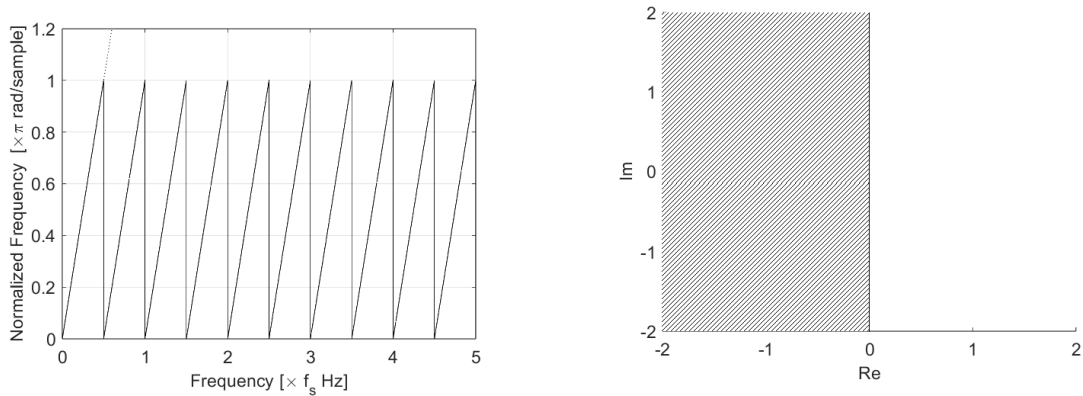
Ezt z-transzformálva kapjuk meg az impulzus-invariáns transzformáció segítségével megtervezett digitális szűrőt.

$$H(z) = \sum_{i=1}^N \frac{K_i}{1 - e^{s_i T} z^{-1}} \quad (2.16)$$

A transzformáció után a rendszer stabilitása megmarad, hiszen a transzformáció során s és z között a pontos összefüggést használjuk, és nem közelítünk [12].

$$z_i \triangleq e^{s_i T} \quad (2.17)$$

Az impulzus-invariáns transzformáció során a magas frekvenciák átlapolódnak, sokkal sűrűbben, mint az Euler-módszerekénél. Emiatt a tulajdonsága miatt csak bizonyos átviteli esetén alkalmazzák ezt a diszkrétizálási módszert, amelyeknél az átlapolódás nem okoz problémát.



(a) Az impulzus-invariáns transzformáció frekvenciatorzítása

(b) Az impulzus-invariáns transzformáció alkalmazásával létrehozott diszkrét rendszer stabilitásának feltétele

2.4. ábra. A 2.4a ábrán látható, hogy az analóg rendszer ω körfrekvenciái melyik θ diszkrét körfrekvenciára képződnek le a transzformáció során. A stabilitás feltétele, hogy az sT szorzatnak a 2.4b ábrán jelölt tartományon belül legyen.

2.1.5. Diszkretizálás utáni szimuláció

A bemutatott diszkretizálási módszerek alkalmazásakor behelyettesítés után az átviteli függvény az alábbi alakot veszi fel:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\sum_{i=0}^N b_i z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^M a_j z^{-j}} \quad (2.18)$$

Átrendezve és inverz z-transzormálva kifejezhető a rendszeregyenlet, ami tulajdonképpen egy végtelen impulzusválaszú (IIR) szűrő:

$$y[n] = \sum_{j=1}^M -a_j y[n-j] + \sum_{i=0}^N b_i u[n-i] \quad (2.19)$$

A szimuláció során ezt az egyenletet kell implementálni. Az y változó (válasz) utolsó M értékét, valamint az u változó (gerjesztés) utolsó N értékét kell tárolni a válasz következő értékének kiszámításához. A számítási igény csökkentése érdekében a buffereléshez célszerű cirkuláris buffer használata.

2.2. Nemlineáris elemek

Ha a rendszerbe memória nélküli nemlinearitás kerül, akkor a rendszer átviteli függvénye nem értelmezett.

Az állapotváltozós leírás egy differenciálegyenlet-rendszert reprezentál, amely pontosan meghatározza a hálózatot. Mivel az átviteli függvény a nemlinearitás miatt nem használható, ezért az állapotváltozós leírás segítségével kell modellezni a hálózatot. Ebben az esetben a nemlineáris függvény az állapotváltozós leírásban fog megjelenni.

$$\dot{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{w}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{C}\mathbf{f}(\mathbf{w}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (2.20)$$

Leggyakrabban a megoldáshoz az Euler-módszerek és a Runge-Kutta módszerek használatosak [17, 7, 9].

2.2.1. Előrelépő Euler-módszer

Az előrelépő Euler-módszer használatánál az egyenletrendszer gyakran egyszerűen megoldható lesz, átrendezés után az előző állapotokat behelyettesítve kapható meg a következő állapot.

Diszkretizáláshoz a (2.8) egyenletet használandó, ezt behelyettesítve, és rendezve:

$$\mathbf{w}[n+1] = \mathbf{A}'\mathbf{w}[n] + \mathbf{B}'\mathbf{u}[n] + \mathbf{C}'\mathbf{f}(\mathbf{w}[n], \mathbf{u}[n]) \quad (2.21)$$

Ezt átrendezve:

$$\mathbf{w}[n] = \mathbf{A}'\mathbf{w}[n-1] + \mathbf{B}'\mathbf{u}[n-1] + \mathbf{C}'\mathbf{f}(\mathbf{w}[n-1], \mathbf{u}[n-1]) \quad (2.22)$$

Az átalakítások után sok esetben csak a korábbi értékeinket be kell helyettesítenünk az explicit egyenletbe a következő minta számolásához.

Ahogy a 2.1.1 alfejezetben látható, lehetséges, hogy a diszkretizált rendszer instabil lesz. Ez a mintavételi frekvenciától függ, és gyakran nagyon nagy frekvencia esetén lesz csak stabil a rendszer. Ez a feltétel valós idejű szimulációk során általában nem teljesíthető, ezért az előrelépő Euler-módszer ritkán használatos valós idejű szimulációra.

2.2.2. Hátralépő Euler-módszer

A hátralépő Euler-módszer használatával a stabilitási kérdés megoldódik 2.1.2, viszont új problémák merülnek fel. Az állapotváltozós leírás transzformálása és rendezése egy implicit egyenletrendszerhez vezet.

$$\mathbf{w}[n] = \mathbf{A}'\mathbf{w}[n-1] + \mathbf{B}'\mathbf{u}[n] + \mathbf{C}'\mathbf{f}(\mathbf{w}[n], \mathbf{u}[n]) \quad (2.23)$$

Látható, hogy az egyenletrendszer bal és jobb oldalán is (jobb oldalon a függvény argumentumaként) megtalálható a $\mathbf{w}[n]$ állapotváltozó. Az implicit egyenlet valamely zérushely-kereső algoritmussal megoldandó (intervallumfelezés, Newton-módszer, szelő-módszer stb. [5]). A nehézségeket ellensúlyozza az, hogy az implicit egyenlet megoldása révén egy stabil folytonos idejű rendszerből stabil diszkrét idejű rendszer keletkezik.

2.2.3. Negyedfokú Runge-Kutta módszer

A Runge-Kutta módszereket gyakran alkalmazzák nemlineáris rendszerek offline szimulációjára. Alapötletük hasonló az Euler-módszerekéhez, azonban itt több pontból közelítik a deriváltat. Ha a cél a rendszer nagyon pontos modellezése, akkor a Runge-Kutta módszerek jobb eredményeket nyújtanak, mint az Euler-módszerek. Ugyanakkor a számítási igényük nagyobb, és nem egyszerű a valós idejű alkalmazásuk, mivel a számításhoz szükséges gerjesztést olyan pontokban is ismerni kell, ahol ez általában egy valós idejű alkalmazás esetén nem ismert. A leggyakrabban használt verziójuk a negyedfokú Runge-Kutta módszer (RK4) [9, 7].

A negyedfokú Runge-Kutta (RK4) módszerre a matematikusok a leghatékonyabb numerikus közönséges differenciálegyenlet-megoldó módszerként hivatkoznak [13], mivel a magasabb fokú változatok csak kis mértékben növelik a pontosságot a hozzáadott nagy számítási igény mellett. A módszer alapfeltétele, hogy a nemlineáris differenciálegyenlet ismert legyen, és a kezdeti értékek adottak legyenek.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{w}} = \mathbf{f}(\mathbf{w}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{w}(t_0) = \mathbf{w}_0 \end{cases} \quad (2.24)$$

Ekkor legyen $h = T$, és felírható:

$$\begin{cases} w[n+1] = w[n] + u[n] + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 = f(w[n], u(nT)) \\ K_2 = f(w[n] + h\frac{K_1}{2}, u(nT + \frac{h}{2})) \\ K_3 = f(w[n] + h\frac{K_2}{2}, u(nT + \frac{h}{2})) \\ K_4 = f(w[n] + hK_3, u(nT + h)) \end{cases} \quad (2.25)$$

Ebben az egyenletrendszerben:

- K_1 a függvény meredeksége az intervallum kezdetén y alapján számítva
- K_2 a függvény meredeksége a intervallum közepén y és K_1 alapján számolva
- K_3 a függvény meredeksége a intervallum közepén y és K_2 alapján számolva
- K_4 a függvény meredeksége a intervallum végén y és K_3 alapján számolva

Mint látható, K_2 és K_3 számolásához szükség lenne a gerjesztés két mintavételezési pont közötti értékére. Ez valós időben nem, vagy csak nehezen alkalmazható.

Digitális jelfeldolgozásban gyakran a bemeneti jel és a kimeneti jelnek követelmény, hogy ugyanannyi mintavételi pontból álljanak. A negyedfokú Runke-Kutta módszer alkalmazásához a bemenet mintavételi frekvenciájának kétszer nagyobbnak kellene lennie. Erre egy lehetőség a köztes pont kiszámolása interpolációval, viszont ez nagy számításigényt igényel.

3. fejezet

K-módszer

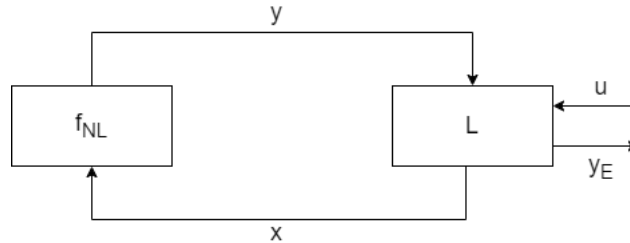
A K-módszer célja, hogy szétválassza a rendszer lineáris részét és a késleltetés nélküli utat tartalmazó részt. Ezután a késleltetés nélküli részt geometriai módszerekkel oldja meg.

3.1. A K-módszer alap gondolata

A K-módszer alapfeltevése, hogy a modellezendő rendszer felbontható egy lineáris dinamikuss és egy nemlineáris memória nélküli részre [3, 2, 16]. Ennek szemléltetése a 3.1 ábrán látható.

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = \mathbf{L}(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{f}_{NL}(\mathbf{x}(t)) \end{cases} \quad (3.1)$$

Így, hogy a rendszer két részre van bontva, azokat a bemeneteket és kimeneteket fogják érinteni a számítási problémák, amelyek függenek a nemlineáris résztől.

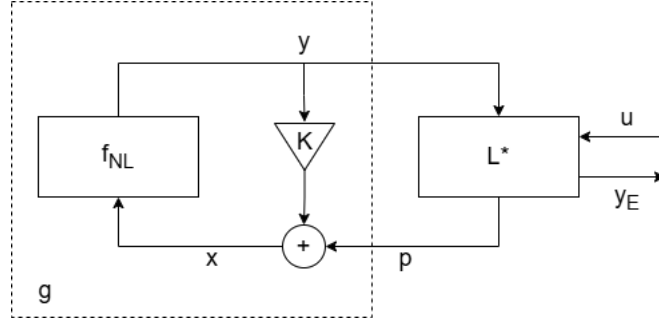


3.1. ábra. A K-módszer alapfeltétele; $\mathbf{u}$ a bemenet, és $\mathbf{y}_E$ a kimenet a külvilág felé. L és f_{NL} között késleltetés nélküli hurok van, hiszen az y változó kiszámolásához szükség van az x változóra, és az x változó kiszámításához szükség van az y változóra.

Ha a rendszert a hátralépő Euler-módszer, akár a bilineáris transzformáció segítségével diszkrétizáljuk, akkor a következő összefüggéshez jutunk [3]:

$$\mathbf{x}[n] = \mathbf{K}\mathbf{y}[n] + \mathbf{p}[n] \quad (3.2)$$

ahol a rendszernek M darab „belső” bemenete ($y_1 \dots y_M$), P darab „külső” bemenete ($u_1 \dots u_P$) és N darab „belső” kimenete ($x_1 \dots x_N$) van.

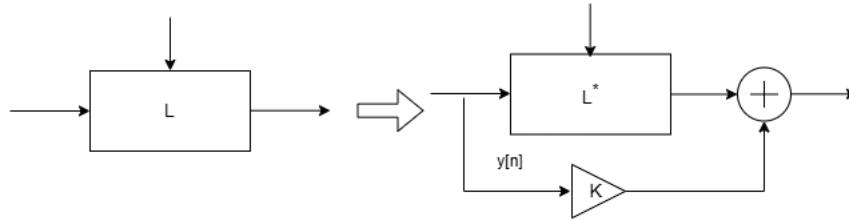


3.2. ábra. A rendszer felbontva; $\mathbf{L}^*$ -nak az $\mathbf{y}$ bemenete és $\mathbf{p}$ kimenete között nincs késleltetés nélküli összeköttetés. A szaggatott vonallal bekeretezett rész fog megfelelni $\mathbf{g}(\mathbf{p})$ -nek.

Ebben az összefüggésben $\mathbf{p}$ egy $\mathbf{L}^*$ rendszer kimenete, amelyet csak a definiált ($\mathbf{u}$) és a múltbéli jelek határoznak meg. Ekkor felírható a rendszer az alábbi formában [3], amit a 3.2 ábra szemléltet:

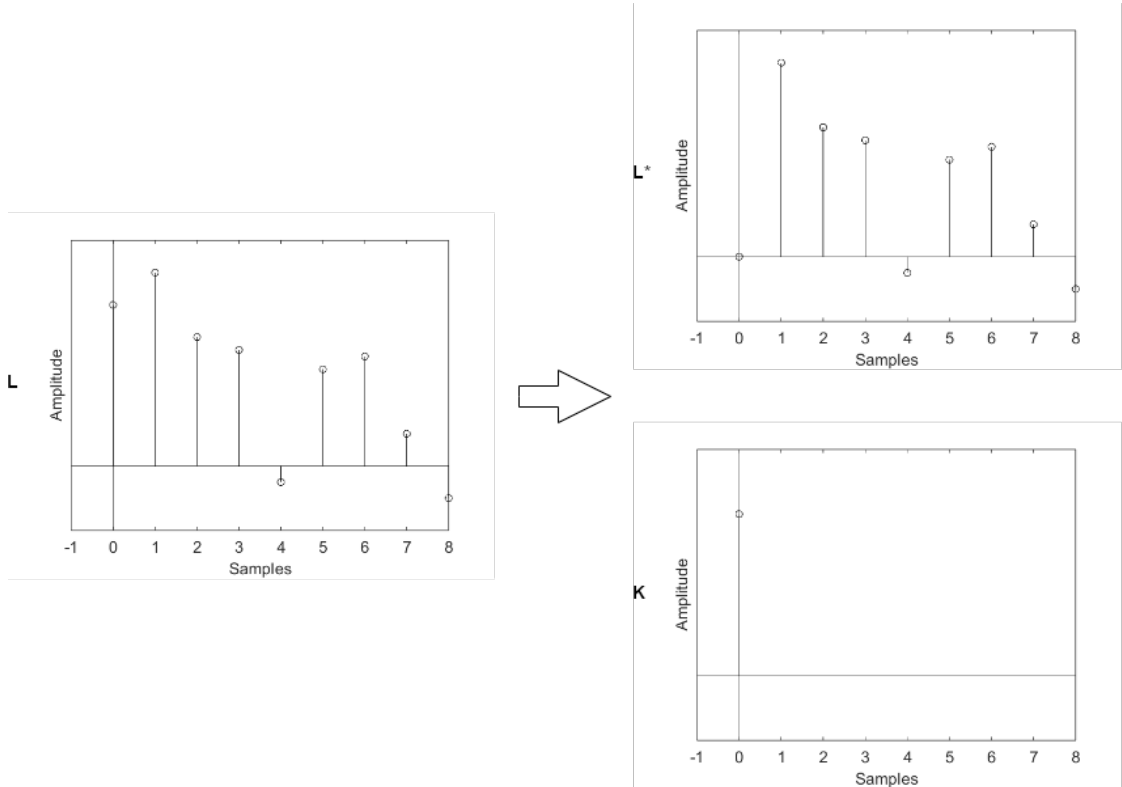
$$\begin{cases} \mathbf{p}[n] = \mathbf{L}^*(\mathbf{u}[n], \mathbf{y}[n]) \\ \mathbf{y}[n] = \mathbf{f}_{NL}(\mathbf{p}[n] + \mathbf{K}\mathbf{y}[n]) \end{cases} \quad (3.3)$$

Tulajdonképpen az $\mathbf{L}$ lineáris rendszernek az egyenletében lévő $\mathbf{y}$ aktuális értékét reprezentáló változót különválasztjuk, és hozzávesszük a nemlineáris rendszerhez, ezzel eliminálva a késleltetés nélküli hurkot. Ezt azért tehetjük meg, mert $\mathbf{L}$ lineáris, így az $\mathbf{y}$ aktuális értéke csak egy konstans $\mathbf{K}$ szorzóval van jelen a kimenetében (3.2). A különválasztást a 3.3 ábra mutatja.



3.3. ábra. Az $\mathbf{L}$ lineáris dinamikus rendszer felbontva a K-módszer szerint; lineáris tulajdonsága miatt az $\mathbf{y}[\mathbf{n}]$ kiemelhető a rendszerből.

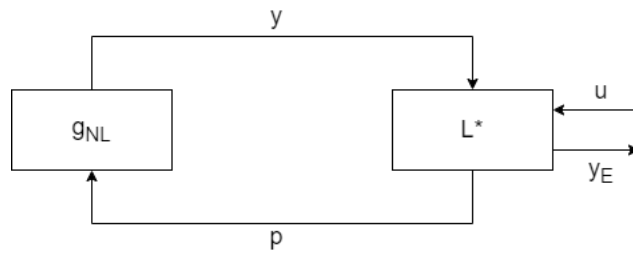
Egy másik értelmezés, hogy az $\mathbf{L}$ rendszernek az y változóra vonatkozó impulzusválaszának első és a többi értékét különválasztjuk. Ezt ábrázolja a 3.4 ábra. Mivel $\mathbf{L}$ egy lineáris MIMO (Multiple Input Multiple Output) rendszer, így a kimenetei a bemenetek szuperpozíciójával kiszámolható. Az $u = 0$ esetén megkapható az y bemenethez és x kimenethez tartozó impulzusválasz. Ennek az impulzusválasznak a legelső mintáját és a többi mintáját szétválasztva eliminálható a késleltetésmentes hurok.



3.4. ábra. Az $\mathbf{L}$ lineáris dinamikus rendszer felbontva a K-módszer szerint; Az impulzusválaszt szétválasztva kapható meg az $\mathbf{L}^*$ rendszer és a K konstans.

Fontos megjegyezni, hogy az $\mathbf{L}^*$ rendszernek nincs semmilyen késleltetés nélküli kapcsolata $\mathbf{y}$ és $\mathbf{p}$ között. Ez látható a 3.5 ábrán. Így a számolási probléma az $\mathbf{y}[n] = \mathbf{f}_{NL}(\mathbf{p}[n] + \mathbf{K}\mathbf{y}[n])$ részre korlátozódik, amely explicit megoldásához a Dini-tételt alkalmazandó, vagy megoldható valamelyik numerikus módszerrel.

Amennyiben az $\mathbf{y} = \mathbf{g}_{NL}(\mathbf{p})$ explicit függvény létezik és meghatározható, a számítási probléma megszűnik.



3.5. ábra. A rendszerből az átalakítások miatt megszűnt a késleltetés nélküli rész; ebben a formában már nincs számítási probléma.

3.2. A K-módszer elemzése

Egy általános kauzális, idő-invariáns rendszernek az általános állapotváltozós leírása az alábbi alakban felírható [3, 2, 16]:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{w}} = \mathbf{A}\mathbf{w} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{C}\mathbf{y} & (3.4a) \\ \mathbf{x} = \mathbf{D}\mathbf{w} + \mathbf{E}\mathbf{u} + \mathbf{F}\mathbf{y} & (3.4b) \\ \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) & (3.4c) \end{cases}$$

ahol $\mathbf{w}$ az állapotvektor és $\mathbf{u}$ a bemenet. Laplace-transzformálva, majd bilineáris transzformációt alkalmazva (3.4a) egyenletre [3]:

$$s\mathbf{W}(s) = \mathbf{A}\mathbf{W}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) + \mathbf{C}\mathbf{Y}(s) \quad (3.5)$$

$$h \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \mathbf{W}(s) = \mathbf{A}\mathbf{W}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) + \mathbf{C}\mathbf{Y}(s) \quad (3.6)$$

ahol $h = \frac{2}{T}$. Ezt rendezve:

$$h(1 - z^{-1})\mathbf{W}(z) = \mathbf{A}(1 + z^{-1})\mathbf{W}(z) + (1 + z^{-1})(\mathbf{B}\mathbf{U}(z) + \mathbf{C}\mathbf{Y}(z)) \quad (3.7)$$

$$h\mathbf{W}(z) - \mathbf{A}\mathbf{W}(z) = z^{-1}h\mathbf{W}(z) + z^{-1}\mathbf{A}\mathbf{W}(z) + \mathbf{B}\mathbf{U}(z) + \mathbf{C}\mathbf{Y}(z) + z^{-1}(\mathbf{B}\mathbf{U}(z) + \mathbf{C}\mathbf{Y}(z)) \quad (3.8)$$

$$(h\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{W}(z) = z^{-1}(h\mathbf{I} + \mathbf{A})\mathbf{W}(z) + \mathbf{B}\mathbf{U}(z) + z^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(z) + \mathbf{C}\mathbf{Y}(z) + z^{-1}\mathbf{C}\mathbf{Y}(z) \quad (3.9)$$

Inverz z-transzformálva:

$$(h\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{w}[n] = (h\mathbf{I} + \mathbf{A})\mathbf{w}[n - 1] + \mathbf{B}\mathbf{u}[n] + \mathbf{B}\mathbf{u}[n - 1] + \mathbf{C}\mathbf{y}[n] + \mathbf{C}\mathbf{y}[n - 1] \quad (3.10)$$

Ha $(h\mathbf{I} - \mathbf{A})$ invertálható (ami igaz lesz mindig, ha h az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékeitől különbözik [3]), akkor balról az inverzével beszorozva a két oldalt:

$$\mathbf{w}[n] = (h\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}((h\mathbf{I} + \mathbf{A})\mathbf{w}[n - 1] + \mathbf{B}\mathbf{u}[n] + \mathbf{B}\mathbf{u}[n - 1] + \mathbf{C}\mathbf{y}[n] + \mathbf{C}\mathbf{y}[n - 1]) \quad (3.11)$$

A könnyebb felírás érdekében új segédváltozók bevezetése ajánlott.

$$\mathbf{G} \triangleq (h\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{C} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{H} \triangleq (h\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}(h\mathbf{I} + \mathbf{A}) \quad (3.13)$$

$$\mathbf{J} \triangleq (h\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \quad (3.14)$$

Ezeket behelyettesítve:

$$\mathbf{w}[n] = \mathbf{H}\mathbf{w}[n - 1] + \mathbf{J}(\mathbf{u}[n] + \mathbf{u}[n - 1]) + \mathbf{G}\mathbf{y}[n - 1] + \mathbf{G}\mathbf{y}[n] \quad (3.15)$$

Egy újabb segédváltozó bevezetése:

$$\hat{\mathbf{p}} \triangleq \mathbf{H}\mathbf{w}[n - 1] + \mathbf{J}(\mathbf{u}[n] + \mathbf{u}[n - 1]) + \mathbf{G}\mathbf{y}[n - 1] \quad (3.16)$$

Ezt behelyettesítve:

$$\mathbf{w}[n] = \hat{\mathbf{p}}[n] + \mathbf{G}\mathbf{y}[n] \quad (3.17)$$

Az átalakítások segítségével a (3.4b) egyenlet felírható:

$$\mathbf{x}[n] = \mathbf{D}\hat{\mathbf{p}}[n] + \mathbf{D}\mathbf{G}\mathbf{y}[n] + \mathbf{E}\mathbf{u}[n] + \mathbf{F}\mathbf{y}[n] = \mathbf{p}[n] + \mathbf{K}\mathbf{y}[n] \quad (3.18)$$

ahol

$$\mathbf{K} \triangleq \mathbf{D}\mathbf{G} + \mathbf{F} \quad (3.19)$$

$$\mathbf{p}[n] \triangleq \mathbf{D}\hat{\mathbf{p}}[n] + \mathbf{E}\mathbf{u}[n] \quad (3.20)$$

Összességében [3]:

$$\begin{cases} \mathbf{p}[n] = \mathbf{H}\mathbf{w}[n-1] + \mathbf{J}(\mathbf{u}[n] + \mathbf{u}[n-1]) + \mathbf{G}\mathbf{y}[n-1] + \mathbf{E}\mathbf{u}[n] \\ \mathbf{y}[n] = \mathbf{f}_{NL}(\mathbf{p}[n] + \mathbf{K}\mathbf{y}[n]) \\ \mathbf{w}[n] = \mathbf{H}\mathbf{w}[n-1] + \mathbf{J}(\mathbf{u}[n] + \mathbf{u}[n-1]) + \mathbf{G}\mathbf{y}[n-1] + \mathbf{G}\mathbf{y}[n] \end{cases} \quad (3.21)$$

A (3.21) egyenletrendszerben az egyetlen problémát okozó rész a második egyenlet. Ezen kívül az egyenletrendszeren sorba iterálva minden elem kiszámolható, hiszen a $\mathbf{p}[n]$ csak a definiált és a múltbéli változóértékektől függ, a $\mathbf{w}[n]$ egyenletébe szintén csak be kell helyettesíteni az $\mathbf{y}[n]$ kiszámolása után.

Érdemes megjegyezni, hogy ezt a módszert másféle folytonos időből diszkrét időbe transzformációval is le lehet vezetni (például hátralépő Euler-módszerrel) [3].

3.3. A nemlineáris rész

Ahogy korábban említettük, a számítási probléma a (3.21) második egyenletére redukálódik:

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{f}_{NL}(\mathbf{p}[n] + \mathbf{K}\mathbf{y}[n]) \quad (3.22)$$

Az egyenletek átrendezésének célja az, hogy meg lehessen vizsgálni, hogy teljesül-e rá a Dini-tétel. Ha teljesül, akkor található legyen egy olyan $g(p)$ implicit egyenlet, ami meg-egyezik az $f_{NL}(x)$ függvénnyel.

3.3.1. Dini-tétel

A Dini-tételnek csak a SISO rendszerekre vonatkoztatott alakját tárgyalja ez a dolgozat (MISO és MIMO rendszerekre is meg lehet fogalmazni [3]). Adott egy implicit függvény:

$$f(x, y) = 0 \quad (3.23)$$

Ha ennek a függvénynek létezik olyan pontja, amelyre igaz egy $P_0(x_0, y_0)$ pontban, hogy

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} \neq 0 \quad (3.24)$$

akkor létezik olyan $g(x)$ függvény, amelyre

$$f(x, g(x)) = 0 \quad (3.25)$$

igaz a P_0 pont körül. Ha (3.24) nem csak P_0 -ra, hanem az egész $f(x, y)$ függvényre igaz, akkor $f(x, y)$ nem csak lokálisan, hanem globálisan is kifejezhető $f_{NL}(x, g(x))$ függvénnyel [3].

Összefoglalva a Dini-tétel azt mondja ki, hogy ha egy implicit $y = f(x, y)$ függvényre teljesül (3.24), akkor létezik $g(x) = f(x, y)$ explicit függvény.

3.3.2. A Dini-tétel alkalmazása a K-módszerben

Ebben az esetben az $f(x, y)$ függvény a (3.22) nullára rendezett alakja:

$$f_{NL}(p + ky) - y = 0 \quad (3.26)$$

Ha az y szerinti parciális deriváltjára adott a feltétel, azaz

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f'_{NL}(p + ky)k - 1 \neq 0 \quad (3.27)$$

$$f'_{NL}(p + ky) \neq \frac{1}{k} \quad (3.28)$$

akkor létezik $g(p)$, amelyre

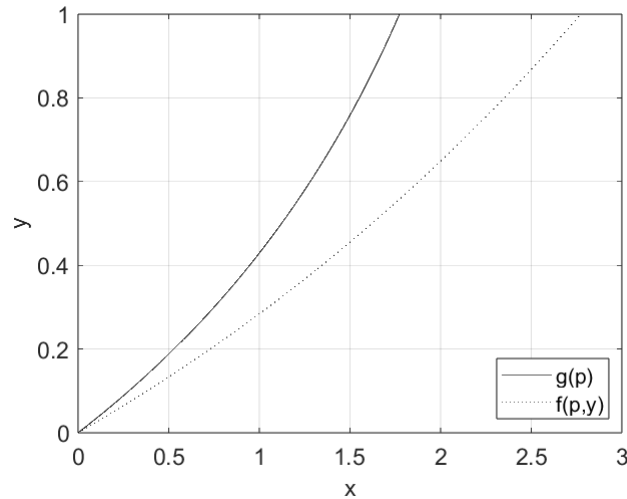
$$g(p) = y \quad (3.29)$$

Mivel olyan $g(p)$ függvényt keresünk, amely megegyezik a $f(p + ky)$ függvénnyel, ezért geometriai megfontolások miatt [3] a $g(p)$ függvényt az $f(x)$ függvény lineáris transzformációjával kapható meg, mégpedig a

$$\begin{cases} y = y_s \\ p = x - ky \end{cases} \quad (3.30)$$

lineáris transzformáció segítségével, ami az (x, y) síkból a (p, y_s) síkba transzformál. A transzformációt a 3.6 ábra szemlélteti.

A $g(p)$ függvény csak úgy lehet egyenlő az $f(p + ky)$ függvénnyel, ha az egész p tengelyt eltoljuk ky -nal. Így minden p helyhez az az érték fog kerülni, ami eredetileg a $p + ky$ helyen volt (azaz a $g(p)$ függvényben minden p helyen az az érték található, ami az $f(p + ky)$ függvényben a $p + ky$ helyen). Ezzel a lineáris transzformációval ez az implicit függvény kifejezhető egy explicit függvénnyel, ha teljesül a Dini-tétel.



3.6. ábra. Olyan $g(x)$ explicit függvényt keresünk, amely minden p -re megegyezik az $f(p, y)$ függvénnyel. Mivel az $f(p, y) = f(p + Ky)$, azért $g(p)$ meghatározásához az $f(p, y)$ függvényt el kell tolni úgy, hogy minden p -hez Ky -nal kevesebb érték tartozzon.

3.4. A K-módszer alkalmazása

A korábban már levezetett (3.21) szerint:

$$\begin{cases} \mathbf{p}[n] = \mathbf{H}\mathbf{w}[n-1] + \mathbf{J}(\mathbf{u}[n] + \mathbf{u}[n-1]) + \mathbf{G}\mathbf{y}[n-1] + \mathbf{E}\mathbf{u}[n] \\ \mathbf{y}[n] = \mathbf{f}_{NL}(\mathbf{p}[n] + \mathbf{K}\mathbf{y}[n]) \\ \mathbf{w}[n] = \mathbf{H}\mathbf{w}[n-1] + \mathbf{J}(\mathbf{u}[n] + \mathbf{u}[n-1]) + \mathbf{G}\mathbf{y}[n-1] + \mathbf{G}\mathbf{y}[n] \end{cases} \quad (3.31)$$

A korábban bevezetett változók felhasználásával megfogalmazott egyenletrendszeren végzett iteráció a nemlineáris rendszer egyenleteinek megoldásához vezet [3].

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{p}}[n] = \mathbf{H}\mathbf{w}[n-1] + \mathbf{J}(\mathbf{u}[n] + \mathbf{u}[n-1]) + \mathbf{G}\mathbf{y}[n-1] \\ \mathbf{p}[n] = \mathbf{D}\hat{\mathbf{p}}[n] + \mathbf{E}\mathbf{u}[n] \\ \mathbf{y}[n] = \mathbf{g}(\mathbf{p}[n]) \\ \mathbf{w}[n] = \mathbf{G}\mathbf{y}[n] + \hat{\mathbf{p}}[n] \end{cases} \quad (3.32)$$

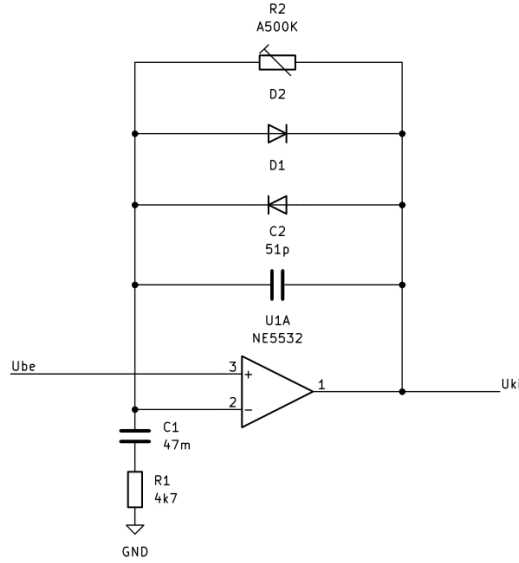
A (3.32) egyenletrendszer harmadik egyenlete például egy előre legenerált táblázat segítségével megoldható, amely a (p, y) értékpárokat tárolja. Ezek közül az értékpárok közvetlenül kikereshetők. Ez a lépés a K-módszer hatékonyságának az alapja, mivel így nem szükséges egy implicit egyenletrendszert valós időben megoldani; elegendő az előre legenerált táblázatból kikeresni az eredményt.

Összefoglalva az algoritmus lépéseit [16]:

1. $\hat{\mathbf{p}}[n]$ kiszámolása (3.16) szerint
2. $\mathbf{p}[n]$ kiszámítása $\hat{\mathbf{p}}[n]$ és $\mathbf{u}[n]$ felhasználásával
3. $\mathbf{y}[n]$ kiszámítása a letárolt táblázatban való kereséssel
4. Az állapotváltozók ($\mathbf{w}$) frissítése (3.17) szerint
5. A kimenet kiszámolása $\mathbf{w}[n]$, $\mathbf{u}[n]$, $\mathbf{y}[n]$ segítségével

3.5. Példa

A módszer bemutatása céljából az Ibanez Tube-Screamer gitártorzító pedál áramkörének a „clipping stage” részét valósítottam meg K-módszer segítségével.



3.7. ábra. A Tube-Screamer áramkör „clipping stage” részének áramköre

3.5.1. Megvalósítás

Először meg kell határozni a rendszer állapotváltozós leírását. Az állapotváltozók a kondenzátorok feszültségei lesznek, a diódákat érdemes összevonni, és egy nemlineáris elemként kezelni. A nemlineáris függvény pedig a két dióda karakterisztika összege lesz. A Kirchhoff-törvényekből felírt egyenleteket átrendezve:

$$\begin{cases} u_{C1}' = -\frac{1}{R_1 C_1} u_{C1} + \frac{1}{R_1 C_1} u_{be} \\ u_{C2}' = -\frac{1}{C_2 R_1} u_{C1} - \frac{1}{C_2 R_2} u_{C2} + \frac{1}{C_2 R_1} u_{be} - \frac{1}{C_2} f(u_{C2}) \\ f(u) = I_{S0} (e^{\frac{u}{U_T}} - e^{-\frac{u}{U_T}}) \\ u_{ki} = u_{C2} + u_{be} \end{cases} \quad (3.33)$$

A K-módszerhez szükséges mátrix alakban felírva:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & 0 \\ -\frac{1}{C_2 R_1} & -\frac{1}{C_2 R_2} \end{pmatrix} \mathbf{w} + \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} \\ \frac{1}{C_2 R_1} \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{C_2} \end{pmatrix} y \\ x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{w} \\ y = f(x) \end{cases} \quad (3.34)$$

Az ebből meghatározott mátrixok:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & 0 \\ -\frac{1}{C_2 R_1} & -\frac{1}{C_2 R_2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} & 0 \\ \frac{1}{C_2 R_1} & -\frac{1}{C_2 R_2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{C_2} \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E = 0 \quad F = 0$$

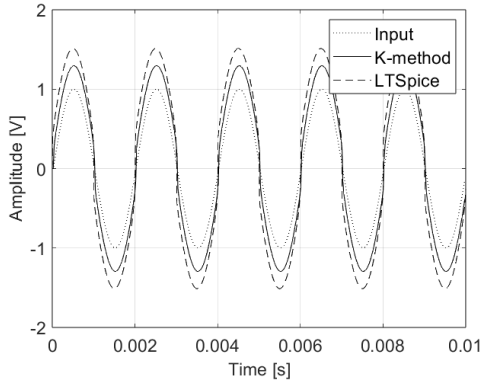
A segédváltozókat kiszámoltam a (3.12), (3.13), (3.14), (3.19) egyenletekkel.

Legeneráltam az $f(u)$ függvény táblázatát, majd végrehajtottam rajta az $y_s = y$, $p = x - Ky$ lineáris transzformációt. Lehetőség szerint érdemes kizárólag a valóságban előforduló két szélsőérték határában belüli értékeket legenerálni, továbbá, ha a függvény szimmetrikus az y tengelyre nézve, akkor elegendő csupán az egyik oldal értékeit tárolni

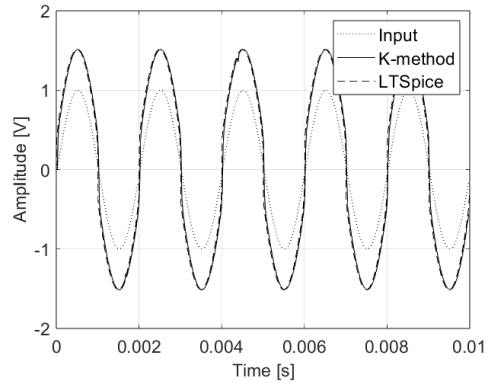
(ennél a példánál ez éppen lehetséges). Ezt követően már csak a (3.32) pontban leírt algoritmust kell futtatni.

3.5.2. Eredmény

Az áramkört az LTSpice programban is elkészítettem összehasonlítás céljából, és teszteltem a K-módszert a fent említett függvénnyel, illetve LTSpice-ből kiexportált karakterisztikával.



(a) A (3.33) egyenletben leírt karakterisztikával



(b) LTSpice-ből exportált karakterisztikával

3.8. ábra. A megvalósított modell válaszjele egy 500 Hz frekvenciájú, 1 V amplitúdójú szinusz jelre

A (3.33) egyenletrendszerben említett karakterisztikával az eredmény eltér az LTSpice program által meghatározott kimenettől, ami a 3.8a ábrán látható. A jelalakok hasonlóak, viszont amplitúdóban különböznek. Ez azért van, mert az LTSpice nem ugyanezzel a karakterisztikával számol. Erre abból lehet következtetni, hogy ha az LTSpice-ből exportáljuk a karakterisztikánkat, akkor a kimenetek megegyezők lesznek, ahogy látható a 3.8b ábrán is.

4. fejezet

A K-módszer összehasonlítása más állapotteres módszerekkel

Áramkörszimulációt többféle módon is meg lehet közelíteni. Ezek a megközelítések három nagy csoportba sorolhatóak: állapotteres módszerek, hullámdigitális szűrő módszer és a fekete doboz módszerek [11]. Ebben a fejezetben az állapotteres módszerek közül a K-módszert és a valós idejű szimulációnál leggyakrabban használt állapotteres módszereket fogom összehasonlítani.

4.1. Az állapotteres módszerek

Az állapotteres módszerek kiindulási alapja, hogy az áramkörnek szükséges felírni az állapotváltozós leírását:

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{A}\mathbf{w}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{C}\mathbf{f}(\mathbf{D}\mathbf{w}(t) + \mathbf{E}\mathbf{u}(t) + \mathbf{F}\mathbf{f}(\dots)) \quad (4.1)$$

Az egyenletrendszerben a $\mathbf{w}$ az állapotvektor, $\mathbf{u}$ a gerjesztés, $\mathbf{f}$ pedig egy nemlineáris függvény. Bizonyos áramkörök állapotváltozós leírásában megfigyelhető a nemlineáris függvény egymásbaágyazódása. Ez általában bonyolultabb áramkörök esetén fordul elő, amikor a nemlineáris rész függ önmagától. Ezt az egymásbaágyazódást jelöli a (4.1) egyenletben az $\mathbf{f}(\dots)$ változó, aminek az argumentumában ugyanazok a változók találhatók, mint a külső függvény argumentumában.

Ezután diszkretizálásra van szükség: a legtöbb módszer a deriváltat egyből helyettesíti az azt közelítő kifejezéssel, más módszerek az azokban definiált módon átírják az egyenletet.

Leggyakrabban az állapotteres módszerek a diszkretizálásban fognak különbözni, hiszen kulcsfontosságú, hogy hogyan fogják a deriváltat közelíteni. Ez fogja meghatározni a diszkrét rendszer stabilitását, befolyásolja a számítási igényt (a kifejezés bonyolultsága), valamint a hiba nagyságát, amellyel eltér az analóg rendszertől (2).

4.1.1. Euler-módszerek

Az előrelépő- és hátralépő Euler-módszereket gyakran alkalmazzák a mindennapi gyakorlatban [17, 6, 10, 8]. Valós idejű szimuláció esetén leggyakrabban a hátralépő Euler-módszert célszerű alkalmazni, mivel az előrelépő Euler-módszer stabilitási feltételének (2.1.1) teljesítéséhez legtöbbször nagy mintavételi frekvencia szükséges.

A hátralépő Euler-módszerben a diszkretizálás után az egyenlet mindig implicit lesz, így azt valamilyen numerikus módszerrel kell megoldani (2.1.2).

Ha az $\mathbf{F}$ változó a (4.1) egyenletben nem 0, akkor nem elég egy numerikus zérushelykereső algoritmus alkalmazása az egyenlet megoldásához. Ekkor az egyenlet alakja:

$$\mathbf{w}[n] = \mathbf{H}\mathbf{w}[n-1] + \mathbf{J}\mathbf{u}[n] + \mathbf{G}\mathbf{f}(\mathbf{D}\mathbf{w}[n] + \mathbf{E}\mathbf{u}[n] + \mathbf{F}\mathbf{f}(\dots)) \quad (4.2)$$

Látható, hogy az egyenlet implicit, hiszen az egyenlet bal oldalán és a függvény argumentumaként is szerepel $\mathbf{w}[n]$. Bonyolultabb áramkörök esetén előfordul, hogy a nemlinearitás visszahat magára (hasonló egy visszacsatoláshoz), és ekkor egy végtelen függvény egymásbaágyazódás figyelhető meg. Ezt a két problémát egyszerre nem tudják kezelni a numerikus zérushelykereső módszerek, így más megközelítés szükséges.

Ekkor célszerű az egyenletet szétválasztani olyan formában, ahogyan azt a K-módszer teszi (3.1). Először a nemlineáris rész kimenete lesz meghatározva, majd csak utána lesz az állapotvektor kiszámolva és aktuális értékeire frissítve.

A nemlineáris rész kimenetét elnevezve $\mathbf{y}[n]$ -nek és a szétválasztott egyenletrendszer felírva:

$$\begin{cases} \mathbf{w}[n] = \mathbf{H}\mathbf{w}[n-1] + \mathbf{J}\mathbf{u}[n] + \mathbf{G}\mathbf{y}[n] \\ \mathbf{y}[n] = \mathbf{f}(\mathbf{D}\mathbf{w}[n] + \mathbf{E}\mathbf{u}[n] + \mathbf{F}\mathbf{y}[n]) \end{cases} \quad (4.3)$$

Ez a lépés még nem oldotta meg a problémát, viszont az állapotvektor egyenletét a nemlineáris rendszer kimenetének egyenletébe behelyettesítve $\mathbf{w}[n]$ -től független egyenletet lesz az eredmény:

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{f}(\mathbf{D}(\mathbf{H}\mathbf{w}[n-1] + \mathbf{J}\mathbf{u}[n] + \mathbf{G}\mathbf{y}[n]) + \mathbf{E}\mathbf{u}[n] + \mathbf{F}\mathbf{y}[n]) \quad (4.4)$$

Ezt az egyenletet már képesek a zérushelykereső módszerek megoldani. Megoldás után a nemlineáris rész kimenetét visszahelyettesítve $\mathbf{w}[n]$ egyenletébe megkaphatóak az állapotvektor aktuális értékei.

A K-módszerben is alkalmazott egyenletszétválasztással meg lehet oldani egy olyan egyenletet, amiben két probléma van egyszerre jelen: szétválasztás és behelyettesítés után a két problémát különválasztottuk, amiket külön-külön meg lehet oldani. Bonyolultabb áramkörökben ezt a plusz lépést gyakran végre kell hajtani.

4.1.2. K-módszer

A K-módszer az egyenletek szétválasztásával kezd, függetlenül az $\mathbf{F}$ változótól. Szétválasztás után ugyanúgy a nemlineáris rész kimenetét számolja ki először, de ehhez nem numerikus zérushelykereső módszert használ, hanem alkalmazza a Dini-tételt [3], ami kimondja, hogy egy implicit függvényhez található egy olyan explicit függvény, ami néhány feltétel teljesülése esetén megegyezik vele (3.3.1).

Ezt az explicit függvényt ki lehet offline számolni, letárolni egy tömbben, és így meg lehet oldani az egyenletet egy tömbben való kereséssel a numerikus zérushelykereső módszer helyett.

Érdemes megjegyezni, hogy mivel a Dini-tétel alkalmazásának az a feltétele, mint a Newton-módszernek, így csak akkor lehet alkalmazni, ha a Newton-módszerrel is meg lehetne oldani az egyenletet [16].

4.2. Rugalmasabb diszkretizáció a K-módszerben

A K-módszer lehetőséget ad, hogy bármilyen z -beli racionális törtet használható legyen a diszkretizáláshoz, és nem definiálja azt úgy, mint az Euler-módszerek.

A K-módszer Laplace-transzformáció után az s tartományból behelyettesítéssel áttérünk a z tartományba, majd rendezés után inverz- z transzformálva megkapjuk a diszkrétizált állapotegyenletet. Ezzel lehetőséget ad arra, hogy különböző, akármilyen z -beli polinom/polinom alakú kifejezéssel közelítsük az s változót, ha erre szükség lenne. Laplace-transzformáció esetén a (4.1) egyenletrendszer alakja:

$$s\mathbf{W}(s) = \mathbf{A}\mathbf{W}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) + \mathbf{C}\mathbf{f}(\mathbf{D}\mathbf{W}(s) + \mathbf{E}\mathbf{U}(s) + \mathbf{F}\mathbf{f}(\dots)) \quad (4.5)$$

$$s \cong l(z) \quad (4.6)$$

Ezt behelyettesítve:

$$l(z)\mathbf{W}(z) = \mathbf{A}\mathbf{W}(z) + \mathbf{B}\mathbf{U}(z) + \mathbf{C}\mathbf{f}(\mathbf{D}\mathbf{W}(z) + \mathbf{E}\mathbf{U}(z) + \mathbf{F}\mathbf{f}(\dots)) \quad (4.7)$$

Inverz z -transzformáció és rendezés után az egyenlet alakja:

$$\mathbf{w}[n] = \sum_{i=1}^M \mathbf{H}_i \mathbf{w}[n-i] + \sum_{j=0}^N \mathbf{J}_j \mathbf{u}[n-j] + \sum_{k=0}^P \mathbf{G}_k \mathbf{f}(\mathbf{D}\mathbf{w}[\mathbf{n} - \mathbf{k}] + \mathbf{E}\mathbf{u}[\mathbf{n} - \mathbf{k}] + \mathbf{F}\mathbf{f}(\dots)) \quad (4.8)$$

4.3. Számítási igény

Valós idejű szimuláció esetén kritikus fontossággal bír a választott módszer számítási igénye, hiszen megadott időkereten belül kell a kimenetet kiszámolni.

4.3.1. Hátralépő Euler-módszer

$\mathbf{F} = 0$ esetén: minden iteráció során el kell végezni a $\mathbf{H}\mathbf{w}[n-1] + \mathbf{J}\mathbf{u}[n]$ és az $\mathbf{E}\mathbf{u}[n]$ összeadásokat és szorzásokat (egy összeadás és három szorzás), amelyek számításigénye $O(n)$ és $3O(n^2)$ n számjegyű számok esetén.

Ezután a Newton-módszert kell alkalmazni, aminek a számítási igénye $O((\log n)F(n))$, ahol $F(n)$ a $\mathbf{f}(\mathbf{x})/\dot{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ kiszámolásának számítási igénye n számjegyű pontosság esetén [4].

$\mathbf{F} \neq 0$ esetén: minden iteráció során el kell végezni a $\mathbf{D}\mathbf{H}\mathbf{w}[n-1] + (\mathbf{D}\mathbf{J} + \mathbf{E})\mathbf{u}[n]$ és a $\mathbf{D}\mathbf{G} + \mathbf{F}$ műveleteket (3 összeadás, 4 szorzás), amelyeknek $3O(n)$ és $O(4n^2)$ a komplexitásuk. Ezután a Newton-módszerrel kell megoldani a nemlineáris egyenletet, számításigénye a fentebb említett $O((\log n)F(n))$ [4]. A Newton-módszer futtatása után elvégezendő a $\mathbf{G}\mathbf{y}[n]$ szorzás és az egyetlen összeadás $\omega[n]$ kiszámításához, amelyek számításigénye $O(n^2)$ és $O(n)$.

	lineáris műveletek	Newton-módszer	összesen
$\mathbf{F} = 0$	$3O(n^2) + O(n)$ $= O(n^2)$	$O((\log n)F(n))$	$O((\log n)F(n))$
$\mathbf{F} \neq 0$	$3O(n) + 4O(n^2) + O(n^2) + O(n)$ $= O(n^2)$	$O((\log n)F(n))$	$O((\log n)F(n))$

A táblázatból látszik, hogy a hátralépő Euler-módszer komplexitását mindig a nemlineáris függvény, és annak deriváltja fogja meghatározni (ha már található benne szorzás művelet, akkor összességében a komplexitás minimum $O((\log n)n^2)$).

4.3.2. K-módszer

Ha a K-módszerben a kialakult nemlineáris implicit egyenletet a Newton módszerrel oldanánk meg, akkor ugyanazt a számításigényt eredményezne, mint a hátralépő Euler-

módszer, hiszen a két eljárás között a különbség a diszkretizálás, ami csak elenyésző számú összeadás és szorzás műveleteket adna a komplexitáshoz.

A nemlineáris egyenlet megoldása előtt 4 szorzás és 4 összeadás található, komplexitásuk $4O(n^2)$ és $4O(n)$.

Offline tömbbe letárolás esetén csak az abban való keresés lesz, ami számításigényt igényel szemben az állandó hányados számítással a Newton-módszerben. A tömböt legenerálni rendezetten érdemes, ekkor a legrosszabb esetben m elem esetén egy bináris keresés $\log_2 m$ iteráció alatt találja meg a keresett (p, y_s) párt. A letárolt elemek száma pedig csökkenthető interpolációval az értékek között.

Az összehasonlítások n számjegy esetén $O(n)$ komplexitásúak, és a keresés lefutása után 3 szorzás és 3 összeadás található, amiknek $3O(n^2)$ és $3O(n)$ a komplexitásuk.

lineáris műveletek	bináris keresés	összesen
$4O(n^2) + 4O(n) + 3O(n^2) + 3O(n)$ $= O(n^2)$	$O(n \log m)$	$O(n^2)$

A K-módszer a komplexitása $O(n^2)$, hiszen a tömb nagyságát növelve logaritmikusan nő a számítás igény, még 32 bites float pontosság esetén is dominál az $O(n \log m)$ számításigény felett. Az $O(n^2)$ -es futásidő a [11] irodalomban is megtalálható levezetés nélkül.

4.4. Az összehasonlítás összefoglalása

A K-módszer előnyei a hátralépő Euler-módszerrel szemben:

- A hátralépő Euler-módszer nagyobb számítási igényű, mint a K-módszer ($O((\log n)F(n)) > O(n^2)$)
- A K-módszer pontosabb, mivel pontosabban közelíti a deriváltat a hátralépő Euler-módszernél, és lehetőséget ad nagyobb fokú közelítések használatához is
- A hátralépő Euler-módszer végrehajtási menete függ az állapotváltozós leírás alakjától, ezzel szemben a K-módszer mindig ugyanazt a sémát használja
- A K-módszerben a letárolt tömb méretét lehet optimalizálni: y_s tengelyre szimmetrikus függvény esetén elég csak a pozitív p értékek eltárolása, a tömb méretének csökkentésével megjelenő pontatlanságot interpolációval egyensúlyozhatjuk, illetve lineáris interpoláció esetén a lineáris részeket lehetőségünk van ritkábban letárolni

A hátralépő Euler-módszer előnyei a K-módszerrel szemben:

- Kevesebb memóriát foglal futás közben (a K-módszer által letárolt tömböt végig a futás során meg kell tartani)
- Ha a modellezett részáramkörben található változtatható paraméter (potenciométer, érzékelők stb.), akkor minden egyes paraméter változásnál K-módszer esetén újra ki kell számolni a mátrixokat és a letárolandó tömböt
- A tömb legenerálása előtt meg kell győződni arról, hogy milyen reális maximum és minimum értékek lehetségesek a nemlineáris rész kimeneteként

A két módszer egyező tulajdonságai:

- Mindkét módszer alkalmazása $\dot{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \neq 0$ feltételhez kötött (ez a feltétel gyakran teljesül a zenei alkalmazáshoz tervezett áramkörökben)

5. fejezet

A K-módszer lehetséges felhasználási területei

A kutatás során nagyon sok különböző területtel találkoztam, ahol használják a hátralépő Euler-módszert. Ezek közül szeretném kiemelni a legérdekesebbeket.

A zenei alkalmazásokon kívül az élet sok területén használják a hátralépő Euler-módszert, szinte mindenhol, ahol differenciálegyenletek alapján határoznak meg egy folyamatot, viselkedést, és ezt szimulálni is akarják.

Ezek a differenciálegyenletek jól leírják a szimulálandó rendszert, és szimulálásuk során előre észrevehetőek hibák, amit lehet csak a prototípus gyártás után vettek volna észre, a rendszer különböző gerjesztésekre való reagálásának elemzését teszi lehetővé, illetve a különböző rendszerparaméterek megválasztását segítheti.

Az építőmérnöki szerkezettervezés során a hátralépő Euler-módszert az épületek, hidak teszteléséhez használják különböző terhelések esetén [8]. Szeizmikus, vagy akár szélterhelést szimulálva a dinamikai viselkedés vizsgálható, tesztelve így annak stabilitását és biztonságosságát.

A reakciókinetikában a hátralépő Euler-módszert alkalmazzák a reakciósebességek és a reaktánsok, valamint a termékek koncentrációinak modellezésére kémiai folyamatokban [6].

A pénzügyben a hátralépő Euler-módszert szokták használni opció árazási modellekben, amikben felmerülnek differenciálegyenletek [10].

Érdemes lenne a K-módszert a hátralépő Euler-módszer helyett használni, mivel az eredmények pontosabbak lehetnek a bilineáris transzformáció alkalmazásának köszönhetően. Ráadásul, ha a valós idejű működés fontos szempont, a K-módszer kisebb számítási igénye miatt is kedvezőbb választás lehet.

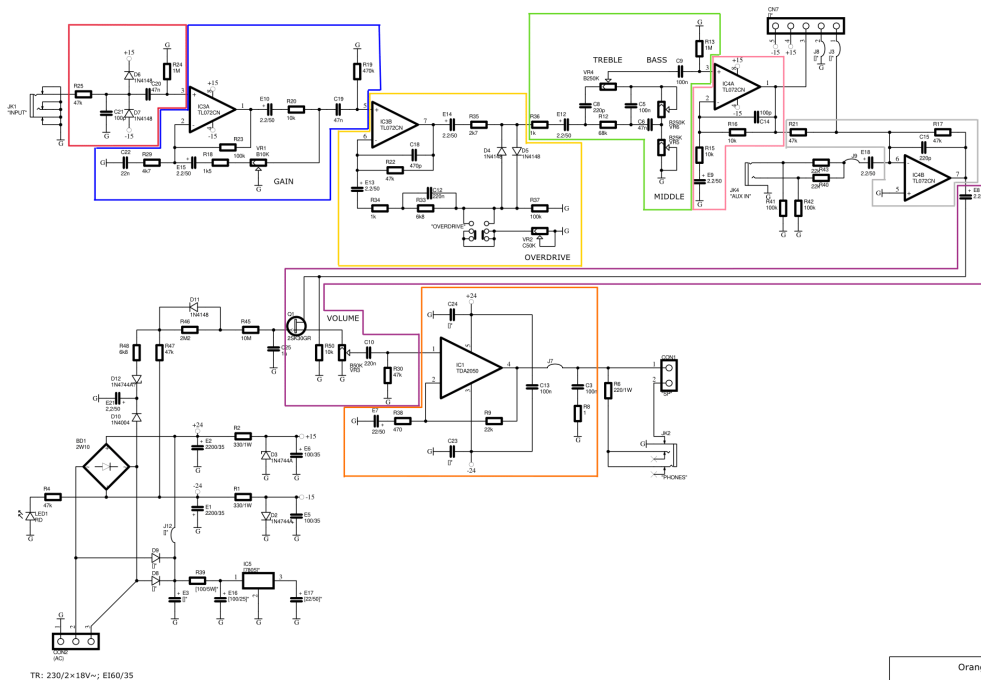
6. fejezet

Gitárerősítő modellezése

A K-módszer demonstrálása céljából az Orange Crush 20L gitárerősítő áramkörét választottam. A szimulációt először offline MATLAB környezetben valósítottam meg, ezután írtam meg a valós idejű plugint C++ programnyelven JUCE környezetben. Az áramkört az LTSpice segítségével teszteltem.

Ideális műveleti erősítőkkel számoltam a MATLAB-ban és a C++-ban programozott szimulációban ott, ahol a valóságnak megfelelő jel esetén nem tapasztaltam levágást. Ahol pedig tapasztaltam, ott egy egyszerű levágó algoritmussal modelleztem ezt a jelenséget [14]. A műveleti erősítők frekvenciafüggő átvitelétől és a slew rate-jétől eltekintettem, hiszen modellezésük ilyen komplex rendszer esetén nem fog nagy hangzásbeli különbséget eredményezni.

Az áramkört a műveleti erősítők bemeneténél és kimeneténél részekre bontottam, hiszen a műveleti erősítőnek nagyimpedanciás a bemenete és kisimpedanciás a kimenete, ami miatt az előtte lévő áramköri elemeket nem terheli meg, illetve az utána lévő áramkörök nem terhelik meg a műveleti erősítő köré épített részt. A szétválasztás a 6.1 ábrán látható.

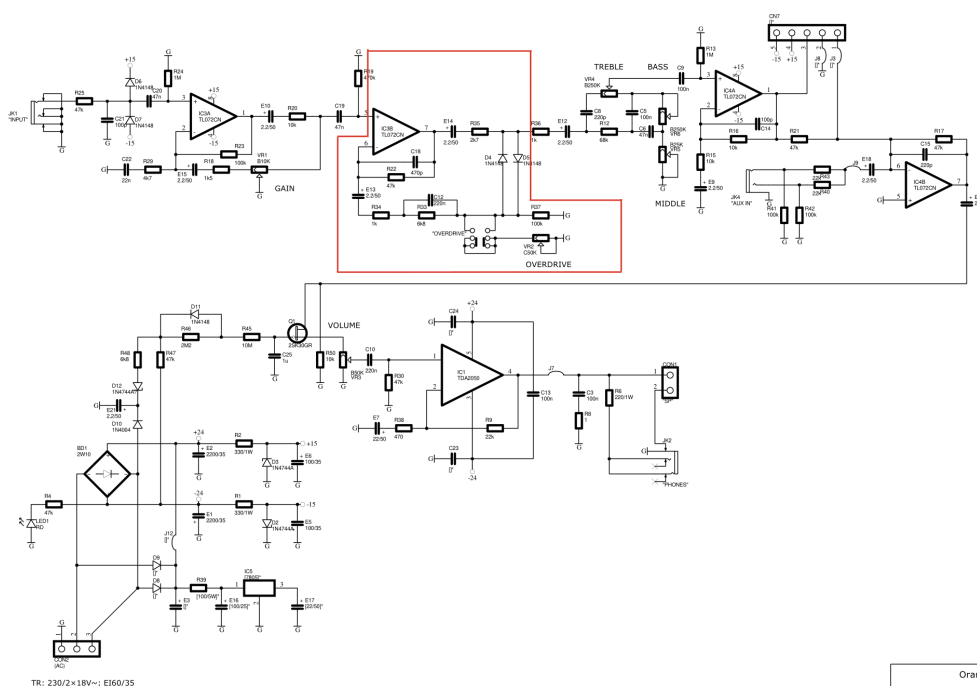


6.1. ábra. Az Orange Crush 20L erősítő áramköre részekre bontva

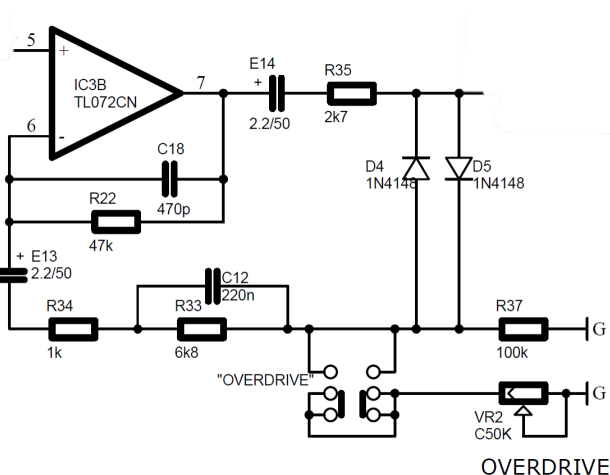
K-módszert használtam a torzító rész megvalósításához, hiszen abban található két dióda, ami miatt a részáramkör nem lineáris. A többi áramköri részt bilineáris transzformáció segítségével modelleztem. LTSpice szimuláció során az erősítő, a torzító és a végfokozat részénél a műveleti erősítő valóságnak megfelelő bemeneti jel esetén a kimenetén levágta a szaturációs feszültség szintjére a jelet, így ezeknél a részeknél megvalósítottam ezt a viselkedést egy egyszerű levágó algoritmussal [1, 14].

Ebben a fejezetben csak a torzító rész megvalósítását részletezem, a többi részáramkör megvalósításának részletezése az F.1 függelékben található.

6.1. A torzító rész megvalósítása K-módszerrel

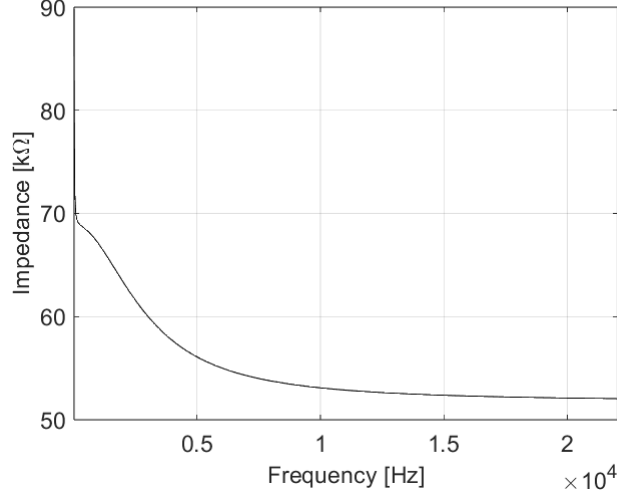


6.2. ábra. A torzító rész jelölve az erősítő áramkörén



6.3. ábra. A torzító rész áramköre. A nemlinearitást a két dióda okozza.

A torzító rész utáni áramkörreszt leválasztottam, és különböző részként kezeltem. Ezt azért tehettem meg, mert annak a bemeneti impedanciája sokkal nagyobb, mint a torzító rész kimeneti impedanciája, azaz a torzító rész feszültséggenerátorosan hajtja meg az utána következő részeket (ezt LTSpice-ban egy követő erősítő beiktatásával is teszteltem).



6.4. ábra. A torzító részt követő áramkör bemeneti impedanciája

A torzító rész modellezéséhez a K-módszert alkalmaztam, ahol a nemlinearitást a diódák okozták. Amikor csak a diódákat vettem a nemlineáris résznek, nem tudtam egyértelműen meghatározni a kimenetet. A problémát úgy oldottam meg, hogy az R_{35} soros ellenállást is bevontam a nemlineáris részbe, így tudtam létrehozni a táblázatot. Az áramra egy implicit egyenlet adódott, míg a feszültségre egy explicit, ezért a táblázatot a feszültség alapján generáltam.

$$f(u) = i = I_{S0} \sinh \frac{u - R_{35}i}{u_T} \quad (6.1)$$

$$f^{-1}(i) = u = u_T \sinh^{-1} \frac{i}{2I_{S0}} + R_{35}i \quad (6.2)$$

Ezután kiexportáltam a karakterisztikát ismét LTSpice-ból, és végül ezt használtam majd a végleges eredményhez.

Az állapotváltozós leírás alapján kiszámolt mátrixok:

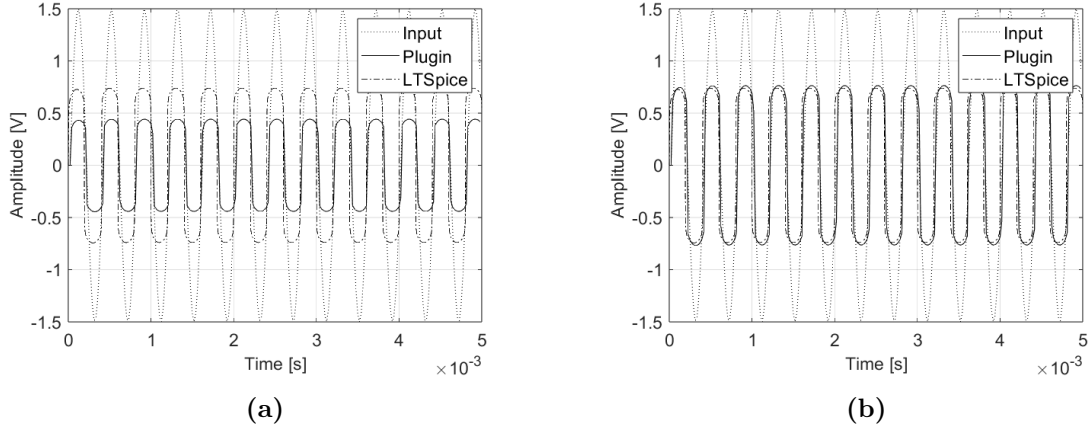
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{C_{12}(R_{37}+R_{34})} - \frac{1}{C_{12}R_{33}} & 0 & -\frac{1}{C_{12}(R_{37}+R_{34})} & 0 \\ \frac{1}{C_{18}(R_{37}+R_{34})} & -\frac{1}{R_{22}C_{18}} & \frac{1}{C_{18}(R_{37}+R_{34})} & 0 \\ -\frac{1}{E_{13}(R_{37}+R_{34})} & 0 & -\frac{1}{E_{13}(R_{37}+R_{34})} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{C_{12}(R_{37}+R_{34})} \\ \frac{1}{C_{18}(R_{37}+R_{34})} \\ -\frac{1}{E_{13}(R_{37}+R_{34})} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{R_{37}}{C_{12}(R_{37}+R_{34})} \\ -\frac{R_{37}}{C_{18}(R_{37}+R_{34})} \\ \frac{R_{37}}{R_{37}+R_{34}} \\ -\frac{1}{E_{14}} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -\frac{R_{37}}{R_{37}+R_{34}} & 1 & -\frac{R_{37}}{R_{37}+R_{34}} & 1 \end{pmatrix} \quad E = \frac{R_{34}}{R_{37}+R_{34}} \quad F = -\frac{R_{34}R_{37}}{R_{37}+R_{34}}$$

A (3.12), (3.13), (3.14), (3.19) egyenletekkel kiszámoltam a segédváltozókat, és a (3.32) lépései szerint programoztam be az algoritmust. Az általam számolt karakterisztikával ka-

pott eredmény a 6.5a ábrán, az LTSpice-ből kiexportált karakterisztikával kapott eredmény pedig a 6.5b ábrán látható.



6.5. ábra. A plugin és az LTSpice által adott válasz, 6.5a ábrán a (6.2) függvényt használva, és 6.5b ábrán az LTSpice-ből exportált karakterisztikát használva

A megvalósítás során kihívást jelentett az OVERDRIVE paraméter, hiszen minden egyes változásánál módosulnak a segédváltozók, azaz minden egyes paraméterváltozásnál újra ki kell számolni a (3.12), (3.13), (3.14), (3.19) egyenleteket, majd el kell végezni az $f(u)$ függvényre a lineáris transzformációt (hiszen függ K értékétől).

Az LTSpice szimuláció során észrevettem, hogy a műveleti erősítő kimenetén olyan feszültség szintek fordulhatnak elő valósághű bemenetek esetén, amelyeknél meghatározó lesz a műveleti erősítő szaturációs feszültség szintje, és le fogja vágni, ha afelé menne.

A levágást [1, 14] szerint valósítottam meg. Először ideális műveleti erősítővel szimuláltam az áramkört. Ha a műveleti erősítő kimeneténél nagyobb feszültséget tapasztaltam, mint az LTSpice szimulációból meghatározott szaturációs feszültséget, akkor kiszámoltam a szaturációs modell szerint is az új értékeket.

A szaturációs modell állapotváltozós leírása kifejezhető közvetlenül a (6.3) egyenletrendszerből: a gerjesztés a műveleti erősítő kimenetén lesz, ami a C_{18} kondenzátor feszültségével tér el az eredeti gerjesztéstől.

Az így kiszámolt állapotváltozós leírás:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{C_{12}(R_{37}+R_{34})} - \frac{1}{C_{12}R_{33}} & -\frac{1}{R_{22}C_{18}} - \frac{1}{C_{18}(R_{37}+R_{34})} & -\frac{1}{C_{12}(R_{37}+R_{34})} & 0 \\ \frac{1}{C_{18}(R_{37}+R_{34})} & -\frac{1}{E_{13}(R_{37}+R_{34})} & \frac{1}{C_{18}(R_{37}+R_{34})} & 0 \\ -\frac{1}{E_{13}(R_{37}+R_{34})} & 0 & -\frac{1}{E_{13}(R_{37}+R_{34})} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

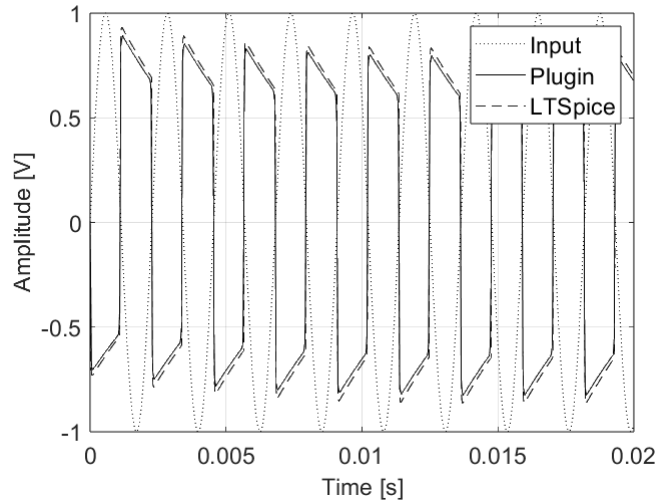
$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{C_{12}(R_{37}+R_{34})} \\ \frac{1}{C_{18}(R_{37}+R_{34})} \\ -\frac{1}{E_{13}(R_{37}+R_{34})} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{R_{37}}{C_{12}(R_{37}+R_{34})} \\ -\frac{R_{37}}{C_{18}(R_{37}+R_{34})} \\ \frac{R_{37}}{R_{37}+R_{34}} \\ -\frac{1}{E_{14}} \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -\frac{R_{37}}{R_{37}+R_{34}} & \frac{R_{37}}{R_{37}+R_{34}} & -\frac{R_{37}}{R_{37}+R_{34}} & 1 \end{pmatrix} \quad E = \frac{R_{34}}{R_{37}+R_{34}} \quad F = -\frac{R_{34}R_{37}}{R_{37}+R_{34}}$$

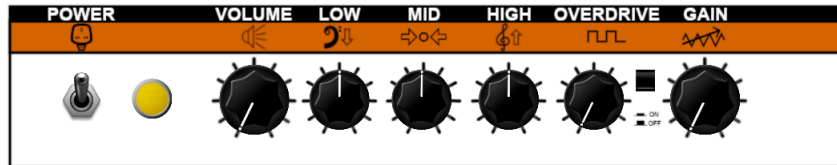
Az előre letárolt tömböm körülbelül 250 értékpárból állt, amelyek között lineárisan interpoláltam. Ez a tömbméret teljesen megfelelő volt az interpolálás mellett.

6.2. Eredmények

Az erősítő áramkör minden része elkészült, és a plugin többféle jelre vonatkozó tesztelésen esett át, amelyeket Spice szimulációkkal hasonlítottam össze. Az egyik összehasonlítás a 6.6 ábrán, az elkészült plugin felhasználói felülete a 6.7 ábrán látható.



6.6. ábra. Az elkészült plugin tesztelése és összehasonlítása Spice szimulációval. A GAIN és az OVERDRIVE paraméter maximumon van ennél az összehasonlításnál, a bemenő jel egy 440 Hz frekvenciájú szinuszos jel.



6.7. ábra. Az elkészült plugin felhasználói felülete

A plugin elkészítése során megszerzett tapasztalatok:

- A torzító részben, amelyet a K-módszerrel valósítottam meg, található egy OVERDRIVE paraméter, amelynek változása esetén mindig újra kell számolni a (3.12), (3.13), (3.14) és (3.19) segédváltozókat. Ezen felül az eredeti nemlineáris egyenletet újra lineárisan kell transzformálni, majd újra kell generálni a táblázatot a K-módszer futtatásához.
- Az összes paraméterváltozás esetén callback függvényt használtam, ami az új változók kiszámolása után egy SPSC FIFO-ba töltötte be a kiszámolt értékeket (nem volt szükség MPSC FIFO-ra, mert a callback függvény lefutása nem volt időhöz kötött).
- A K-módszerben először a `juce :: dsp :: Matrix < type >` előre megírt osztályt használtam a mátrixműveletek elvégzéséhez. Viszont ennek az osztálynak a használatával a plugin nem működött megfelelően, folyamatosan recsegő hangok voltak

hallhatóak a kimenet mellett. A saját mátrix osztályom megírása és használata után ez a probléma megoldódott.

- A tone stack résznél a sok paraméter miatt nagyon körülményes az átvitel felírása.
- A modell a valóságot szimulálja, így a valóság feszültség szintjei szerint kell a bemenő és a kimenő jelet értelmezni. Ezt úgy oldottam meg, hogy megmértem oszcilloszkóppal egy gitárjel maximum amplitúdóját, és ehhez képest skáláztam a bemenő jelet (körülbelül 0.5-1.5V). A kimenetre rakott feszültséglevágás miatt a kimenetet pedig csak egyszerűen leosztottam.
- A kimenetet előállító műveleti erősítőnek is figyelembe vettem a levágási frekvenciáját a kimenet egyszerűbb skálázása érdekében.
- A K-módszer táblázatába alaptól ≈ 250 pontpárt generáltattam le legelőször, és ez a mennyiség egyáltalán nem okozott problémát a futás közben. A táblázat elemei között elég volt lineárisan interpolálni, nem volt szükséges magasabb fokú interpolációra, hiszen a diódák nyitófeszültsége után már az ellenállás a meghatározóbb a nemlineáris függvényben.
- Szükség volt a torzítás okozta felharmonikusok miatt az interpoláció, majd decimálás megvalósítása az átlapolódás elkerülése érdekében.

7. fejezet

Eredmények, tapasztalatok, jövőbeli tervek

A dolgozat célkitűzése a K-módszer és más állapotteres módszerek kapcsolatának, hasonlóságainak és különbségeiknek feltárása, illetve összehasonlítása. Ezt a célt azért tűztam ki, mert nem találtam a hosszas irodalomkutatás alatt olyan cikket, amely részletesen összevetné a K-módszert a többi állapotteres módszerrel szemben, és érdekelt, ezek hogyan kapcsolódnak egymáshoz. Emellett a lehetséges alkalmazásterületeinek a kutatása, és egy bonyolult áramkörön való alkalmazás bemutatása is a célok közé tartozott. A kutatást sikeresnek találom, hiszen a felsorolt pontok közül minden megvalósult.

7.1. Összehasonlítás

A K-módszer összehasonlítása a leggyakoribb állapotteres módszerrel, a széleskörűen használt hátralépő Euler-módszerrel, megállapításra kerültek az alábbiak:

- A K-módszer számításigénye kevesebb, mint a hátralépő Euler-módszer számításigénye ($O(\log n F(n)) > O(n^2)$)
- A K-módszer kisebb számításigény mellett pontosabb, mint a hátralépő Euler-módszer (bilineáris transzformáció Euler-féle közelítéssel szemben)
- A K-módszer lehetőséget ad bármilyen polinom hányados használatára a derivált közelítéséhez
- A még kisebb számítási igény eléréséhez lehetőség van az előre kiszámolt tömb tárolásának optimalizálására

A K-módszer hátrányai a hátralépő Euler-módszerrel szemben:

- Ha az áramkörben találhatóak változtatható paraméterek, akkor minden egyes változásnál a K-módszer esetén le kell újra generálni az egyenletmegoldáshoz használt tömböt
- A K-módszer esetén a memóriában a futás során végig tárolni kell az offline legenerált tömböt
- Az offline generálás előtt meg kell vizsgálni a függvényt reális nagyságú bemenetekre, hogy a legenerált tömb értelmezési tartománya megfelelő nagyságú legyen

Így összességében elmondható, hogy az előrelépő Euler-módszer alkalmazása helyett javasolt K-módszert alkalmazni a pontosság javulása és a számítási igény csökkenése érdekében.

7.2. Különböző alkalmazási területek

A dolgozat több különböző tudományos területet is említ a K-módszer áramkörszimuláción túli alkalmazási lehetőségei kapcsán, ahol a K-módszer használata előnyösebb lehet a gyakran használt hátralépő Euler-módszerrel szemben.

Az említett területeken túl számos más tudományágban is széles körben alkalmazzák a hátralépő Euler-módszert differenciálegyenletek megoldására. Ezzel szemben használható a K-módszerben található levezetés alapján bilineáris transzformáció, ami szimulációk pontosabb eredményét okozzák.

Valós idejű szimulációk esetén különösen érdemes a K-módszert választani a hátralépő Euler-módszer helyett, mivel kevesebb számítási igénye van.

7.3. Az Orange Crush 20L erősítő valós idejű szimulálása K-módszerrel

A K-módszer demonstrálásához az Orange Crush 20L gitárerősítő áramkörét modelleztem VST3 környezetben a JUCE keretrendszer segítségével. Az erősítő minden része elkészült, és a Spice szimulációval összehasonlítva közel egyező az eredmény. Ez az összehasonlítás látható a 6.6 ábrán.

7.4. Jövőbeli tervek

- A K-módszer vizsgálata a derivált magasabb fokszámú közelítése esetén
- A K-módszer különböző változatainak vizsgálata (Nodal K-method, DK-method), majd összehasonlításuk a K-módszerrel
- Az állapotteres módszerektől különböző megközelítésű módszerek megismerése (Wave Digital Filter method, Wiener-Hammerstein method)
- Az állapotteres módszerek összehasonlítása egyéb módszerekkel (Wave Digital Filter method, Black-Box methods)
- A pluginban megvalósítani hangláda impulzusválaszának importálását *.wav* fájlformátumból
- Az interpoláló, majd decimáló osztály bővítése különböző függvények szerinti interpolációval (interpolálás Kaiser-ablakkal, illetve különböző fokszámú minimálfázisú szűrőkkel)

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani **Dr. Bank Balázsnak**, a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Mesterséges Intelligencia és Rendszertervezés Tanszék egyetemi docensének, a dolgozatom elkészítéséhez nyújtott motivációjáért és támogatásáért.

A heti rendszerességű személyes és online konzultációk jelentős mértékben hozzájárultak a cél eléréséhez, ötletei és tanácsai pedig mindig új perspektívákat nyitottak meg, ösztönözve a kitartó és lelkes munkára. Egyetlen általa ajánlott cikk vagy akár egy rövid megjegyzés is olyan útra terelt, amely folyamatosan rávilágított arra, milyen izgalmas új tudást felfedezni és elsajátítani.

Valószínűleg az ő segítségével ez a dolgozat nem jöhetett volna létre, és a kutatási munka sem valósulhatott volna meg.

Irodalomjegyzék

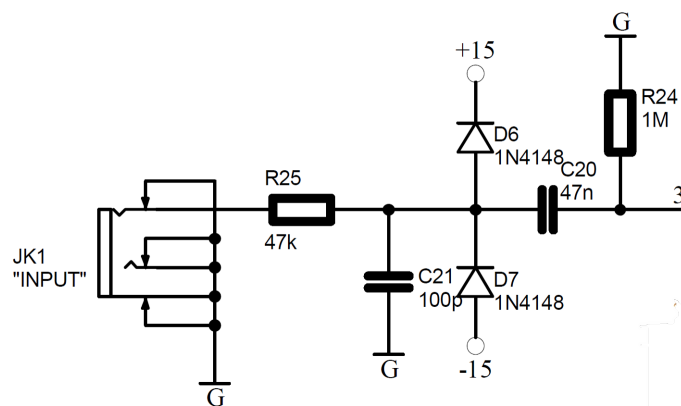
- [1] Khaled Abdelfattah–Behzad Razavi: Modeling op amp nonlinearity in switched-capacitor sigma-delta modulators. In *IEEE Custom Integrated Circuits Conference 2006* (konferenciaanyag). 2006, 197–200. p.
- [2] G. Borin–G. De Poli–D. Rocchesso: Elimination of delay-free loops in discrete-time models of nonlinear acoustic systems. In *Proceedings of 1997 Workshop on Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics* (konferenciaanyag). 1997, 4 pp.–. p.
- [3] Gianpaolo Borin: Metodi per la sintesi per modelli fisici, 1998.
- [4] Citizendium: Newton’s method — citizendium, 2009. URL https://citizendium.org/wiki/index.php?title=Newton%27s_method&oldid=19371.
- [5] J. E. Dennis–Robert B. Schnabel: *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. 1996, Society for Industrial and Applied Mathematics. URL <https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/1.9781611971200>.
- [6] Kevin D. Dorfman–Prodromos Daoutidis: *Numerical Methods with Chemical Engineering Applications*. Cambridge Series in Chemical Engineering sorozat. 2017, Cambridge University Press.
- [7] Andrés Granados: Implicit runge-kutta algorithm using newton-raphson method, 1998. 03.
- [8] Tianyun Liu–Chongbin Zhao–Qingbin Li–Li Zhang: An efficient backward euler time-integration method for nonlinear dynamic analysis of structures. *Computers & Structures*, 2012. 09.
- [9] David Medine: Dynamical systems for audio synthesis: Embracing nonlinearities and delay-free loops. *Applied Sciences*, 6. évf. (2016) 5. sz. ISSN 2076-3417. URL <https://www.mdpi.com/2076-3417/6/5/134>.
- [10] John Miller–David Edelman–John Appleby: *Numerical Methods for Finance*. 2007, Chapman and Hall/CRC Financial Mathematics Series. URL <https://www.routledge.com/Numerical-Methods-for-Finance/Miller-Edelman-Appleby/p/book/9780367388591>.
- [11] Rafael Paiva: Circuit modeling studies related to guitars and audio processing, 2013. 11.
- [12] Julius O. Smith: *Physical Audio Signal Processing*. 2010, <http://ccrma.stanford.edu/jos/pasp/>.
- [13] Zheng Tan, Delin; Chen: On a general formula of fourth order runge-kutta method. *Journal of Mathematical Science & Mathematics Education*, 7. évf. (2012) 2. sz.

- [14] Leete Timothy–Tarr Eric–Ko Doyuen: Non-ideal operational amplifier emulation in digital model of analog distortion effect pedal. *Journal of the Audio Engineering Society*, 2022. 05.
- [15] David Yeh–Jonathan Abel–Julius Smith: Simplified, physically-informed models of distortion and overdrive guitar effects pedals. *Proceedings of the 10th International Conference on Digital Audio Effects, DAFx 2007*, 2007. január.
- [16] David T. Yeh–Jonathan S. Abel–Julius O. Smith: Automated physical modeling of nonlinear audio circuits for real-time audio effects—part i: Theoretical development. *IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing*, 18. évf. (2010) 4. sz., 728–737. p.
- [17] David T. Yeh–Jonathan S. Abel–Andrei Vladimirescu–Julius O. Smith: Numerical methods for simulation of guitar distortion circuits. *Computer Music Journal*, 32. évf. (2008) 2. sz., 23–42. p. ISSN 01489267, 15315169.
URL <http://www.jstor.org/stable/40072629>.

Függelék

F.1. A további részáramkörök elemzése

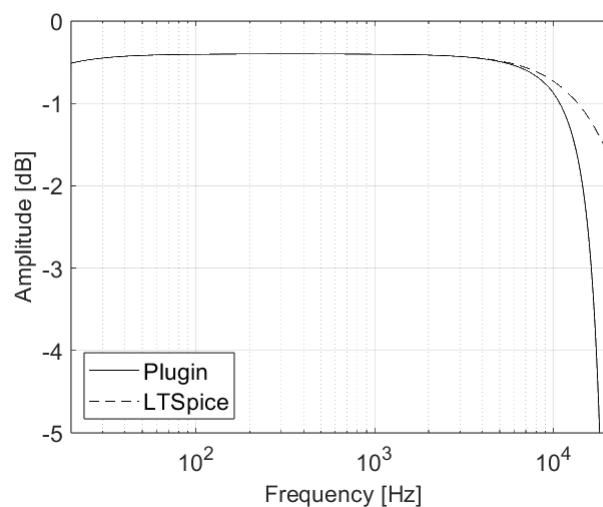
F.1.1. Bemeneti szűrő



F.1.1. ábra. A bemeneti szűrők

A bemeneti szűrő egy alul- és egy felüláteresztő RC szűrőből áll. A diódáknak védelmi célja van, hogy a műveleti erősítő bemenetére több feszültség kerüljön, mint a tápfeszültsége. Ezért a modellezésben elhanyagolom ezek hatását.

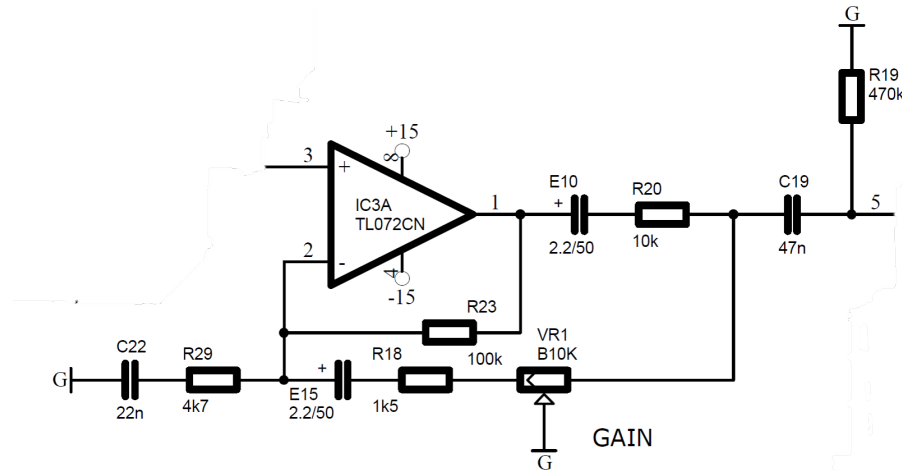
A hálózat bilineáris transzformációval modellezve és LTSpice szimulációval összehasonlítva a F.1.2 ábrán látható.



F.1.2. ábra. Az LTSpice szimuláció eredménye összehasonlítva a megvalósított szűrővel

A különbség a bilineáris transzformációnak köszönhető, hiszen egy bilineárisan transzformáció segítségével létrehozott diszkrét idejű rendszer átvitele a mintavételi frekvenciához közeli frekvenciákon jelentősen el tud térni az eredeti folytonos idejű rendszerétől a transzformáció frekvenciatorzítása miatt (2.10). Mint látható, hogy a frekvenciamenetek megegyeznek körülbelül 6 kHz-ig, és a 6 dB különbséget pedig jóval 18 kHz után éri el.

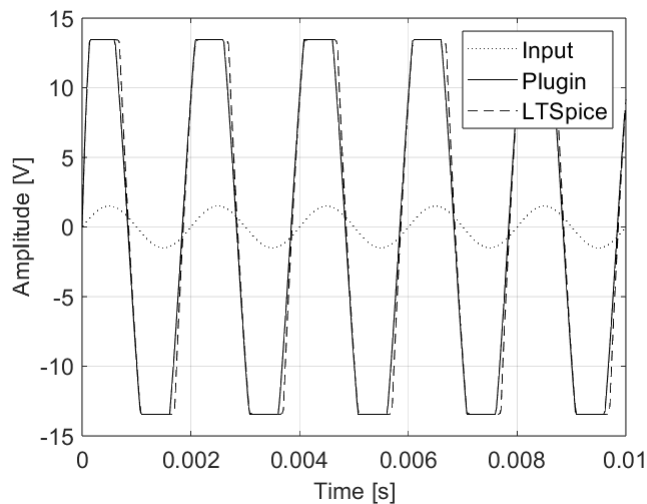
F.1.2. Erősítő rész



F.1.3. ábra. A bemeneti szűrők

A műveleti erősítő kimeneténél felbontottam az áramkört, először a műveleti erősítőt tartalmazó részt modelleztem, utána pedig a passzív hálózatot. Mind a két részt bilineáris transzformáció segítségével modelleztem.

LTSpice szimuláció segítségével megállapítottam, hogy a valóságnak megfelelő bemeneti jel esetén is a GAIN potméter adott állásaiban le fog vágni a műveleti erősítő a tápfeszültségénél.

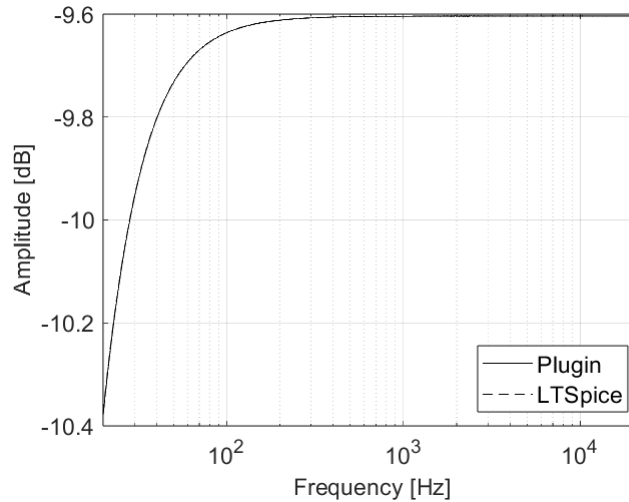


F.1.4. ábra. A műveleti erősítő válasza egy 500 Hz-es 1.5 V amplitúdós szinusz jelle

A F.1.4 ábrán lehet látni a jelalak minimálisan eltérését az általam megvalósított modell és az LTSpice szimuláció eredményétől. Ez annak köszönhető, hogy az LTSpice-

ban lévő műveleti erősítő modell a műveleti erősítő frekvenciafüggését és slew rate-jét is figyelembe veszi, illetve valószínűleg sokkal bonyolultabb karakterisztikát használ.

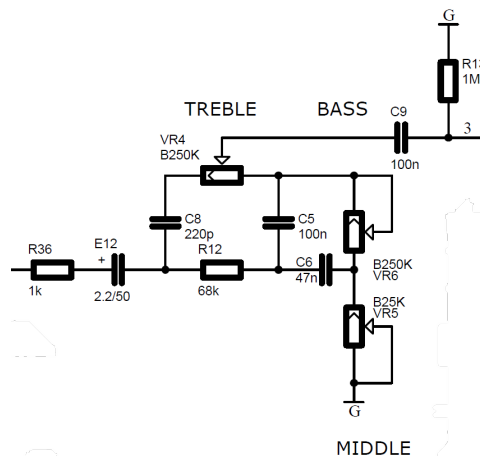
A műveleti erősítő levágását egyszerű levágó algoritmussal valósítottam meg [14, 1]. Eredetileg az ideális műveleti erősítőt tartalmazó modell fut, és ha annak a kimenete túllépné az LTSpice alapján meghatározott levágási feszültséget, akkor a szaturációs modellel visszaszámolom a bemenetet (ekkor a kimenete a levágási feszültség). A rendszeregyenlet segítségével egyszerűen visszaszámolható a bemenet, azt csak át kell rendezni $u[n]$ -re, $y[n]$ adott. Ezután a bufferekben ezek alapján kell frissíteni az értékeket.



F.1.5. ábra. A műveleti erősítő utáni passzív hálózat tesztelése. A GAIN potméter 5 k Ω értékre volt állítva.

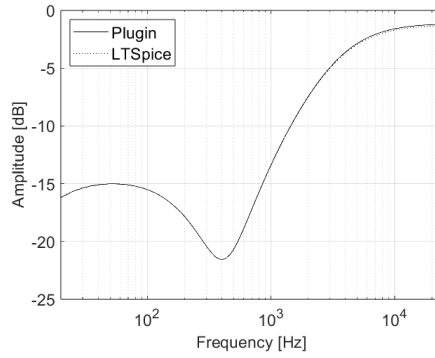
A passzív hálózat felüáteresztő jellege miatt a bilineáris transzformációval létrehozott modell jól követi a frekvenciamenetet, ez a F.1.5 ábrán látható.

F.1.3. Tone stack



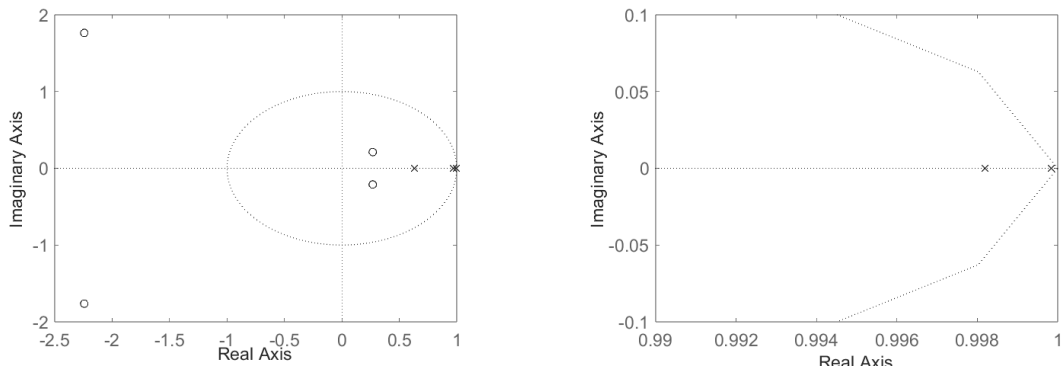
F.1.6. ábra. Az erősítő tone stack áramköre

Az erősítő tone stack részét is szintén bilineáris transzformáció segítségével modelleztem. Kihívást okozott a sok paraméter (itt három is van, BASS, MID, TREBLE, ráadásul a mintavételi idő is). Az eredmény a F.1.7 ábrán látható.



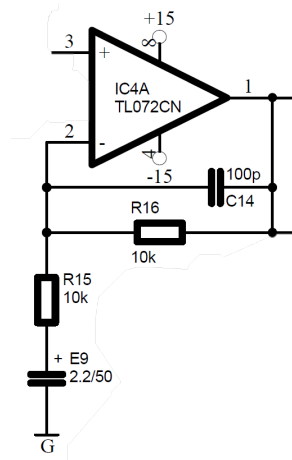
F.1.7. ábra. A tone stack áramkör rész átvitel (BASS 25 k Ω , MID 2.5 k Ω , TREBLE 25 k Ω)

A szűrőegység számításához nem adott elég nagy pontosságot a *float* típus, emiatt *double* típust kellett használnom. A transzformált rendszer néhány pólusa olyan közel volt az egységkörhöz, hogy a potméterek bizonyos állásainál a legközelebbi pólus az egységkörtől kívülre esett. Ezt a *double* típusban való tárolás megoldotta. Egy adott paraméterállítás esetén a pólusok elhelyezkedését mutatja a F.1.8 ábra.



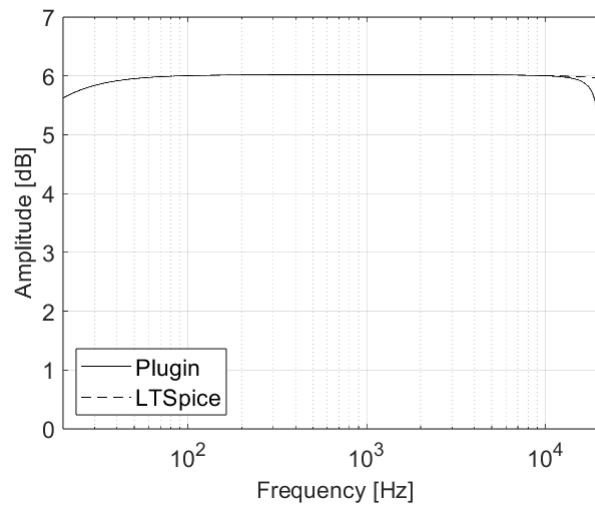
F.1.8. ábra. A bilineáris transzformáció segítségével meghatározott átviteli függvény zérusainak és pólusainak pozíciója a fent említett állású potencióméterek esetén

F.1.4. Aktív szűrő



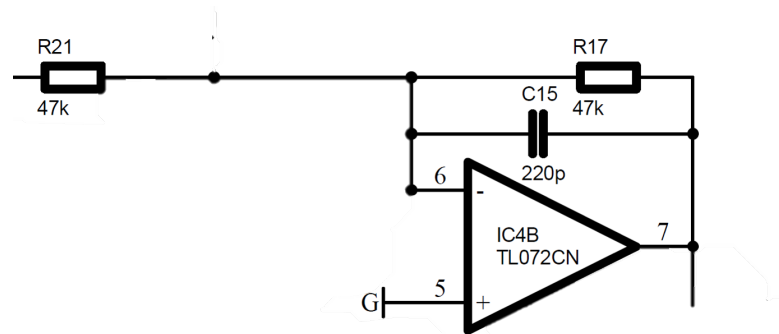
F.1.9. ábra. Az erősítő tone stack után lévő aktív szűrő áramkör

Egyszerű aktív szűrő, bilineáris transzformáció segítségével modelleztem. Célja az áramkörben, hogy a mély- és magas frekvenciakomponenseket kiszűrje. A bilineáris transzformáció miatt a mintavételi frekvenciákhoz közeli frekvenciákon nem pontos, hiszen a bilineáris transzformáció frekvenciatorzítást okoz magas frekvenciákon. Az eredmény a F.1.10 ábrán látható.



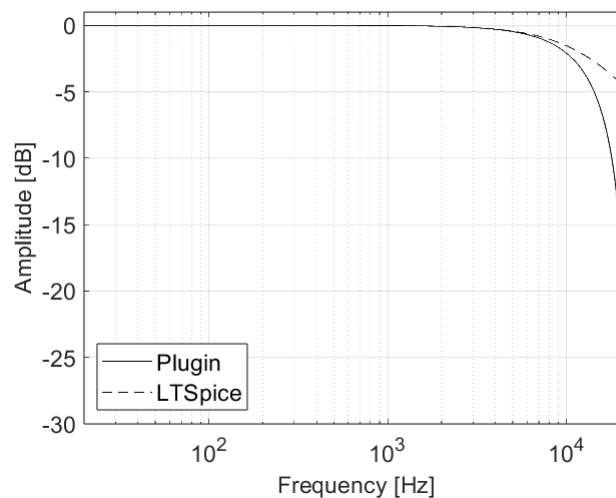
F.1.10. ábra. Az erősítő tone stack után lévő aktív szűrő áramkörének átvitele

F.1.5. Összeadó áramkör



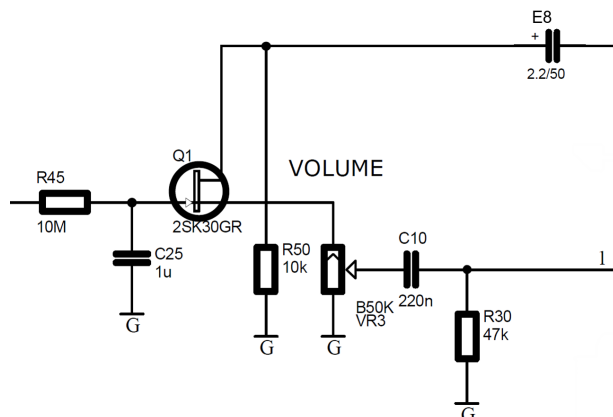
F.1.11. ábra. Az áramkör, ami az erősítő jack bemenetén beadott jelet összeadja az erősítő jelével

Ez az áramköri rész azért felel, hogy az erősítőbe jack csatlakozón beadott jelet összeadja az erősítő jelével. Mivel a jack csatlakozón beadott jelet nem akarjuk módosítani, ezért minden hangszínváltoztatás és torzítás után van ez az áramkör. Az erősítése egységnyi, és egy aluláteresztő szűrőt valósít meg, hogy a jack bemenetről bejövő nagy frekvenciájú komponenseket kiszűrje. Bilineáris transzformáció segítségével modelleztem. Az eredmény a F.1.12 ábrán látható.



F.1.12. ábra. Az áramkör, ami az erősítő jack bemenetén beadott jelet összeadja a gitár jelével

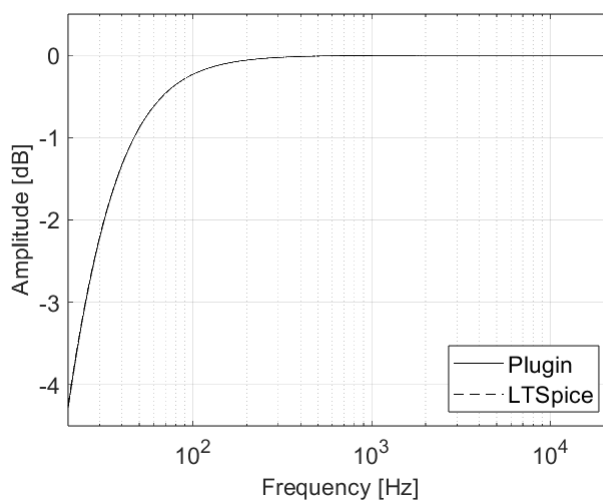
F.1.6. Hangerőszabályozó



F.1.13. ábra. Az erősítő hangerőszabályzó áramköre

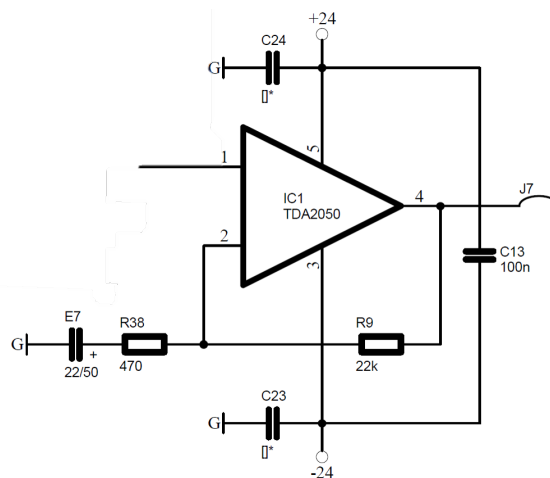
Az áramkörben lehet látni egy MOSFET tranzisztort a hangerőszabályzó potméter előtt. Ez a tranzistor a végfokozat védelmét biztosítja. A MOSFET gate elektródáján lévő $1\mu F$ kapacitású kondenzátor lassan fog feltöltődni az előtte található $10\text{ M}\Omega$ -os ellenálláson. Miután feltöltődött teljesen, utána a MOSFET gate-jén konstans feszültség lesz (nyitva lesz), és az impedanciája az alapján fog változni, amennyi feszültség esik rajta. Ez $\text{m}\Omega$ nagyságrendekben lesz, ami elhanyagolható az utána lévő $10\text{ k}\Omega$ -os osztó miatt.

A részáramkört szintén bilineáris transzformáció segítségével modelleztem. Az eredmény a F.1.14 ábrán látható.



F.1.14. ábra. A részáramkör átvitele a (VOLUME $10\text{ k}\Omega$)

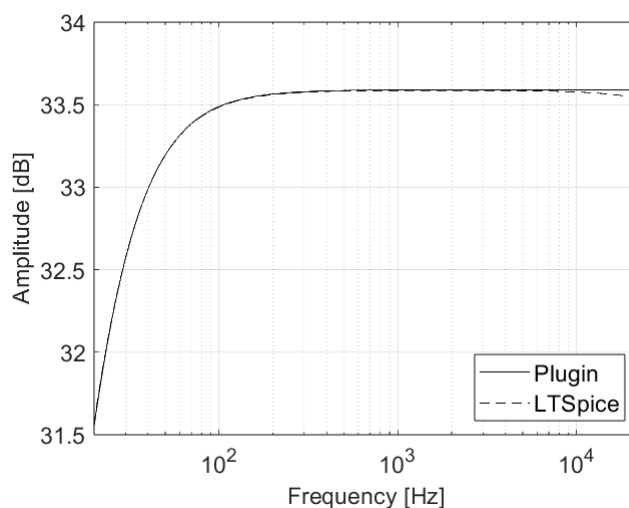
F.1.7. Végfokozat



F.1.15. ábra. Az erősítő kimenő fokozatának áramköre

Ez az áramköri rész gondoskodik az erősítő jelének olyan szintre való felerősítéséről, hogy azt közvetlenül a hangszóróra lehessen vezetni. A műveleti erősítő tápján lévő kondenzátorok feladata a tápfeszültség stabilizálása, hogy védelmet nyújtsanak mind a közös módusú, mind a differenciál módusú zavarok ellen. Az E_7 kondenzátornak köszönhetően az átvitelnek felüláteresztő jellege lesz, hogy a hangszóróra ne kerüljön nagyon alacsony frekvenciás jel.

Ezt az áramköri részt is bilineáris transzformáció segítségével modelleztem. Az eredmény a F.1.16 ábrán látható. A műveleti erősítő levágását egy egyszerű levágó algoritmus-sal [14, 1], hogy könnyebben tudjam a plugin hangerőszintjeit skálázni (megfelelő legyen digitális szinteknek).



F.1.16. ábra. Az erősítő kimenő fokozatának áramköre

A nagy frekvenciáknál az LTSpice szimuláció és az én megvalósításom között valószínűleg azért észlelhető különbség, mert az LTSpice nem ideális műveleti erősítő modellt alkalmaz. Magas erősítéseknél az átvitel frekvenciafüggővé válik, ami elhanyagolható eltéréseket okozhat a szimulált és a megvalósított rendszer között.