

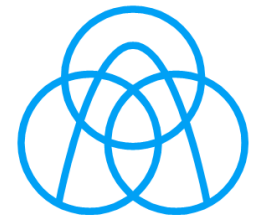
Identifikációs algoritmusok vizsgálata modális analízisben

MSc Önálló laboratórium 2 beszámoló

Készítette: Horváth Kristóf

Konzulens: Dr. Orosz György
Kimpfán Tibor

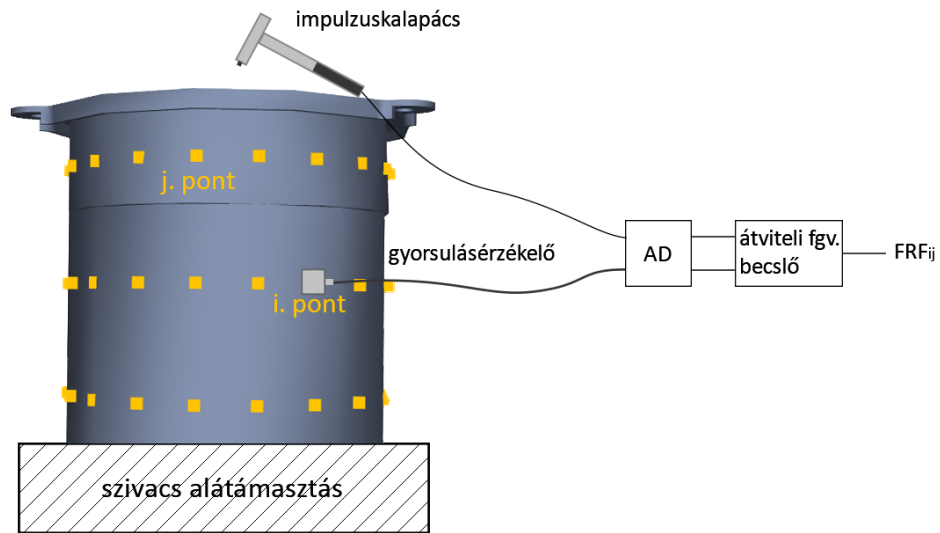
engineering.tomorrow.together.



thyssenkrupp

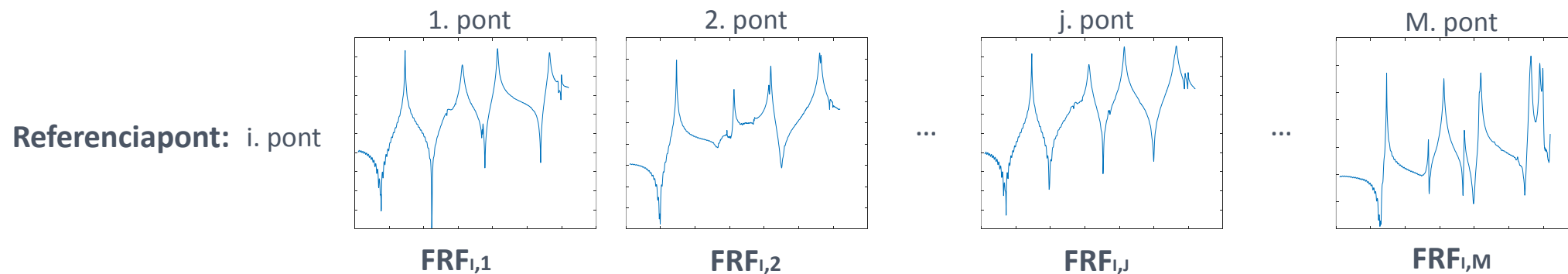
Kísérleti móduselemzés

- A mérés menete:



- A mért átvitelek (frekvenciaválasz-függvények – FRF):

Gerjesztési pontok:



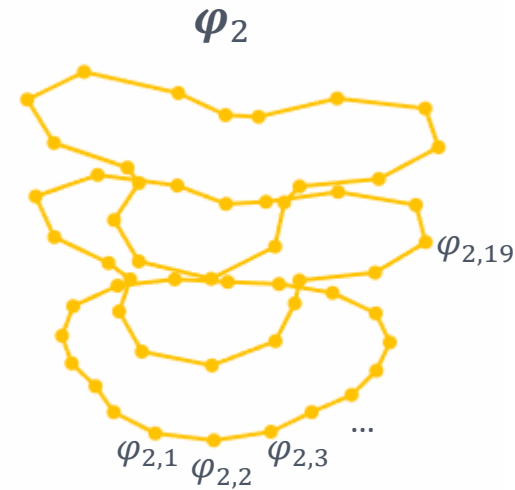
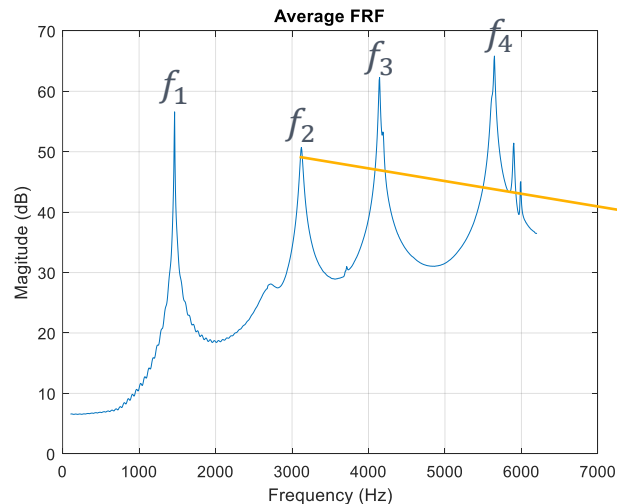
Kísérleti móduselemzés

- Cél a mért FRF_{ij} átvitelekéből a rendszer módusainak a meghatározása $H_{ij}(s)$ illesztésével

$$H_{ij}(s) = \frac{\sum_{k=0}^m a_{ijk} s^k}{\sum_{k=0}^n b_k s^k} = \sum_{k=1}^D \left(\frac{r_{ijk}}{(s - \lambda_k)} + \frac{r_{ijk}^*}{(s - \lambda_k^*)} \right), \quad r_{ijk} = \alpha_k \varphi_{ik} \varphi_{jk}, \quad \lambda_k = \sigma_k + j2\pi f_k$$

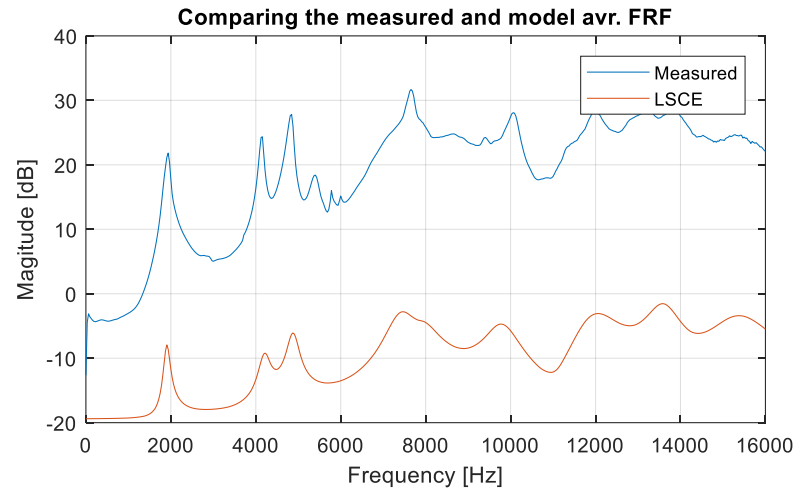
- f_k sajátfrekvenciák
 - σ_k csillapítási együtthatók
 - φ_k módusalakok
- Modális paraméterek

- Példa a motorházra:

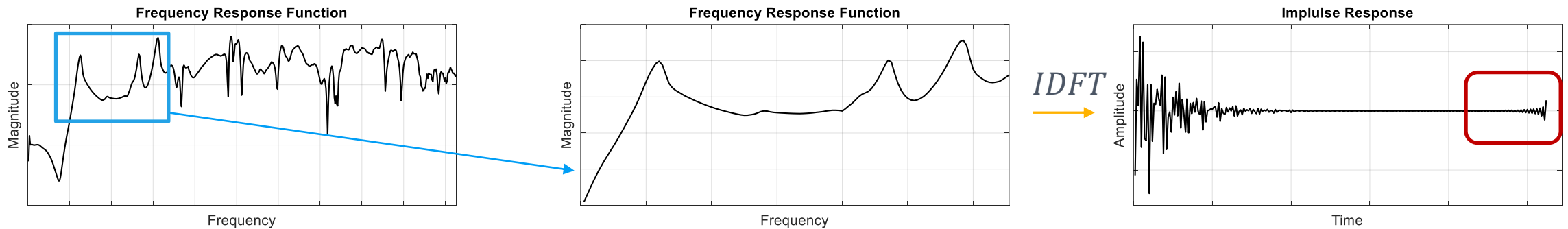


Önálló laboratórium 1: LSCE algoritmus

- Szorosan csatolt rendszerek esetén pontatlan illesztést ad



- A vizsgálandó frekvenciatartomány kiválasztására rosszul reagál: időtartományban szivárgás léphet fel



RFP algoritmus (Rational Fraction Polynomials)

- Frekvenciatartománybeli algoritmus (nincs szükség IDFT-re)

Illesztendő modell

Mért átvitel

$$H_m(j\omega_i) = \frac{a_0 + a_1(j\omega_i)^1 + \dots + a_m(j\omega_i)^m}{b_0 + b_1(j\omega_i)^1 + \dots + b_n(j\omega_i)^n} \longleftrightarrow FRF_{m,i} = h_i$$

- Hibakritérium: $e_i = \frac{a_0 + a_1(j\omega_i)^1 + \dots + a_m(j\omega_i)^m}{b_0 + b_1(j\omega_i)^1 + \dots + b_n(j\omega_i)^n} - h_i$
- Módosított hibakritérium $e_i = \underbrace{a_0 + a_1(j\omega_i)^1 + \dots + a_m(j\omega_i)^m}_{\text{P}} - \underbrace{h_i(b_0 + b_1(j\omega_i)^1 + \dots + b_{n-1}(j\omega_i)^{n-1})}_{\text{T}} - \underbrace{h_i(j\omega_i)^n}_{\text{w}}$
- Mátrixos elrendezés: $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix} = \mathbf{P}\mathbf{a} - \mathbf{T}\mathbf{b} - \mathbf{w}$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & j\omega_1 & (j\omega_1)^2 & \dots & (j\omega_1)^m \\ 1 & j\omega_2 & (j\omega_2)^2 & \dots & (j\omega_2)^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & j\omega_N & (j\omega_N)^2 & \dots & (j\omega_N)^m \end{bmatrix} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} h_1 & h_1(j\omega_1) & h_1(j\omega_1)^2 & \dots & h_1(j\omega_1)^{n-1} \\ h_2 & h_2(j\omega_2) & h_2(j\omega_2)^2 & \dots & h_2(j\omega_2)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_N & h_N(j\omega_N) & h_N(j\omega_N)^2 & \dots & h_N(j\omega_N)^{n-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} h_1(j\omega_1)^n \\ h_2(j\omega_2)^n \\ \vdots \\ h_N(j\omega_N)^n \end{bmatrix}$$



RFP algoritmus – a hiba minimalizálása

- Négyzetes hibakritérium: $J = (\mathbf{E}^*)^t \mathbf{E} = ((\mathbf{P}\mathbf{a} - \mathbf{T}\mathbf{b} - \mathbf{w})^*)^t (\mathbf{P}\mathbf{a} - \mathbf{T}\mathbf{b} - \mathbf{w})$
- $\frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}} = 2(\mathbf{P}^*)^t \mathbf{P}\mathbf{a} - 2\text{Re}((\mathbf{P}^*)^t \mathbf{T}\mathbf{b}) - 2\text{Re}((\mathbf{P}^*)^t \mathbf{w}) = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \underbrace{(\mathbf{P}^*)^t \mathbf{P}}_{\mathbf{Y}} \mathbf{a} - \underbrace{\text{Re}((\mathbf{P}^*)^t \mathbf{T})}_{\mathbf{X}} \mathbf{b} = \underbrace{\text{Re}((\mathbf{P}^*)^t \mathbf{w})}_{\mathbf{g}}$
- $\frac{\partial J}{\partial \mathbf{b}} = 2(\mathbf{T}^*)^t \mathbf{T}\mathbf{b} - 2\text{Re}(\mathbf{T}^t \mathbf{P}^* \mathbf{a}) - 2\text{Re}((\mathbf{T}^*)^t \mathbf{w}) = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \underbrace{-\text{Re}(\mathbf{T}^t \mathbf{P}^*)}_{\mathbf{X}_t} \mathbf{a} + \underbrace{(\mathbf{T}^*)^t \mathbf{T}}_{\mathbf{Z}} \mathbf{b} = \underbrace{\text{Re}((\mathbf{T}^*)^t \mathbf{w})}_{\mathbf{f}}$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y} & | & \mathbf{X} \\ - & | & - \\ \mathbf{X}^t & | & \mathbf{Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ - \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ - \\ \mathbf{f} \end{bmatrix}$$

- Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ innen már kiszámítható lenne de a többnyire numerikusan instabil az egyenletrendszer



RFP algoritmus – ortogonális polinomok

- A modellben $(j\omega_i)^k$ helyett legyen $\phi_k(j\omega_i)$ a számlálóban és $\theta_k(j\omega_i)$ a nevezőben
- Ortogonalitás
$$\sum_{i=1}^N \phi_k^*(j\omega_i) w_{\phi,i} \phi_j(j\omega_i) = \begin{cases} 0, k \neq j \\ 0.5, k = j \end{cases}$$
- $\phi_k(j\omega_i)$ és $\theta_k(j\omega_i)$ generálása Forsythe algoritmussal

Illesztendő modell	$\longleftrightarrow$	Mért átvitel
$H_m(j\omega_i) = \frac{c_0 + c_1\phi_1(j\omega_i) + \dots + c_m\phi_m(j\omega_i)}{d_0 + d_1\theta_1(j\omega_i) + \dots + \theta_n(j\omega_i)}$		FRF_m

- Innen a lépések ugyanazok: $\mathbf{E}$ hibakritérium vektor felírása, J négyzetes hibakritérium minimalizálása, kompakt mátrixos alak felírása $\rightarrow$

$$\mathbf{c} = \mathbf{g} - \mathbf{X}\mathbf{d}$$
$$(\mathbf{I} - \mathbf{X}^t\mathbf{X})\mathbf{d} = -\mathbf{X}^t\mathbf{g}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{M}_a\mathbf{c}$$
$$\mathbf{b} = \mathbf{M}_b \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ 1 \end{bmatrix}$$



RFP algoritmus – globális pólusok

$$H_{ij}(s) = \frac{\sum_{k=0}^m a_{ijk} s^k}{\sum_{k=0}^n b_k s^k} = \sum_{k=1}^D \left(\frac{r_{ijk}}{(s - \lambda_k)} + \frac{r_{ijk}^*}{(s - \lambda_k^*)} \right)$$

- A $\lambda_k = \sigma_k + j2\pi f_k$ pólusok a teljes mért rendszerre mindenhol helytől függetlenül azonosak
- A pólusok a modell nevezőjében találhatók
- Tehát a pólusok a ***b*** együtthatókból számíthatók ki
- A ***b*** kiszámításánál minden mért M darab FRF-et **egyszerre** kell figyelembe venni

$$(I - X^t X) \mathbf{d} = -X^t \mathbf{g} \quad \longrightarrow \quad \left. \begin{array}{l} \mathbf{U}_m \mathbf{d} = \mathbf{v}_m \\ \mathbf{b} = \mathbf{M}_b \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \longrightarrow \mathbf{U}'_m \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{v}'_m$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}'_1 \\ - \\ \mathbf{U}'_2 \\ - \\ \vdots \\ - \\ \mathbf{U}'_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}'_1 \\ - \\ \mathbf{v}'_2 \\ - \\ \vdots \\ - \\ \mathbf{v}'_M \end{bmatrix}$$



RFP algoritmus – lokális reziduumok

$$H_{ij}(s) = \frac{\sum_{k=0}^m a_{mk} s^k}{\sum_{k=0}^n b_k s^k} = \sum_{k=1}^D \left(\frac{r_{mk}}{(s - \lambda_k)} + \frac{r_{mk}^*}{(s - \lambda_k^*)} \right)$$

- A $r_{ijk} = \alpha_k \varphi_{ik} \varphi_{jk}$ reziduumok tartalmazzák a módusalak értékét a j -edik mérési pontban, így ez az együttható helyfüggő
- A reziduumok a modell számlálójában találhatóak
- Tehát a reziduumok az $\mathbf{a}$ együtthatókkal állnak kapcsolatban
- Ezért az m -edik mért FRF-re illesztett modellek $\mathbf{a}_m$ együtthatói eltérőek lesznek, külön kell őket számolni

$$h_{i,m} = \frac{\sum_{k=0}^p c_{k,m} \phi_k(j\omega_i)}{\sum_{k=0}^n b_k(j\omega_i)^k} \quad z_{i,k} = \frac{\phi_k(j\omega_i)}{\sum_{k=0}^n b_k(j\omega_i)^k} = \frac{\phi_k(j\omega_i)}{g_i}$$

$$\begin{bmatrix} h_{1,m} \\ h_{2,m} \\ \vdots \\ h_{N,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{1,0} & \cdots & z_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{N,0} & \cdots & z_{N,p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{0,m} \\ c_{1,m} \\ \vdots \\ c_{p,m} \end{bmatrix}$$

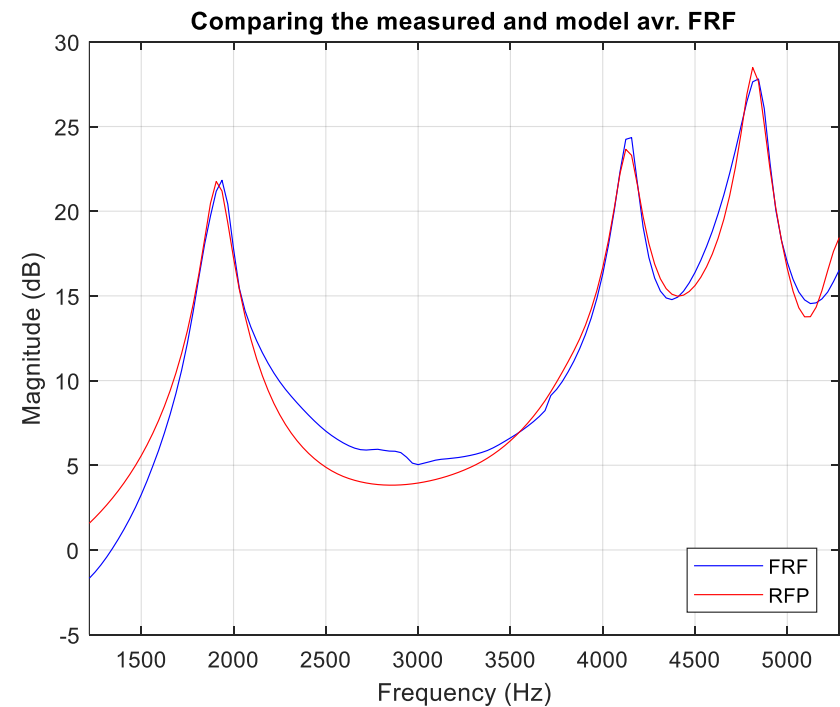
$$\mathbf{h}_m = \mathbf{Z} \mathbf{c}_m$$

$$\mathbf{a}_m = \mathbf{M}_a \mathbf{c}_m$$



Alkalmazási példa: RFP és LSCE összehasonlítása

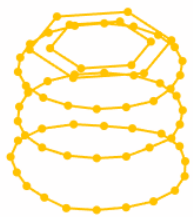
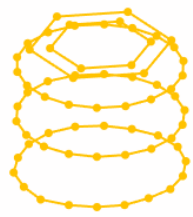
RFP algoritmus



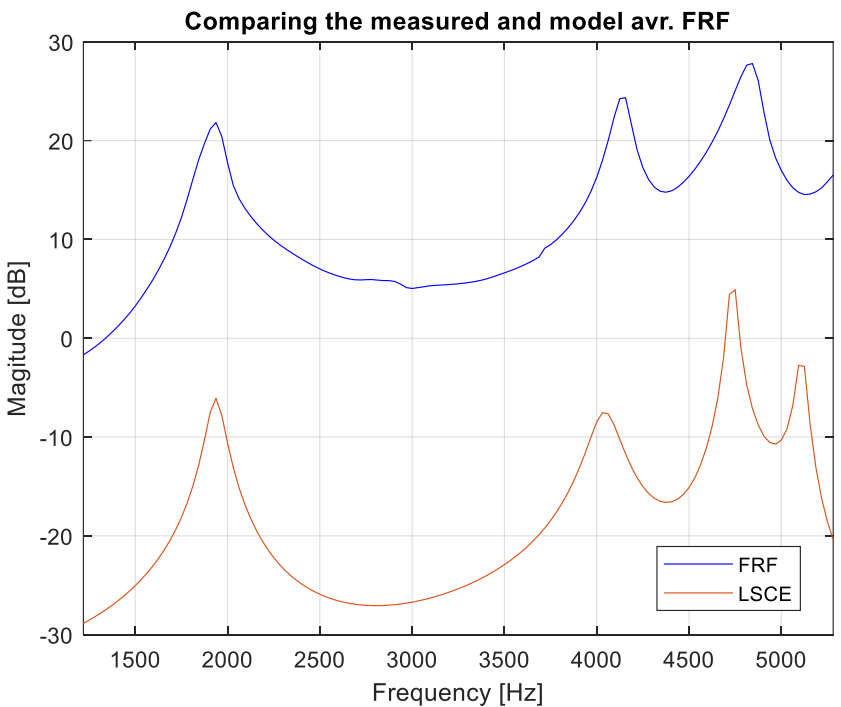
1912 Hz

4134 Hz

4821 Hz



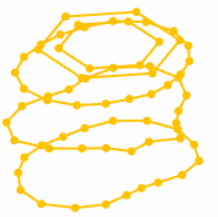
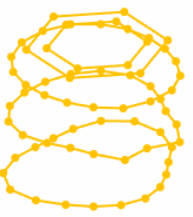
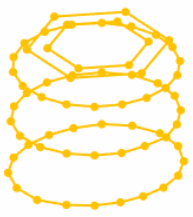
LSCE algoritmus



1936 Hz

4042 Hz

4735 Hz



Köszönöm a figyelmet!

