



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Villamosmérnöki és Informatikai Kar

Méréstechnika és Információs Rendszerek Tanszék

Adatvesztési modellek vizsgálata idő- és frekvenciatartományban

TDK-dolgozat

Készítette:
Palkó András

Konzulens:
Dr. Sujbert László

Köszönetnyilvánítás

A dolgozatban bemutatott kutatás az Európai Unió támogatásával, az Európai Regionális Fejlesztési Alap társfinanszírozásával valósult meg (EFOP-3.6.2-16-2017-00013).

Tartalomjegyzék

1. Bevezető	5
2. Az adatvesztés matematikai leírása	7
2.1. Az adatvesztési probléma	7
2.2. Alapfogalmak	8
3. Adatvesztési modellek	11
3.1. Áttekintés	11
3.2. Véletlen független adatvesztés	14
3.3. Blokkos, független adatvesztés	15
3.4. Kétállapotú Markov-lánc alapú adatvesztés	16
3.5. Gilbert-modell	18
3.5.1. Komplementer Gilbert-modell	20
3.6. Gilbert–Elliot-modell	22
3.7. Általános blokkalapú adatvesztés	24
3.8. A modellek összehasonlítása	25
4. Vizsgálat a frekvenciatartományban	29
4.1. A Gilbert–Elliot-modell spektruma	29
4.1.1. Az ekvivalens Markov-lánc	30
4.1.2. Képlet a spektrumra - folytonos időben	31
4.1.3. Visszatérés a diszkrét időbe	32
4.1.4. Szimulációs ellenőrzés	33
4.1.5. Diskusszió	33
4.2. Az egyszerűbb modellek spektruma	35
5. Adatvesztési modellek identifikációja	37
5.1. A Gilbert–Elliot-modell egyértelműsége	37
5.2. Egyes modellek identifikációs lehetőségei	38
5.2.1. A blokkos adatvesztés kezelése	39

5.2.2.	A Gilbert–Elliot-modell identifikációja	39
5.2.3.	A Gilbert- és a komplementer Gilbert-modellek identifikációja	40
5.2.4.	A kétállapotú Markov-modell és a véletlen független adatvesztés identifikációja	41
5.2.5.	Véletlen független, kétállapotú Markov-, Gilbert- és komplementer Gilbert-modellek identifikációs eljárása	42
5.2.6.	Magasabbrendű Markov-modellek identifikációja	43
6.	Mérési eredmények	45
6.1.	Adatátvitel UDP-s kapcsolaton	45
6.1.1.	A mérési elrendezés	45
6.1.2.	Mérési eredmények	48
6.2.	Adatátvitel Skype segítségével	54
6.2.1.	A mérési elrendezés	55
6.2.2.	Mérési eredmények	56
6.3.	Rádiós kommunikáció mérése	57
7.	Összefoglalás, kitekintés	59
A.	A Gilbert–Elliot-modell időtartománybeli levezetései	63
A.1.	Megbízhatósági függvények	63
A.1.1.	Speciális esetek	65
A.1.2.	A \mathbf{P}^k mátrix levezetése	65
A.2.	Teljes és üres sorozatok várható hossza	66
A.2.1.	Speciális esetek	67
B.	A Gilbert–Elliot-modell spektrumának paraméterei	69

Ábrák jegyzéke

3.1. Véletlen független adatvesztés indikátorfüggvénye, $a = 0.9$	14
3.2. Blokkos független adatvesztés indikátorfüggvénye, $a = 0.9, M = 10$	15
3.3. Kétállapotú Markov-lánc	16
3.4. Kétállapotú Markov-lánc alapú adatvesztés	17
3.5. Kétállapotú Markov-lánc alapú adatvesztés indikátorfüggvénye, $p = 0,05,$ $q = 0,2$	17
3.6. Gilbert-modell	18
3.7. Gilbert-modell indikátorfüggvénye, $p = 0,05, q = 0,2, b = 0,1$	19
3.8. Komplementer Gilbert-modell	20
3.9. Komplementer Gilbert-modell indikátorfüggvénye, $p = 0,05, q = 0,2, a = 0,9$	21
3.10. Gilbert-Elliot-modell	22
3.11. Gilbert–Elliot-modell indikátorfüggvénye, $p = 0,05, q = 0,2, a = 0,9, b = 0,1$	23
3.12. A vizsgált nem blokkos adatvesztési modellek közötti kapcsolatok	26
3.13. A vizsgált nem blokkos adatvesztési modellek kontextusa	27
4.1. Markov-lánc vezérelte jel	29
4.2. Ekvivalens hierarchikus modell	30
4.3. Ekvivalens Markov-lánc	31
4.4. A szimulált és az elméleti spektrumok különbsége, $N = 256, M = 10000$. .	33
4.5. A Gilbert–Elliot-modell spektrumának lehetséges alakjai, a görbék színe y függvénye	34
4.6. Az a paraméter hatása, a görbék színe a függvénye, $p = 0,2, q = 0,1, b = 0,7$	34
5.1. Véletlen független, kétállapotú Markov-, Gilbert- és komplementer Gilbert- modellek identifikációs eljárása	43
5.2. Magasabbrendű Markov-modellek identifikációs eljárása	44
6.1. UDP-s mérési elrendezés	45
6.2. Hálózati paraméterek összehasonlítása	48
6.3. Példa egy sikertelenül identifikált menet üres sorozatainak eloszlására	54

6.4. Az előző példához tartozó indikátorfüggvény DFT-je	55
6.5. A Skype-os mérési elrendezés	55

Táblázatok jegyzéke

3.1. A véletlen független adatvesztés paraméterei	14
3.2. A blokkos, független adatvesztés paraméterei	15
3.3. A kétállapotú Markov-lánc alapú adatvesztés paraméterei	16
3.4. A Gilbert-modell paraméterei	18
3.5. A komplementer Gilbert-modell paraméterei	20
3.6. A Gilbert–Elliot-modell paraméterei	22
3.7. Adatvesztési modellek összehasonlítása	25
6.1. Az UDP-s mérések paramétertere	46
6.2. Az UDP-s méréseknél használt rövidítések és kifejezések jelentése	46
6.3. Az UDP-s mérések paraméterei	47
6.4. Az UDP-s menetek első identifikációjának összesített eredményei	49
6.5. Az UDP-s menetek második identifikációjának eredményei	50
6.6. Az UDP-s menetek harmadik identifikációjának eredményei	51
6.7. Az UDP-s menetek második identifikációjának szűrt eredményei	52
6.8. Az UDP-s menetek harmadik identifikációjának szűrt eredményei	53
6.9. A Skype-os mérések összeállításai	56
6.10. A Skype-os mérések identifikációjának eredményei	57
6.11. A mote-os mérések identifikációjának eredményei	58
6.12. A mote-os mérések identifikációjának eredményei, lazított feltételekkel	58

Kivonat

Világunkban egyre növekszik a technológia szerepe, manapság az egyik fő irányvonal a minél többféle tevékenység digitalizálása, elektronikus úton való elvégzése, felügyelete, irányítása. Ezzel párhuzamosan történik a „dolgok internete” (Internet of Things, IoT) és a „minden internete” (Internet of Everything, IoE) kialakulása. Ezért egyre többet és többet kommunikálunk, mind mi emberek, mind az eszközeink.

A kommunikáció sohasem tökéletes, például egy rádióadást valamilyen elektromágneses interferencia miatt hibásan veszünk, vagy egy számítógépes hálózati kapcsolat túlterhelődik, és emiatt csomagok vesznek el. Lehetséges, hogy a hiba nem a kommunikációs csatornából adódik, szinkronizációs probléma miatt az átvitt jelet a két fél máshol mintavételezheti, kimaradhatnak, megduplázódhatnak bitek. Előfordulhat, hogy az alkalmazott algoritmus dönt úgy, hogy az adott adatot eldobja, mert nem tudná (időben) kezelni. Lehet az adatvesztés oka valamilyen külső körülmény, például egy elektromos hálózatra kapcsolt mérőeszköz esetén egy hosszabb idejű feszültségkimaradás.

A dolgozat tartalmazza az adatvesztés egy lehetséges matematikai leírását az indikátorfüggvény segítségével, illetve különféle adatvesztési modellek leírását. Közülük néhányat (véletlen független, véletlen blokkalapú, Markov-lánc alapú) a BME Méréstechnika és Információs Rendszerek Tanszékén is vizsgáltak. Ezeken felül bemutatok és megvizsgálók egy összetettebb modellt, a Gilbert–Elliot-modellt, mely egy rejtett Markov-modell. Bemutatom a Gilbert–Elliot-modell egyszerűsített változatait. Ismertetem az említett modellek alapvető tulajdonságait, a közöttük lévő kapcsolatokat.

Egy olyan alkalmazás esetén, ahol a kommunikációt jeltovábbításra használjuk, és a hasznos információ a jel spektruma, már egy minta elvesztése is jelentősen rontja a kiszámított spektrum pontosságát, az átvitel minőségét. Ez esetben a jel spektruma konvolválódik az indikátorfüggvény spektrumával, tehát az adatvesztés frekvenciatartománybeli vizsgálatához szükséges az indikátorfüggvény spektruma. A dolgozat bemutatja a Gilbert–Elliot-modell teljesítménysűrűség-spektrumának levezetését, továbbá a többi modell spektrumát is ismerteti. A levezetések helyességét Matlab-szimulációkkal is alátámasztom.

Egy adott adatvesztési modellre jellemző indikátorfüggvény szimulálása triviális, az inverz probléma viszont lényegesen bonyolultabb: meghatározandó, hogy egy adott adatvesztési jelenséget milyen modell ír le a legjobban, és annak mik a paraméterei. Ez az inverz feladat az identifikáció, amely történhet idő- és/vagy frekvenciatartománybeli információk felhasználásával. A dolgozatban áttekintem a vizsgált modellek identifikációs lehetőségeit.

A levezetéseket, szimulációkat mérések egészítik ki. Különböző kommunikációs lehetőségek esetén végeztem méréseket, a dolgozatban ezzel szemléltetem, hogy az adatvesztési modellek hogyan érvényesülnek a gyakorlatban.

Abstract

Technology plays an increasing role in our world. Nowadays one of the most significant trends is the digitalization and electronic perfection, supervision and control of various tasks. In parallel with this process grows the Internet of Things (IoT) and the Internet of Everything (IoE). Thus communication is becoming more intense, either between people or between devices.

Communication is never perfect, for example, a radio signal may be received incorrectly due to electromagnetic interference. A connection in a computer network can be overloaded and cause packets to be lost. Some errors are not caused by the communication channel, sampling issues because of synchronization problems, duplicated or left out bits belong to this type. It is possible that the algorithm of the application discards some data because they cannot be handled (in time). Data loss can be caused by external circumstances, e.g., in case of power outage in a measurement device connected to the electrical network.

The paper contains a possible mathematical description of the data loss via the indicator function. Moreover, different data loss models are described, some of which (random independent, random block based, Markov chain based) were already investigated at BME MIT. Furthermore, a more complex model, the Gilbert-Elliot model is presented. Its simplified versions are also introduced. The paper describes the basic properties of and the connections between these models.

If an application transmits data via a communication channel, and the useful information is the spectrum of the signal, even one lost sample is crucial. It corrupts the accuracy of the spectrum, and the quality of the transmission. Here the spectra of the signal and the indicator function are convolved. In order to analyse the data loss in the frequency domain, the spectrum of the indicator function is required. This paper presents the derivation of the power spectral density of the Gilbert-Elliot model. The spectra of the other analysed models are also shown. The correctness of the derivation is confirmed by simulations in Matlab.

It is obvious to generate an indicator function for a given data loss model. However, the inverse problem is much more complicated. The best fit data loss model and its parameters needs to be specified for a given data loss phenomenon. This inverse problem is called identification. It can be done using time and/or frequency domain information. The paper reviews the possible identification methods for the analysed models.

Theoretical analysis and simulations are supported by measurements. Different communication methods were measured. The measurement results are used to show how the data loss models function in practice.

1. Bevezető

A technológia egyre jobban átszövi az életünket. Természetesnek vesszük, hogy folyamatosan bővül az elektronikusan intézhető ügyek köre. Rengeteg tevékenységet számítógéppel végzünk, irányítunk, felügyelünk. Kezdenek elterjedni az önvezető autók. Lehet okostelefonunk, -tévénk, -óránk, -otthonunk és -hűtőszekrényünk. Több és több eszközt kapcsolunk össze, kialakítva ezzel a „dolgok internetét” (Internet of Things, IoT). Ezt nevezhetjük a „minden internetének” (Internet of Everything, IoE) is, mivel az egyik cél az, hogy gyakorlatilag bármit tudjunk csatlakoztatni hozzá. Egyre többet és többet kommunikálunk, mind mi emberek, mind az eszközeink, de ennek jelentős részével nem vagyunk tisztában. Az átlagember észre sem veszi, hogy az életében mennyire jelen vannak a különféle beágyazott, valós idejű rendszerek.

Tudjuk, hogy tökéletes nem létezik, így van ez a kommunikációval is. Például egy rádióadásban interferencia léphet fel, egy számítógépes hálózati kapcsolat túlterhelődhet, vagy akár a két fél közötti szinkronizáció is felborulhat. Ezeket a jelenségeket összefoglalóan adatvesztésnek nevezzük. Az adatvesztés nem feltétlenül kommunikációs eredetű. Előfordulhat, hogy az alkalmazott algoritmus dönt úgy, hogy az adott adatot eldobja, vagy lehet az adatvesztés oka valamilyen külső körülmény.

Amennyiben nem készülünk fel arra, hogy a rendszereinkben ilyen hibák előfordulhatnak, akkor azok a rendszerek működését összezavarhatják, a mérési adatokat, anyagi értékeket, adott esetben emberi életet veszélyeztethetnek. Az átlagember nem veszi észre, hogy az életében mennyire jelen vannak a különféle beágyazott, valós idejű rendszerek, kivéve, ha azok nem működnek.

Ahhoz, hogy az adatvesztést kezelni tudjuk, azt modelleznünk kell. A dolgozat megadja az adatvesztés egy lehetséges matematikai leírását, majd ismertet különféle adatvesztési modelleket, jellemző tulajdonságaikat, a közöttük lévő kapcsolatokat.

A villamosmérnöki gyakorlat egyik alapvető eszköze a frekvenciatartománybeli vizsgálat. A különféle jelek spektrumából bizonyos tulajdonságok ránézésre megállapíthatók, melyek az időtartománybeli jelalakból nehezen következtethetők ki. Amennyiben a kommunikációt jeltovábbításra használjuk, és a hasznos információt a jel spektruma hordozza, már egy minta elvesztése is jelentősen torzítja a kiszámított spektrumot, vagyis az átvitelt. A dolgozat ismerteti a Gilbert–Elliot-modell spektrumának levezetését és közli az egyszerűbb modellek spektrumát.

Egy adott adatvesztési modellhez könnyen generálható egy hozzá tartozó időtartománybeli adatsor. Kis munkával ebből szimulálni lehet a modellre jellemző spektrumot is. Az inverz probléma viszont lényegesen bonyolultabb: adott egy adatsor idő- és/vagy frekvenciatartományban, és meghatározandó, hogy melyik adatvesztési modell írja le ezt a legjobban és annak melyek a paraméterei. Ez az inverz feladat az identifikáció, melyről a spektrumok tárgyalása után lesz szó.

A levezetéseket, szimulációkat mérések egészítik ki. Különböző kommunikációs lehetőségek

esetén végeztem méréseket, a dolgozat végén szemléltetem, hogy az adatvesztési modellek hogyan érvényesülnek a gyakorlatban.

A dolgozat felépítése

Az adatvesztés matematikai leírása a 2. fejezetben található. Kicsit részletesebben körülményezük az adatvesztési problémát, majd definiáljuk az indikátorfüggvényt. Ennek felhasználásával bevezetünk az adatvesztésre néhány alapvető mennyiséget, függvényt.

A 3. fejezet áttekinti az adatvesztési modelleket, megadja a vizsgált modellek részletes leírását. Ez kiegészül a bevezetett mennyiségek, függvények megadásával mindegyik vizsgált modell esetén. Látni fogjuk, hogy a vizsgált modellek hogyan származtathatók egymásból, és általánosan milyen esetekben alkalmazhatók.

A frekvenciatartománybeli analízist a 4. fejezet ismerteti. A dolgozatban levezetem a Gilbert–Elliot-modell spektrumát, és következményként megadom a belőle származtatható modellek spektrumait is.

Az 5. fejezet az identifikációs problémát tárgyalja. Ismerteti az identifikációt mint inverz feladatot, a Gilbert–Elliot-modell egyértelműségét, illetve a vizsgált modellek identifikációs lehetőségeit.

A dolgozatot a mérések leírása zárja, a 6. fejezettel. Bemutatom az UDP-s kapcsolat adatvesztésére vonatkozó, valamint a Skype-on keresztüli jelátvitteles méréseimet. Továbbá a BME MIT-ről szerzett korábbi mérési adatokra is megpróbálok adatvesztési modellt illeszteni.

2. Az adatvesztés matematikai leírása

A fejezet első része áttekinti az adatvesztési problémát, tipikus példákat ad adatvesztést okozó rendszerekre. A második rész bemutatja az indikátorfüggvényt mint az adatvesztés egy lehetséges matematikai leírását, ismerteti az indikátorfüggvény felhasználását, illetve definiál néhány alapvető mennyiséget. A fejezethez felhasználtam az [1] irodalmat.

2.1. Az adatvesztési probléma

Az adatvesztés tekinthető mérési, kommunikációs hibának, mely abból adódik, hogy a mérő- és kommunikációs eszközeink, eljárásaink nem tökéletesen megbízhatóak. Az adatvesztés vizsgálható folytonos és diszkrét időben is, mivel azonban a feldolgozó eljárásainkat szinte kizárólagosan digitális eszközökkel valósítjuk meg, ezért a dolgot az adatvesztést csupán diszkrét időben vizsgálja.

Az adatvesztésnek alapvetően háromféle módja lehet. Az egyik az érvénytelen adatok esete: a mintavételkor jön adat, tudjuk azonban, hogy az hibás. Tipikus példája egy túlvezérelt AD-átalakító. Az érvénytelen adatokra másik gyakori eset lehet a vezeték nélküli kommunikáció, amikor a fellépő interferencia miatt egy adást hibásan veszünk, és ezt észrevesszük például egy hibás ellenőrző összegből.

Az adatvesztés második módja a hiányzó adatok esete: a mintavételkor nem jön adat. Itt nem kell szigorúan a mintavételnél egy AD-átalakítóra gondolni, például ide tartozhat egy földről, naponta adott időpontban elvégzett csillagászati mérés, amit egyes napokon az időjárás akadályoz. Jellemzőbb helyzet lehet egy elveszett csomag az interneten. Sokkal egyszerűbb eset egy akkumulátoros mérőeszköz, ami lemerül (vagy egy hálózatra kötött mérőeszköz feszültségkimaradás közben). Előfordulhat, hogy az alkalmazott algoritmus dönt úgy, hogy az adott adatot eldobja, mert nem tudná (vagy nem tudná időben) kezelni. Akár elrugaskodott példákat is ki tudunk találni: tegyük fel, hogy valaki statisztikát szeretne készíteni, hogy egy közösségi oldalon az ismerősei mikor elérhetőek. Feltehetjük, hogy nem szeretne folyamatosan bejelentkezve lenni, így viszont lesznek időszakok, amikor nincs mérés, ami pedig felfogható adatvesztésként.

Az adatvesztés harmadik módja a szinkronizációs hiba: a két kommunikáló fél pontatlan óraszinkronizációja miatt az átvitt jelet a két fél máshol mintavételezheti. Frekvenciahiba okozhatja minták kiesését vagy megduplázódását.

Az adatvesztés kezelésére természetes megoldás az újraküldés, újramérés stb., erre azonban nincs mindig lehetőség. Ha egy adott mennyiség pillanatértékét mérjük, akkor egy sikertelen mérés esetén az adott időpontra vonatkozó adatot később már nem fogjuk megtudni. Az üzenetek megbízható átviteléhez bonyolult állapotgépet kell implementálni (például TCP protokoll állapotgépe), ami extra erőforrásokat, energiafelhasználást, sávszélességigényt és költséget jelent. Ráadásul, mivel véges időn belül nem biztosítható, hogy az elküldött üzenetet a címzett megkapja, ezért valós idejű rendszerekben mindenképpen fel kell készülni

arra, hogy nem érkezik adat.

Vannak olyan eljárások, melyekhez szükséges egy blokkból az összes minta ismerete, ilyen például a spektrumszámítás. Ekkor már egy elveszett minta is kritikus, hiszen a teljes spektrumot torzítja. Blokkos adatfeldolgozás esetén az egy lehetőség, hogy csupán azokat a blokkokat vegyük figyelembe, amelyek teljesek, azaz nem tartalmaznak elveszett mintát. Még gyenge adatvesztés esetén is lehetséges, hogy elfogadhatatlanul sokat kellene várni arra, hogy egy teljes blokk kialakuljon. Amennyiben az ilyen blokkokból számított eredményeket átlagolni szeretnénk, könnyen kiadódhat olyan mérési idő, amely összemérhető a vizsgált jelenség időállandójával.

2.2. Alapfogalmak

A hibás, illetve a hiányzó adatok modellezhetők a K_n úgynevezett indikátorfüggvény segítségével. Ez minden időpontban megadja, hogy az adott pontbeli minta érvényes-e vagy sem:

$$K_n = \begin{cases} 1 & \text{ha az adat elérhető az } n. \text{ ütemben} \\ 0 & \text{ha az adat elveszett az } n. \text{ ütemben} \end{cases}. \quad (2.1)$$

Tehát egy minta adatvesztés szempontjából lehet elveszett vagy elérhető. Egymás utáni mintákat sorozatnak, adott számú mintából álló sorozatot blokknak nevezünk. Egy sorozat, illetve blokk teljes, amennyiben minden mintája elérhető, valamint üres, ha minden mintája elveszett.

Az indikátorfüggvényt egyetlen, szinkronban járó rendszer adatvesztéseinek leírására célszerű használni, segítségével az érvénytelen és a hiányzó minták jelenségét tudjuk modellezni. A szinkronizációs hibákból eredő kimaradó, megduplázódó minták kezelésére az indikátorfüggvény nem ad kézenfekvő lehetőséget.

Az indikátorfüggvényből kiindulva definiálhatjuk a γ adatvesztési arányt:

$$\gamma = \Pr(K_n = 0). \quad (2.2)$$

Itt $\Pr(A)$ a valószínűségi operátor: megadja az A esemény valószínűségét. A μ adatelérhetőségi arány az adatvesztési arány komplementere:

$$\mu = \Pr(K_n = 1) = 1 - \gamma. \quad (2.3)$$

Az adatvesztési arány az egyik leginkább magától értetődő mennyiség az adatvesztés témakörében. Kevésbé nyilvánvaló az $R(L)$ megbízhatósági függvény, mely megmutatja, hogy egy L minta hosszú sorozat milyen valószínűséggel teljes.

$$R(L) = \Pr(\forall i \in \{1, \dots, L\} : K_i = 1). \quad (2.4)$$

A megbízhatósági függvény információt szolgáltat az adatvesztés időbeli eloszlásáról. Ennek jelentőségét jól szemlélteti a következő példa: tegyük fel, hogy egy szerver egy évben összesen hat percig nem kap tápellátást. A szerver újraindítása vegyen igénybe 4 órát. Amennyiben hat percnyi idő egy blokkba tömörül, akkor évente 4 óra működési idő esik ki, ez elviselhető. Azonban ha a hat perc mondjuk 360 különálló másodpercre oszlik szét, amelyek nagyjából egyenletesen oszlanak el az évben, akkor körülbelül napi 4 órán át lesz elérhetetlen a szerver, ami lényegesen rosszabb, noha összesen ugyanannyi ideig nem kapott tápellátást.

Az $R'(L)$ komplementer megbízhatósági függvény annak a valószínűségét adja meg, hogy egy L minta hosszú sorozat milyen valószínűséggel üres:

$$R'(L) = \Pr(\forall i \in \{1, \dots, L\} : K_i = 0). \quad (2.5)$$

Ha azt feltételezzük, hogy ritkán történik adatvesztés, a rendszerünk jellemzően jól működik, akkor az üres sorozatok hossza könnyen mérhető. A várható hosszukat a dolgozatban E_{N0} -al, a teljes sorozatokét pedig E_{N1} -gyel fogom jelölni.

Az indikátorfüggvény segítségével könnyen tudunk modellezni egy adatvesztési folyamatot. Amennyiben ismert egy x_{0n} diszkrét idejű jel, és egy adatvesztési folyamatot leíró K_n indikátorfüggvény, akkor az adatvesztett jel az eredeti jel és az indikátorfüggvény mintánkénti szorzata:

$$x_n = x_{0n}K_n. \quad (2.6)$$

Amennyiben egy diszkrét idejű jel spektrumát szeretnénk megbecsülni, jellemzően a jel egy regisztrátumának DFT-jét (diszkrét Fourier-transzformáció) számítjuk ki. Az előbb láttuk, hogy az adatvesztés felfogható az indikátorfüggvénnyel való szorzásnak, ezért az adatvesztett jel spektruma az eredeti jel és az indikátorfüggvény spektrumának konvolúciójából adódik. Szemléletesen az indikátorfüggvény spektruma megjelenik az eredeti jel minden komponensének frekvenciáján, ezzel a csúcsokat „szétkeni”, egymásra lapolja, így a becslés pontossága jelentősen romlik.

3. Adatvesztési modellek

Láttuk, hogy többféle helyzetben fordulhat elő adatvesztés. Természetesen azon belül, hogy egyes minták hiányoznak vagy érvénytelenek, sokféle adatvesztés képzelhető el. Ezeket írják le az adatvesztési modellek, melyek gyakorlatilag az indikátorfüggvényt definiálják. A fejezet bemutat többféle adatvesztési modellt, az alapvető tulajdonságokat, a közöttük lévő kapcsolatokat. A fejezethez felhasználtam az [1] és [2] forrásokat. Először áttekintünk különböző adatvesztési modelleket, majd ezek közül néhányat részletesen megvizsgálunk.

3.1. Áttekintés

Ebben a részben a teljesség igénye nélkül bemutatunk többféle adatvesztési modellt, a rész elsődleges célja, hogy szemléltesse a modellek sokféleségét. Ezek sokszor transzformálhatók egymásba, illetve a később részletesebben ismertetett modellekbe, viszont a különböző megjelenési formáikban más viselkedések, tulajdonságok vizsgálhatók egyszerűbben.

A különféle adatvesztési modellek definiálásának az egyik oka az, hogy úgy gondoljuk, az adott modell jól ír le egy folyamatot, illeszkedik a fizikai képhez, a rendszer működéséről szerzett ismereteinkhez. Ehhez szükségesek az a priori ismeretek, vagyis például, hogy hogyan viselkedik egy adott átviteli csatorna, vagy hogyan zajlik egy mérési folyamat. A modellek felépítésénél be kell tartanunk azt az általános modellezési elvet, hogy csak addig növeljük a modellünk komplexitását, amíg azzal a modellt (lényegesen) pontosítani tudjuk. Mivel a modell alapján szeretnénk a rendszer viselkedését vizsgálni, ezért nem célszerű feleslegesen bonyolult modelleket használni.

Véletlen független modell

A véletlen, független adatvesztés a legegyszerűbb modell. Minden minta a többitől függetlenül, azonos valószínűséggel veszik el. Részletesen a 3.2. fejezet foglalkozik vele.

Blokkos, független modell

Blokkos adatvesztés esetén a minták fix méretű blokkokban elérhetők vagy vesznek el. Blokkos, független adatvesztés esetén az egyes blokkok egymástól függetlenül, azonos valószínűséggel vesznek el, bővebben lásd a 3.3. fejezetben.

Kétállapotú Markov-modell

A kétállapotú Markov-lánc alapú adatvesztés a legegyszerűbb a memóriával rendelkező adatvesztések közül. Adott egy kétállapotú Markov-lánc, az egyik állapotban a minta elérhető, a másikban elveszett. Vagyis a következő minta elérhetőségének a valószínűsége attól függ, hogy az aktuális minta elérhető-e vagy sem. A részletekről lásd a 3.4. fejezetet.

Gilbert-modell

A Gilbert-modell [3] a kétállapotú Markov-modell egy általánosítása. A Markov-lánc egyik állapotában a minta determinisztikusan elérhető, míg a másikban véletlen független adatvesztés történik. A Gilbert-moddellel foglalkozik a 3.5. fejezet.

Komplementer Gilbert-modell

A komplementer Gilbert-modell nagyon hasonló a Gilbert-modellhez, a fő különbség az, hogy itt az egyik állapotban a minta nem determinisztikusan elérhető, hanem determinisztikusan elveszett. A részletekért lásd a 3.5.1. fejezetet.

Gilbert–Elliot-modell

A Gilbert–Elliot-modell [4] a Gilbert-modell további általánosítása, itt mindkét állapotban véletlen független adatvesztés lép fel, csak más adatvesztési aránnyal. A Gilbert–Elliot-modell vizsgálata a dolgozat egyik hangsúlyos pontja, a modell részletes ismertetését a 3.6. fejezet tartalmazza.

Általános blokkalapú modell

Ha az adatok blokkokban vesznek el, az nemcsak úgy képzelhető el, hogy a blokkok a többitől függetlenül, azonos valószínűséggel elérhetők. Valójában a blokkokra tetszőleges adatvesztési modellt alkalmazhatunk, erről bővebben értekeznek a 3.7. fejezet.

Általános kétállapotú Markov-modell

[5] ismerteti egy általános kétállapotú Markov-modellt. Ez a modell annyiban több, mint a Gilbert–Elliot, hogy bevezet két új valószínűséget. A kimenet nemcsak az aktuális állapot függvénye, hanem a következőé is. Tehát először meghatározza, hogy mi lesz a következő állapot, de még nem vált állapotot, hanem az aktuális és a következő állapot alapján valamilyen valószínűséggel lesz elérhető a minta. Csak a kimenet meghatározása után történik meg az állapot átváltása az először meghatározott következő állapotra.

Többállapotú Markov-modell

A kétállapotú Markov-modell egy másik lehetséges általánosítási lehetősége, hogy bevezetünk további állapotokat. Ez esetben több állapotban lesznek a minták elérhetők vagy elveszettek, ez azonban még mindig az állapot determinisztikus függvénye. [2] mutat egy példát négyállapotú Markov-moddellel.

Többállapotú rejtett Markov-modell

A Gilbert–Elliot modell másik lehetséges általánosítása a több állapot bevezetése. Így egy többállapotú rejtett Markov-modellhez jutunk, a háttérben egy többállapotú Markov-moddellel, minden állapotban az állapottól függő adatvesztési arányú véletlen, független adatvesztéssel.

Hierarchikus rejtett Markov-modell

[6] ismerteti a hierarchikus rejtett Markov-modellt. Ez egy rekurzív modell, az alapja a rejtett Markov-modell. Ebből úgy kapunk hierarchikus modellt, hogy egyes állapotokhoz hozzárendelünk egy új rejtett Markov-modellt, és ebben az állapotban a kimenetet ennek a modellnek a kimeneti sorozata határozza meg.

Természetesen az állapotokba helyettesített rejtett Markov-modellek állapotait is ugyanúgy tovább lehet osztani. Minden ilyen helyettesítésnél az új rejtett Markov-modell kiegészül egy visszatérési állapottal, amely zárja a modell kimeneti sorozatát. Így gyakorlatilag egy állapotfán ugrál a rendszer állapota, a fa leveleiben képződnek a kimenetek, és egy állapotváltás vagy egy adott állapot közvetlen leszármazottai között, vagy egy adott állapotból egy szinttel felfelé történik.

Hosszabb memóriájú (magasabbrendű Markov-) modellek

[7] bemutatja, hogy hogyan lehet bináris sztochasztikus folyamatokat generálni, úgy, hogy a spektrumuk csak pólusokat tartalmazzon. Ehhez felhasznál egy olyan Markov-láncot, amely állapota az utolsó néhány minta. Azt, hogy az aktuális állapot az utolsó néhány minta, magasabbrendű Markov-modellnek nevezzük, például, ha az utolsó két állapottól függ a következő állapot, akkor ez egy másodrendű Markov-modell.

A magasabbrendű Markov-modell valójában a többállapotú Markov-modell speciális esete. A többállapotú Markov-modell állapotai a magasabbrendű modell memóriájának lehetséges tartalmai, a magasabbrendű modell átmeneti valószínűségeit kölcsönösen egyértelműen meg tudjuk feleltetni a többállapotú modell átmeneti valószínűségei egy részhalmazának. A többállapotú modell többi átmeneti valószínűsége 0, hiszen például 11 memóriatartalomtól egy minta alatt nem lehet 00 memóriatartalom.

Az ötlet, hogy a következő állapotot nemcsak az aktuális, hanem még néhány korábbi állapot határozza meg, alkalmazható a többi adatvesztési modellre is.

A modellezett rendszerhez illesztett modellek

Amennyiben elég ismerettel rendelkezünk az adatvesztési folyamatról, készíthetünk egy olyan modellt, amely a folyamat fizikai működéséhez illeszkedik. Elképzelhető, hogy többféle modellből tudjuk összerakni ezt a rendszerhez illesztett modellt, például az egyik működési állapotában nincs adatvesztés, egy másikban véletlen független, egy harmadikban másodrendű Markov-modell stb. a megfelelő modell. Ezeket a működési állapotokat és átmeneteiket modellezhetjük egy Markov-lánccal, és így kialakul egy hierarchikus modell.

Várhatóan a rendszerhez illesztett modellek írják le a legjobban az adott adatvesztést, de előállításuk sok a priori ismeretet igényel. Például UDP-s kapcsolatok egy ilyen modelljét adja meg [8].

Időfüggő (paraméterű) modellek

Amennyiben tudjuk, hogy az adatvesztés időben változik, és ennek mikéntjéről van elképzelésünk, akkor azt figyelembe vehetjük úgy, hogy ezt a változást az eddig megismert modellekbe, az eddig megismert technikákkal beépítjük. A változások kezelésének másik módja, hogy választunk egy modellt, ami mindvégig jól írja le az adatvesztést, csupán más és más paraméterekkel, és a paramétereket nem konstansokként, hanem időtől függő változókként kezeljük.

Az is elképzelhető, hogy nemcsak a modell paraméterei, hanem a struktúrája is változik az idővel. [9] közlekedési témában mutat egy példát az időfüggő modellek alkalmazására.

Soros, párhuzamos modellek

A soros (párhuzamos) modellek nem mások, mint adatvesztési modellek (komponensek) soros (párhuzamos) kapcsolásai. Soros modell esetén a minta pontosan akkor elérhető, amennyiben a modellt alkotó összes komponens indikátorfüggvénye 1. Vagyis például egymás után több kommunikációs csatornán kell átvinnünk az adatot, és bármelyikben tör-

ténhet adatvesztés. Az adatátvitel pontosan akkor sikeres, amennyiben az összes csatornán sikeres az átvitel. Soros modelleket vizsgál [2].

Párhuzamos modell esetén a minta pontosan akkor elérhető, ha legalább az egyik komponens indikátorfüggvénye 1. Egy lehetséges példa: van több, egyenként rossz minőségű átviteli lehetőségünk, és ezért az összesen elküldjük az adatot. Vagy, több, egymástól független eseménynek kell bekövetkeznie ahhoz, hogy adatvesztés lépjen fel.

3.2. Véletlen független adatvesztés

A legegyszerűbb adatvesztési modell a véletlen, független adatvesztés. A modell egyetlen paramétere a 3.1. táblázatban látható.

Paraméter	Értékkészlet	Jelentés
a	$[0; 1]$	érvényes minta valószínűsége

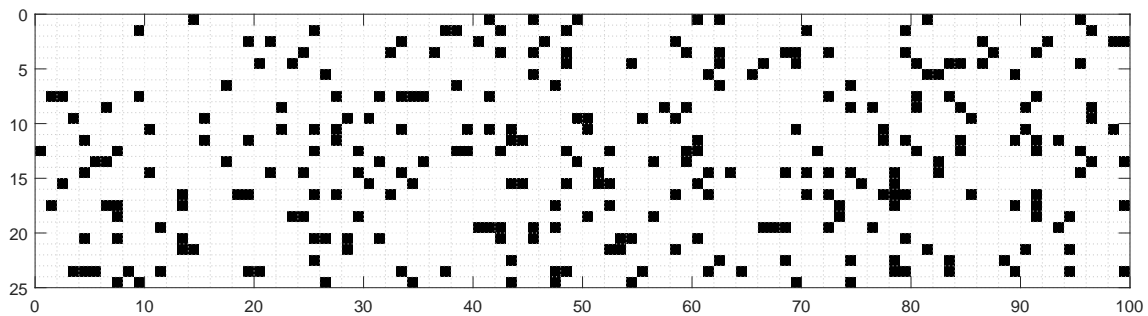
3.1. táblázat. A véletlen független adatvesztés paraméterei

Véletlen független adatvesztést célszerű használni, amennyiben vagy a fizikai képből adódóan ténylegesen ilyen az adatvesztési folyamat, vagy nem tudunk semmilyen plusz információt, csak azt, hogy időnként adatvesztés van.

A modell indikátorfüggvénye:

$$K_{VF,n} = \begin{cases} 1 & a \text{ valószínűséggel} \\ 0 & 1 - a \text{ valószínűséggel} \end{cases} \quad (3.1)$$

Az indikátorfüggvényre grafikus példát ad a 3.1. ábra. Az ábrán az indikátorfüggvény 2500 mintáját láthatjuk, balról jobbra, majd fentről lefelé. Az ábrán kis négyzet jelzi azokat a mintákat, ahol az indikátorfüggvény 0 értékű, vagyis az adott minta elveszett.



3.1. ábra. Véletlen független adatvesztés indikátorfüggvénye, $a = 0.9$

A modell paramétere közvetlenül az adatelérhetőségi arányt adja meg, ennek komplementere az adatvesztési arány:

$$\mu_{VF} = a, \quad \gamma_{VF} = 1 - a. \quad (3.2)$$

Mivel minden minta elérhetősége a többitől független, a megbízhatósági függvények:

$$R_{VF}(L) = a^L, \quad R'_{VF}(L) = (1 - a)^L. \quad (3.3)$$

Az üres sorozat várható hosszának meghatározásához annak az eloszlása kell, hogy hány minta veszett el két érvényes között, ha legalább egy elveszett. Ez máshogy megfogalmazva

annak a száma, ahányadikra lesz egy érvényes minta az első elveszett után. Mivel az indikátorfüggvény egyes pontbeli értékei függetlenek, ezért ez megegyezik annak a számával, hogy hányadik lesz az első érvényes minta, ami pedig geometriai eloszlást követ, a paraméterrel. Ennek várható értéke adja meg az üres sorozat várható hosszát. Hasonló gondolatmenettel vezethető le a teljes sorozatok várható hossza.

$$E_{N_0, VF} = \frac{1}{a}, \quad E_{N_1, VF} = \frac{1}{1-a}. \quad (3.4)$$

3.3. Blokkos, független adatvesztés

A blokkos, független adatvesztés a legegyszerűbb a blokkos adatvesztések közül. Blokkos adatvesztés esetén a mintákat fix méretű blokkokba rendezzük, és minden blokk vagy üres, vagy teljes. A véletlen független modell $K_{VF, n}$ indikátorfüggvénye mondja meg, hogy az egyes blokkok elérhetőek-e. A blokkos, független modell paramétereit a 3.2. táblázat tartalmazza.

Paraméter	Értékkészlet	Jelentés
a	$[0; 1]$	érvényes minta valószínűsége
M	$1, 2, 3, \dots$	blokkméret

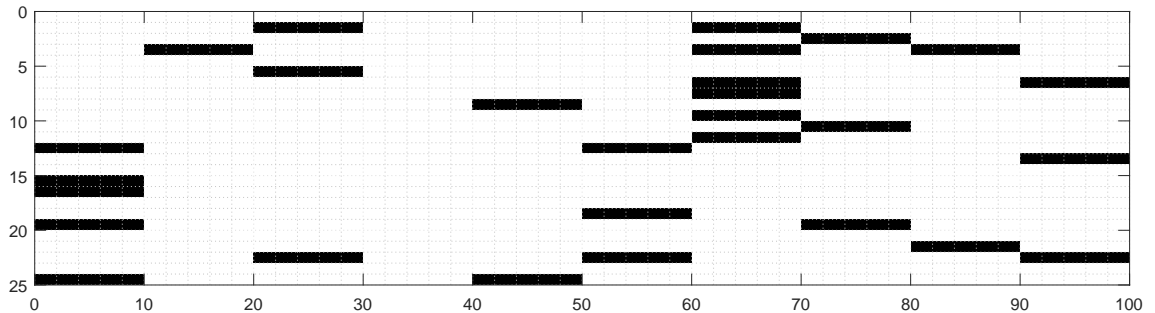
3.2. táblázat. A blokkos, független adatvesztés paramétereit

Blokkos, független modellt érdemes használni olyan esetekben, amikor a mintákat fix méretű blokkokban „szerezzük be”, ezen felül vagy a fizikai képből adódik, hogy a blokkok ilyen módon vesznek el, vagy nem tudunk semmi mást, mint hogy időnként elvesznek a blokkok.

A blokkos, független modell indikátorfüggvénye:

$$K_{BF, nM+k} = K_{VF, n} \quad (n \in \mathbb{Z}, k \in \{0, 1, \dots, M-1\}), \quad (3.5)$$

ahol $K_{VF, n}$ a véletlen, független modell indikátorfüggvénye. Az indikátorfüggvény grafikus példája a 3.2. ábrán látható. Megfigyelhető, hogy szabályosan, tízesével vesznek el (vagy nem) a minták.



3.2. ábra. Blokkos független adatvesztés indikátorfüggvénye, $a = 0.9$, $M = 10$

Az adatelérhetőségi és adatvesztési arány nem változik a véletlen független modellhez képest:

$$\mu_{BF} = a, \quad \gamma_{BF} = 1 - a. \quad (3.6)$$

A megbízhatósági függvényeknél arra kell figyelniük, hogy az egész blokk vagy érvényes, vagy elveszett, ezért (feltételezve, hogy blokkhatáron kezdjük el a vizsgált sorozatot):

$$R_{BF}(L) = a^{\lceil \frac{L}{M} \rceil}, \quad R'_{BF}(L) = (1-a)^{\lceil \frac{L}{M} \rceil}, \quad (3.7)$$

ahol $\lceil x \rceil$ a felsőegészrész-képzést jelenti.

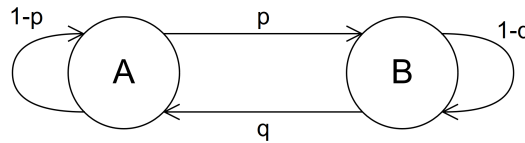
Mivel itt a véletlen független esethez képest M -szer annyi, egymás melletti minta veszik el (vagy nem), az üres és teljes sorozatok várható hossza a véletlen független esethez képest M -szeresére nő:

$$E_{N0,BF} = \frac{M}{a}, \quad E_{N1,BF} = \frac{M}{1-a}. \quad (3.8)$$

3.4. Kétállapotú Markov-lánc alapú adatvesztés

A kétállapotú Markov-lánc alapú adatvesztés az első olyan adatvesztési modell, amely vitathatatlanul rendelkezik memóriával. A blokkos, független adatvesztésnél igaz, hogy az egyes minták nem függetlenek egymástól, csak ha külön blokkokban vannak, de a minta elérhetőségét a blokk elérhetősége egyértelműen meghatározza, és a blokkok függetlenek egymástól. Ezért bizonyos szempontból a blokkos, független adatvesztési modell is memóriamentes, mivel egy memóriamentes adatvesztési modell blokkosított változata.

A (diszkrét idejű) Markov-lánc felfogható egy olyan állapotgépnek, amelynél a következő állapot meghatározása minden ütemben véletlenszerű, az aktuális állapottól függő valószínűségekkel. Egy kétállapotú Markov-láncot mutat be a 3.3. ábra.



3.3. ábra. Kétállapotú Markov-lánc

A modell paraméterei a 3.3. táblázatban láthatók.

Paraméter	Értékkészlet	Jelentés
p	$(0; 1)$	'A' állapotból 'B' állapotba váltás valószínűsége
q	$(0; 1)$	'B' állapotból 'A' állapotba váltás valószínűsége

3.3. táblázat. A kétállapotú Markov-lánc alapú adatvesztés paraméterei

Kétállapotú Markov-lánc alapú adatvesztéssel célszerű jellemezni az olyan eseteket, amikor azt szeretnénk modellezni, hogy egy rendszer működik-e vagy nem. Olyan helyzetek leírására alkalmas, ahol egymás után vesznek el minták, de az üres sorozatok hossza változó.

A Markov-lánckok egyik fontos jellemzője az \mathbf{A} állapotátmeneti mátrix, melynek a_{ij} eleme megmutatja annak a valószínűségét, hogy a következő állapot az $i.$, ha az aktuális állapot a $j.$ sorszámu. A 3.3. ábrán bemutatott Markov-lánc állapotátmeneti mátrixa:

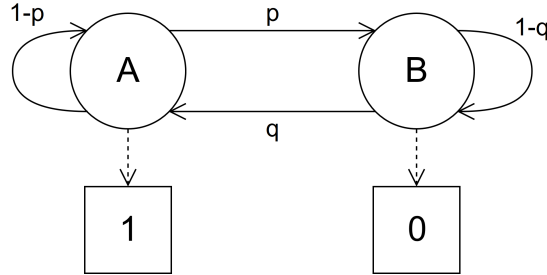
$$\mathbf{A}_{2S} = \begin{bmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

A továbbiakban az 1. állapotot 'A'-val, a 2. állapotot 'B'-vel fogom jelölni. A modell indikátorfüggvényét a kétállapotú Markov-lánc aktuális állapota határozza meg. Legyen X_n

az állapot az n . ütemben, ezzel:

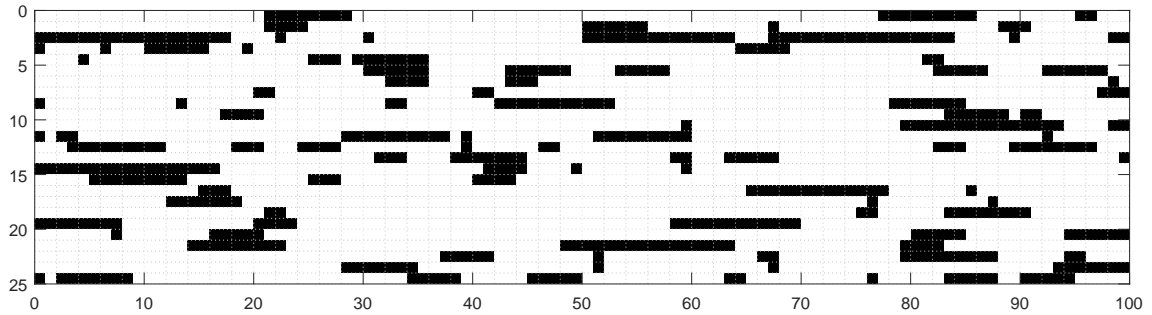
$$K_{2S,n} = \begin{cases} 1 & \text{ha } X_n = 'A' \\ 0 & \text{ha } X_n = 'B' \end{cases} \quad (3.10)$$

A kétállapotú Markov-lánc alapú adatvesztést illusztrálja a 3.4. ábra. A felső részén a kétállapotú Markov-láncot látjuk, és szaggatott nyíl mutatja az egyes állapotokhoz tartozó kimeneteket.



3.4. ábra. Kétállapotú Markov-lánc alapú adatvesztés

Az indikátorfüggvényt szemlélteti a 3.5. ábra. Láthatóan összefüggően vesznek el adatok, és e sorozatok hossza változó.



3.5. ábra. Kétállapotú Markov-lánc alapú adatvesztés indikátorfüggvénye, $p = 0,05$, $q = 0,2$

Egy Markov-lánc állapoteloszlása megadja, hogy a rendszer milyen valószínűségekkel tartózkodik az egyes állapotokban. Ezt π -vel jelöljük, és a $\pi = \mathbf{A}\pi$ egyenletből határozható meg, felhasználva, hogy az állapoteloszlás valószínűségeinek összege 1. Az állapoteloszlás:

$$\pi = \begin{bmatrix} \pi_{A'} \\ \pi_{B'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{q}{p+q} \\ \frac{p}{p+q} \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Az állapoteloszlásból rögtön leolvasható az adatelérhetőségi és az adatvesztési arány:

$$\mu_{2S} = \pi_{A'} = \frac{q}{p+q}, \quad \gamma_{2S} = \pi_{B'} = \frac{p}{p+q}. \quad (3.12)$$

A megbízhatósági függvény levezetése: ahhoz, hogy L minta elérhető legyen, szükséges, hogy az első elérhető legyen (μ_{2S}), majd a következő $L-1$ is elérhető legyen ($(1-p)^{L-1}$). Hasonlóan a komplementer megbízhatósági függvényre.

$$R_{2S}(L) = \mu_{2S}(1-p)^{L-1}, \quad R'_{2S}(L) = \gamma_{2S}(1-q)^{L-1}. \quad (3.13)$$

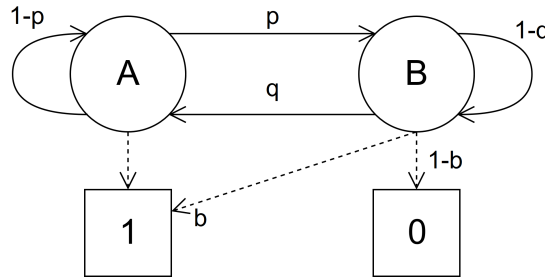
Ahhoz, hogy egy üres sorozatunk legyen, a 'B' állapotból kell indulnunk, továbbá minden ütemben q valószínűséggel lépünk ki belőle és $1 - q$ valószínűséggel maradunk bent. Az üres sorozat hosszát az adja meg, hogy hányadik ütemben léptünk ki. Tehát az üres sorozatok hossza geometriai eloszlást követ, q paraméterrel. Hasonlóan vezethető le az üres sorozatok várható hossza.

$$E_{N0,2S} = \frac{1}{q}, \quad E_{N1,2S} = \frac{1}{p}. \quad (3.14)$$

Érdeemes megfigyelni, hogy $p + q = 1$ esetén az egyes állapotokba való érkezési valószínűségek függetlenek az aktuális állapottól, vagyis a következő állapot nem függ az aktuális állapottól. Ez azt jelenti, hogy ebben az esetben a kétállapotú Markov-lánc véletlen, független adatvesztéssé fajul el, q adatelérhetőségi aránnyal.

3.5. Gilbert-modell

A Gilbert-modell [3] a kétállapotú Markov-lánc alapú modell egy lehetséges kiterjesztése. Az egyik állapotban a minta elérhető, a másik állapotban véletlen független adatvesztés szerint vesznek el a minták. A modellt a 3.6. ábra szemlélteti.



3.6. ábra. Gilbert-modell

Az ábrán észrevehetjük a kétállapotú Markov-láncot. Az 'A' állapotból egyetlen szaggatott nyíl indul ki, az '1' kimenet felé, vagyis 'A' állapotban mindig van adat. A 'B' állapotból indul szaggatott nyíl mindkét kimenet felé, a nyilak melletti értékek az adott kimenet valószínűségét jelentik. A modell paramétereit a 3.4. táblázat mutatja.

Paraméter	Értékkészlet	Jelentés
p	$(0; 1)$	'A' állapotból 'B' állapotba váltás valószínűsége
q	$(0; 1)$	'B' állapotból 'A' állapotba váltás valószínűsége
b	$[0; 1]$	'B' állapotban az elérhető minta valószínűsége

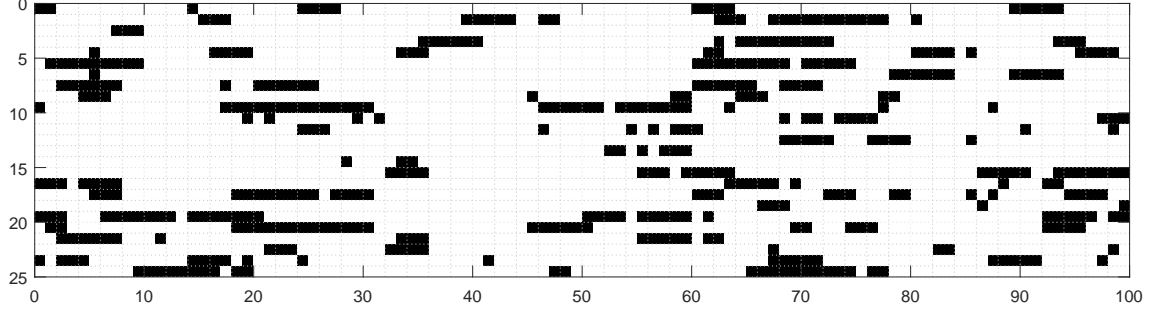
3.4. táblázat. A Gilbert-modell paramétereit

A Gilbert-modell olyan rendszerek leírására lehet alkalmas, amelyek vagy hibátlanul működnek, és ekkor mindig szerzünk adatot, vagy hibásan, de időnként ekkor is szerzünk adatot.

A Gilbert-modell indikátorfüggvénye (a Markov-lánc állapotát továbbra is X_n -nel jelölve):

$$K_{G,n} = \begin{cases} 1 & \text{ha } X_n = \text{'A'} \\ 1 - b & \text{valószínűséggel, ha } X_n = \text{'B'} \\ 0 & \text{1 - b valószínűséggel, ha } X_n = \text{'B'} \end{cases}. \quad (3.15)$$

Grafikusan szemlélteti az indikátorfüggvényt a 3.7. ábra. Nagyjából elkülöníthető csoportokban vesznek el minták.



3.7. ábra. Gilbert-modell indikátorfüggvénye, $p = 0,05$, $q = 0,2$, $b = 0,1$

A Gilbert-modell állapoteloszlása megegyezik a kétállapotú Markov-modellével, az egyik állapotban biztosan elérhető az adat, a másikban véletlen, független adatvesztés van, ezért az adatelérhetőségi és az adatvesztési arányok:

$$\mu_G = \pi_{A'} + b\pi_{B'} = \frac{q + bp}{p + q}, \quad \gamma_G = (1 - b)\pi_{B'} = \frac{(1 - b)p}{p + q}. \quad (3.16)$$

A megbízhatósági függvény (levezetéséhez lásd az A.1.1. függelék):

$$R_G(L) = \frac{q \left[\lambda_2 \lambda_1^{L-1} - \lambda_1 \lambda_2^{L-1} + \left(\lambda_2^{L-1} - \lambda_1^{L-1} \right) (1 - p + bp) \right]}{(p + q)(\lambda_2 - \lambda_1)} + \frac{bp \left[\lambda_2 \lambda_1^{L-1} - \lambda_1 \lambda_2^{L-1} + \left(\lambda_2^{L-1} - \lambda_1^{L-1} \right) (1 - q + bq) \right]}{(p + q)(\lambda_2 - \lambda_1)}, \quad (3.17)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{(1 - p) + (1 - q)b \pm \sqrt{[(1 - p) + (1 - q)b]^2 - 4by}}{2}, \quad (3.18)$$

$$y = 1 - p - q, \quad (3.19)$$

ahol $\lambda_{1,2}$ a következő mátrix két sajátértéke:

$$\mathbf{P}_{1,G} \begin{bmatrix} (1 - p) & q \\ pb & (1 - q)b \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

Ez a $\mathbf{P}_{1,G}$ mátrix egy módosított állapotátmeneti mátrix, ahol az átmeneti valószínűségeket megszoroztuk az elérhető minta valószínűségével az új állapotban. Ezzel azt írjuk le, hogy az adott állapotból úgy lép át a következőbe, hogy mellette a kimenet egyes.

A Gilbert-modellre a komplementer megbízhatósági függvény a következő megfontolásokkal vezethető le: a 'B' állapotból kell indulni, hogy az adatvesztés lehetősége meglegyen ($\pi_{B'}$), és $L - 1$ -szer a B állapotban kell maradni ($(1 - q)^{L-1}$). Továbbá minden ütemben el kell, hogy vesszen a minta ($(1 - b)^L$), tehát a komplementer megbízhatósági függvény:

$$R'_G(L) = \pi_{B'} (1 - q)^{L-1} (1 - b)^L = \gamma_G [(1 - q)(1 - b)]^{L-1}. \quad (3.21)$$

A teljes sorozatok várható hossza (lásd A.2.1. függelék):

$$E_{N1,G} = \frac{q + bp - b(p + q)y}{(q + bp)(1 - [1 - p + b(1 - q)] + by)}. \quad (3.22)$$

Az üres sorozatok várható hossza könnyen meghatározható, figyelembe véve, hogy csak a B állapotban vannak üres sorozatok. Így egy 'B' állapotbeli, elveszett minta után ahhoz, hogy

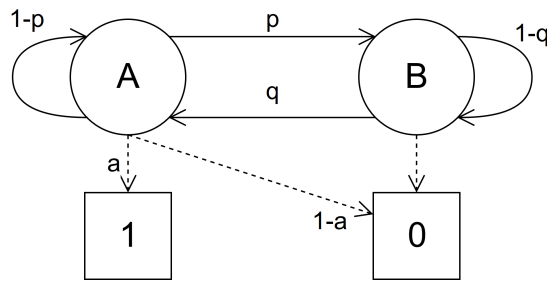
a következő is elveszzen, maradni kell a 'B' állapotban és a véletlen független adatvesztésnek elveszett mintát kell adnia. E két esemény együttes valószínűsége $(1 - q)(1 - b)$. Mivel ez minden ütemre igaz, ezért ugyanolyan megfontolásokkal, mint a kétállapotú Markov-modellnél:

$$E_{N0,G} = \frac{1}{1 - (1 - q)(1 - b)}. \quad (3.23)$$

A kétállapotú Markov-lánc alapú adatvesztés a Gilbert-modell speciális esete $b = 0$ mellett. A kétállapotú Markov-modellnél láttuk, hogy a Markov-lánc $p + q = 1$ esetén a két állapot véletlen, független kiválasztását eredményezi. Ilyenkor a Gilbert-modell is véletlen független adatvesztést eredményez, $q + bp$ adatelérhetőségi aránnyal.

3.5.1. Komplementer Gilbert-modell

A komplementer Gilbert-modell a Gilbert-modell párja: az egyik állapotban a minta elvesztett, a másikban véletlen független adatvesztés szerint elérhető. A modell szemléltetése a 3.8. ábrán látható.



3.8. ábra. Komplementer Gilbert-modell

A komplementer Gilbert-modell olyan esetek leírására használható, amikor egy rendszer vagy nagyjából működik, és ekkor véletlen független adatvesztés van, vagy egyáltalán nem működik. A modell paraméterei a 3.5. táblázatban láthatók.

Paraméter	Értékkészlet	Jelentés
p	$(0; 1)$	'A' állapotból 'B' állapotba váltás valószínűsége
q	$(0; 1)$	'B' állapotból 'A' állapotba váltás valószínűsége
a	$[0; 1]$	'A' állapotban az elérhető minta valószínűsége

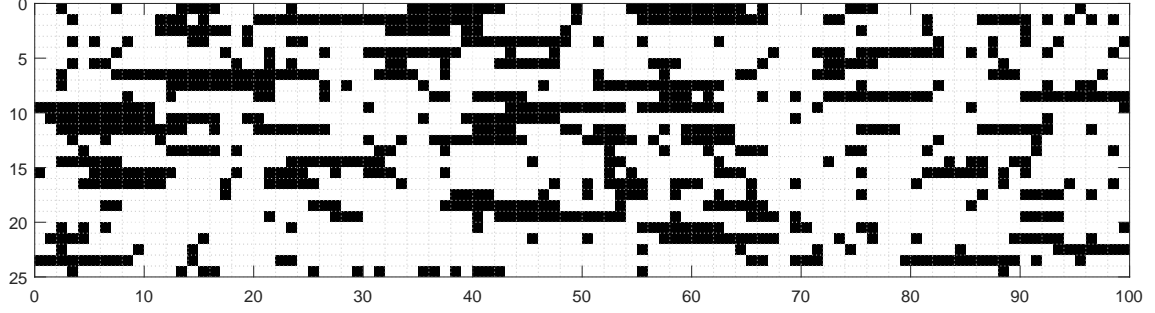
3.5. táblázat. A komplementer Gilbert-modell paraméterei

A jellemző mennyiségek, függvények hasonló gondolatmenettel vezethetők le, mint a Gilbert-modellnél. Az indikátorfüggvény (grafikusan szemléltetve a 3.9. ábrán):

$$K_{KG,n} = \begin{cases} 1 & a \text{ valószínűséggel, ha } X_n = 'A' \\ 0 & 1 - a \text{ valószínűséggel, ha } X_n = 'A' \\ 0 & \text{ha } X_n = 'B' \end{cases}. \quad (3.24)$$

Az adatelérhetőségi és adatvesztési arányok:

$$\mu_{KG} = a\pi_{A'} = \frac{aq}{p+q}, \quad \gamma_{KG} = (1-a)\pi_{A'} + \pi_{B'} = \frac{(1-a)q+p}{p+q}. \quad (3.25)$$



3.9. ábra. Komplementer Gilbert-modell indikátorfüggvénye, $p = 0,05$, $q = 0,2$, $a = 0,9$

Itt a megbízhatósági függvény fejezhető ki egyszerűen:

$$R_{KG}(L) = \pi_A (1-p)^{L-1} a^L = \mu_G [(1-p)a]^{L-1}. \quad (3.26)$$

A komplementer megbízhatósági függvény (levezetéséhez szintén lásd az A.1.1. függelék):

$$R'_{KG}(L) = \frac{(1-a)q \left[\lambda'_2 \lambda_1^{L-1} - \lambda_1 \lambda_2'^{L-1} + (\lambda_2'^{L-1} - \lambda_1'^{L-1}) ((1-p)(1-a) + p) \right]}{(p+q)(\lambda'_2 - \lambda'_1)} + \frac{p \left[\lambda_2 \lambda_1'^{L-1} - \lambda_1' \lambda_2^{L-1} + (\lambda_2^{L-1} - \lambda_1^{L-1}) ((1-q)(1-a) + q) \right]}{(p+q)(\lambda'_2 - \lambda'_1)}, \quad (3.27)$$

$$\lambda'_{1,2} = \frac{(1-p)(1-a) + (1-q) \pm \sqrt{[(1-p)(1-a) + (1-q)]^2 - 4(1-a)y}}{2}, \quad (3.28)$$

$$y = 1 - p - q, \quad (3.29)$$

ahol $\lambda'_{1,2}$ a következő mátrix két sajátértéke:

$$\mathbf{P}_{0,KG} \begin{bmatrix} (1-p)(1-a) & q(1-a) \\ p & (1-q) \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

Ez a $\mathbf{P}_{0,KG}$ mátrix szintén egy módosított állapotátmeneti mátrix, ahol az átmeneti valószínűségeket megszoroztuk az elveszett minta valószínűségével az új állapotban. Ezzel azt írjuk le, hogy az adott állapotból úgy lép át a következőbe, hogy mellette a kimenet nulla.

A teljes sorozatok várható hossza

$$E_{N1,KG} = \frac{1}{1 - (1-p)a}, \quad (3.31)$$

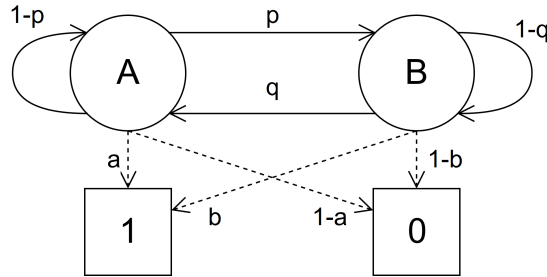
az üres sorozatoké pedig (lásd A.2.1. függelék):

$$E_{N0,KG} = \frac{(1-a)q + p - (1-a)(p+q)y}{((1-a)q + p)(1 - [(1-a)(1-p) + (1-q)] + (1-a)y)}. \quad (3.32)$$

A kétállapotú Markov-lánc alapú adatvesztés a komplementer Gilbert-modell speciális esete $a = 1$ mellett. A Gilbert-moddal megegyező módon $p + q = 1$ a két állapot véletlen, független kiválasztását eredményezi, ez véletlen független adatvesztést jelent, aq adatélvesség aránnyal. A komplementer Gilbert-modell a Gilbert-modell komplementere abban az értelemben, hogy egy (p,q,b) paraméterű Gilbert-modell ekvivalens egy $(q,p,1-b)$ paraméterű komplementer Gilbert-moddal, amennyiben az egyik modell két állapotát és a két kimenetét felcseréljük (átnevezzük).

3.6. Gilbert–Elliot-modell

A Gilbert–Elliot-modell [4] tekinthető a Gilbert-modell kiterjesztésének, valamint a Gilbert- és komplementer Gilbert-modellek egyesítésének is. Továbbra is egy kétállapotú Markov-lánc a modell alapja, viszont itt már mindkét állapotban véletlen, független adatvesztés történik. A 3.10. ábra illusztrálja a modellt.



3.10. ábra. Gilbert–Elliot-modell

A Gilbert–Elliot-modell olyan rendszerek leírására alkalmas, amelyeknél mind a jól működő, mind a hibás állapotban előfordul adatvesztés, de ennek mértéke különböző. Az ábrán is jól látható, hogy mindkét állapotban előfordulhatnak elérhető és elveszett minták is. A modell paramétereit a 3.6. táblázat tartalmazza.

Paraméter	Értékkészlet	Jelentés
p	$(0; 1)$	'A' állapotból 'B' állapotba váltás valószínűsége
q	$(0; 1)$	'B' állapotból 'A' állapotba váltás valószínűsége
a	$[0; 1]$	'A' állapotban az elérhető minta valószínűsége
b	$[0; 1]$	'B' állapotban az elérhető minta valószínűsége

3.6. táblázat. A Gilbert–Elliot-modell paramétereit

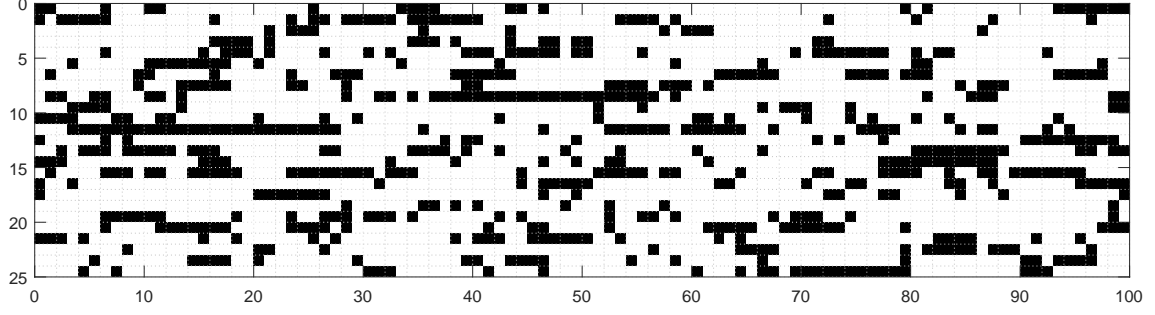
A Gilbert–Elliot modell egy rejtett Markov-modell [10] (valójában a Gilbert-, és a komplementer Gilbert-modellek is azok, a kétállapotú Markov-modell pedig egy elfajult eset). A rejtett Markov-modell tartalmaz egy Markov-láncot, melynek állapotai a modell állapotai. Továbbá, a modellnek vannak lehetséges kimenetei. Minden ütemben, miután megtörtént az állapotváltás, az aktuális állapotnak megfelelő valószínűségekkel véletlenszerűen kialakul egy kimenet.

A rejtett Markov-modellek fontos jellemzője a mögöttes Markov-lánc állapotátmeneti mátrixa, valamint a modell megfigyelési mátrixa (\mathbf{B}), melynek b_{ij} eleme megmutatja, hogy mennyi a valószínűsége a j . kimenetnek az i . állapotban. A Gilbert–Elliot-modell megfigyelési mátrixa:

$$\mathbf{B}_{GE} = \begin{bmatrix} a & 1 - a \\ b & 1 - b \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

Az eddigieknek megfelelően az 1. kimenet az 1, a 2. kimenet a 0. Az indikátorfüggvényt a rejtett Markov-modell aktuális kimenete adja:

$$K_{GE,n} = \begin{cases} 1 & a \text{ valószínűséggel, ha } X_n = 'A' \\ 0 & 1 - a \text{ valószínűséggel, ha } X_n = 'A' \\ 1 & b \text{ valószínűséggel, ha } X_n = 'B' \\ 0 & 1 - b \text{ valószínűséggel, ha } X_n = 'B' \end{cases}. \quad (3.34)$$



3.11. ábra. Gilbert–Elliot-modell indikátorfüggvénye, $p = 0,05$, $q = 0,2$, $a = 0,9$, $b = 0,1$

A Gilbert–Elliot modell indikátorfüggvényét szemlélteti a 3.11. ábra.

Mivel mindkét állapotban lehetséges az elérhető és az elveszett adat is, az adatelérhetőségi illetve adatvesztési arányok az eddigiekkel megegyező megfontolások alapján:

$$\mu_{GE} = a\pi_{A'} + b\pi_{B'} = \frac{aq + bp}{p + q}, \quad (3.35)$$

$$\gamma_{GE} = (1 - a)\pi_{A'} + (1 - b)\pi_{B'} = \frac{(1 - a)q + (1 - b)p}{p + q}. \quad (3.36)$$

A megbízhatósági függvények kifejezését először az irodalomban kerestem. [3] a Gilbert-modellre megad egy (3.17) egyenlethez hasonló kifejezést („recurrence times for ones”), a levezetési módszer azonban a Gilbert–Elliot-modellre nem alkalmazható triviálisan. [5] az általánosított kétállapotú Markov-modellre vezetett le egy megbízhatósághoz hasonló összefüggést, azonban a megbízhatósági függvényre vonatkozó szimulációs eredmények nem egyeztek meg a képlet által adottal.

Így végül saját magam vezettem le az összefüggéseket, melyek speciális esetei a Gilbert- és a komplementer Gilbert-modellek összefüggései. A megbízhatósági függvények (levezetésüket lásd az A.1. függelékben):

$$R_{GE}(L) = \frac{aq \left[\lambda_2 \lambda_1^{L-1} - \lambda_1 \lambda_2^{L-1} + \left(\lambda_2^{L-1} - \lambda_1^{L-1} \right) \left((1-p)a + bp \right) \right]}{(p+q)(\lambda_2 - \lambda_1)} + \frac{bp \left[\lambda_2 \lambda_1^{L-1} - \lambda_1 \lambda_2^{L-1} + \left(\lambda_2^{L-1} - \lambda_1^{L-1} \right) \left((1-q)a + bq \right) \right]}{(p+q)(\lambda_2 - \lambda_1)}, \quad (3.37)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{(1-p)a + (1-q)b \pm \sqrt{[(1-p)a + (1-q)b]^2 - 4aby}}{2}, \quad (3.38)$$

$$y = 1 - p - q, \quad (3.39)$$

$$R'_{GE}(L) = \frac{(1-a)q \left[\lambda'_2 \lambda_1'^{L-1} - \lambda_1' \lambda_2'^{L-1} + \left(\lambda_2'^{L-1} - \lambda_1'^{L-1} \right) \left((1-p)(1-a) + (1-b)p \right) \right]}{(p+q)(\lambda'_2 - \lambda'_1)} + \frac{(1-b)p \left[\lambda'_2 \lambda_1'^{L-1} - \lambda_1' \lambda_2'^{L-1} + \left(\lambda_2'^{L-1} - \lambda_1'^{L-1} \right) \left((1-q)(1-a) + (1-b)q \right) \right]}{(p+q)(\lambda'_2 - \lambda'_1)}, \quad (3.40)$$

$$\lambda'_{1,2} = \frac{(1-p)(1-a) + (1-q)(1-b) \pm \sqrt{[(1-p)(1-a) + (1-q)(1-b)]^2 - 4(1-a)(1-b)y}}{2}. \quad (3.41)$$

Az egyenletekben szereplő $\lambda_{1,2}$ és $\lambda'_{1,2}$ rendre az alábbi módosított állapotátmeneti mátrixok sajátértékei:

$$\mathbf{P}_{1,GE} \begin{bmatrix} (1-p)a & qa \\ pb & (1-q)b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{0,GE} \begin{bmatrix} (1-p)(1-a) & q(1-a) \\ p(1-b) & (1-q)(1-b) \end{bmatrix}, \quad (3.42)$$

melyek azt fejezik ki, hogy mi a valószínűsége, hogy a következő állapotba lépéskor a kimenet ugyanaz marad, mint ami az aktuálisban volt.

Az irodalomban az üres sorozatok várható hosszáról egyetlen összefüggést találtam, [2]-ben, az ott leírt összefüggés azonban helytelen. Ott egy teljes várható érték tételt használnak, azzal a feltételezéssel, hogy az üres sorozatok alatt nincs állapotváltás. Ez a feltételezés azonban nem jogos, előfordulhat, hogy amíg a kimenet 0, a Markov-lánc az 'A' és a 'B' állapotai között akár többször is átvált, ezért a teljes és az üres sorozatok várható hosszát is le kellett vezetnem (a levezetés megtalálható az A.2. függelékben):

$$E_{N1,GE} = \frac{aq + bp - ab(p+q)y}{(aq+bp)(1 - [a(1-p) + b(1-q)] + aby)}. \quad (3.43)$$

$$E_{N0,GE} = \frac{(1-a)q + (1-b)p - (1-a)(1-b)(p+q)y}{((1-a)q + (1-b)p)(1 - [(1-a)(1-p) + (1-b)(1-q)] + (1-a)(1-b)y)}. \quad (3.44)$$

A Gilbert–Elliot-modell a blokkos, független adatvesztés kivételével az összes eddig ismertezett adatvesztési modell általánosítása. Ha $a = 1$, a Gilbert-, $b = 0$ esetén a komplementer Gilbert-modellt kapjuk. Amennyiben mindkettő teljesül, a modell átmegy a kétállapotú Markov-modellbe. Amikor $p + q = 1$, a következő állapot független az aktuálistól, így véletlen független adatvesztés lép fel, $aq + bp$ adatelérhetőségi aránnyal. $a = b$ esetén mindkét állapotban megegyezik az elérhető minta valószínűsége, ezért kívülről a két állapot nem megkülönböztethető, tehát ekkor is véletlen független adatvesztést kapunk, ezzel a közös adatelérhetőségi aránnyal.

3.7. Általános blokkalapú adatvesztés

Bármelyik adatvesztési modell blokkosítható, ugyanolyan megfontolások szerint, mint a független, blokkalapú adatvesztés. A mintákat fix M méretű blokkokba rendezve, majd a blokkokra egy adott adatvesztési modell (a továbbiakban: alapmodell) indikátorfüggvényét alkalmazva, megkaphatjuk annak az alapmodellnek a blokkosított változatát. Akkor érdemes blokkalapú adatvesztési modellt használni, ha az adatokat ténylegesen fix méretű blokkokban „szerezzük be”. Azt, hogy milyen alapmodellt célszerű választani, az a blokkvesztési folyamatától függ.

A blokkos adatvesztéseknek az alapmodelljüknél eggyel több paraméterük van, ez a blokkméret. Blokkos adatvesztési modellt is lehet tovább blokkosítani, ez azonban ekvivalens a blokkméret növelésével. Ha a blokkméret egy minta, akkor visszakapjuk az alapmodellt.

Az alapmodellre jellemző mennyiségeket, függvényeket A-s, a blokkosított modellre jellemzőket B-s indexszel fogom ellátni. Így a blokkosított modell indikátorfüggvénye

$$K_{B,nM+k} = K_{A,n} \quad (n \in \mathbb{Z}, k \in \{0, \dots, M-1\}). \quad (3.45)$$

Mivel a blokkok hossza állandó, ezért az adatelérhetőségi és az adatvesztési arány nem változik:

$$\mu_B = \mu_A, \quad \gamma_B = \gamma_A. \quad (3.46)$$

A megbízhatósági függvények könnyen kifejezhetők, ha a vizsgált mintasorozat blokkhatáron kezdődik. Annyit kell meghatároznunk, hogy a sorozat hány blokkba esik bele, és ezt helyettesíthetjük az alapmodell megbízhatósági függvényeibe.

$$R_B(L) = R_A\left(\left\lceil \frac{L}{M} \right\rceil\right), \quad R'_B(L) = R'_A\left(\left\lceil \frac{L}{M} \right\rceil\right). \quad (3.47)$$

Amennyiben a sorozatot nem a blokk elején, hanem attól $0 \leq k < M$ mintával később kezdjük, akkor a megbízhatósági függvények:

$$R_B(L) = R_A\left(\left\lceil \frac{L+k}{M} \right\rceil\right), \quad R'_B(L) = R'_A\left(\left\lceil \frac{L+k}{M} \right\rceil\right). \quad (3.48)$$

A blokkos esetben az alapmodellhez képest M -szer annyi, egymás melletti minta veszik el vagy lesz érvényes, ezért az üres és teljes sorozatok várható hosszai az alapmodelléhez képest M -szer hosszabbak lesznek:

$$E_{N_0,B} = ME_{N_0,A}, \quad E_{N_1,B} = ME_{N_1,A}. \quad (3.49)$$

3.8. A modellek összehasonlítása

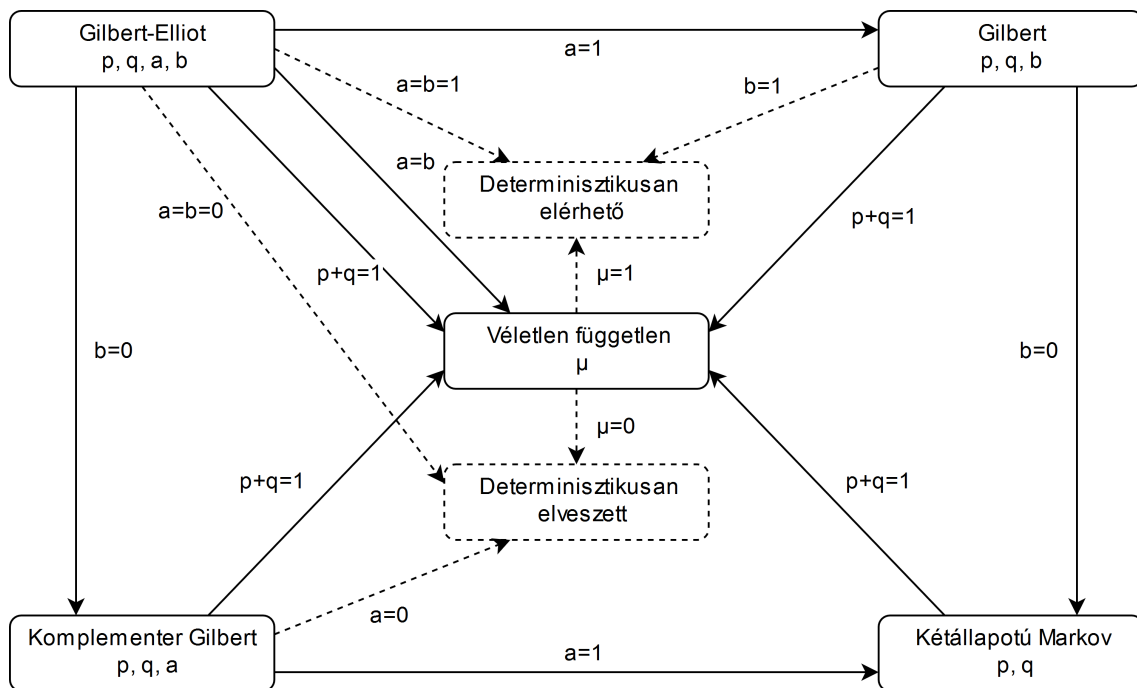
A 3.7. táblázat mutatja az eddig tárgyalt modellek összehasonlítását néhány alapvető tulajdonság mentén. A modellek komplexitását jól jellemzi a paraméterszámuk. A kétállapotú Markov-modell, illetve az annál bonyolultabb modellek mind valamilyen memóriaszerű tulajdonsággal rendelkeznek, hiszen ezeknek a modelleknek állapotaik vannak.

Modell	Paraméterszám	Blokkos	Memóriamentes
Véletlen független	1	nem	igen
Blokkos, független	2	igen	blokkszinten igen
Kétállapotú Markov	2	nem	nem
Gilbert	3	nem	nem
Komplementer Gilbert	3	nem	nem
Gilbert-Elliot	4	nem	nem

3.7. táblázat. Adatvesztési modellek összehasonlítása

A vizsgált nem blokkos modellek közötti összefüggéseket szemlélteti a 3.12. ábra. Elfajult esetként láthatók a determinisztikusan elérhető, illetve a determinisztikusan elveszett modellek is, melyeknél az indikátorfüggvény rendre konstans 1, illetve 0. Az ábrán a különböző modellek azonos paraméterei számértékileg is azonosak. A nyílak értelmezése: amennyiben a hozzá tartozó feltétel teljesül, akkor az a modell, amelyből kiindul, ekvivalens azzal, amelyikbe érkezik. Másképp: a nyíl által mutatott modell a nyíl kiindulópontjának speciális esete, amennyiben a nyíl feltétele teljesül.

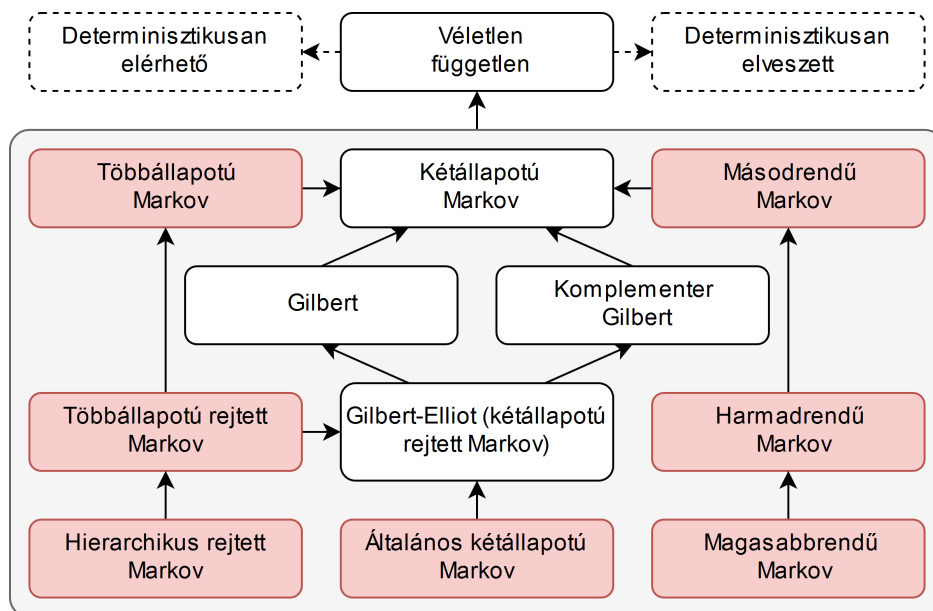
A vizsgált nem blokkos modelleket helyezi kontextusba a 3.13. ábra. Itt pirossal jelöltük a részletesen nem vizsgált modelleket, a nyílak a közvetlen speciális eseteket mutatják. Például láttuk, hogy a Gilbert–Elliot-modellből megkapható a kétállapotú Markov-modell, amennyiben $a = 1$ és $b = 0$. Viszont az egyik elég ahhoz, hogy a Gilbert- vagy a komplementer Gilbert-modellt kapjuk, és ezeknek is speciális esete a kétállapotú Markov-modell. Másik példa, hogy többállapotú rejtett Markov-modellből először készíthetünk többállapotú Markov-modellt, és abból kétállapotút, vagy elérhetjük ezt úgy, hogy először Gilbert-Elliot, majd (komplementer) Gilbert-modellt alkalmazunk.



3.12. ábra. A vizsgált nem blokkos adatvesztési modellek közötti kapcsolatok

Az ábrán nincsenek feltüntetve az önspecializációk, holott például egy háromállapotú Markov-modell speciális esete a négyállapotú Markov-modellnek, és mindkettő többállapotú Markov-modell. Ezzel kicsit ellentmondóan külön feltüntetésre kerültek a másod-, harmad- és magasabbrendű modellek, vagyis, ahol az aktuális mintához tartozó valószínűségek az utolsó két, három vagy több mintától függenek. Utóbbinak az a célja, hogy szemléltesse, hogy az általános, többállapotú megfogalmazások valójában modellek sorozatát takarják.

Láttuk, hogy a véletlen független adatvesztés speciális esete az összes vizsgált adatvesztési modellnek. Ez így van a nem vizsgált modellek esetén is: megfelelő paraméterek hatására véletlen független adatvesztés alakul ki. Ezért a memóriát tartalmazó modelleket összefogtuk egy szürke keretbe, és ennek speciális esete a véletlen független adatvesztés, amikor nincs memória.



3.13. ábra. A vizsgált nem blokkos adatvesztési modellek kontextusa

4. Vizsgálat a frekvenciatartományban

A kommunikáció egyik lehetséges célja a jeltovábbítás, ekkor a hasznos információt gyakran a jel spektruma hordozza. Ha ilyen esetben adatvesztés lép fel, a spektrum torzul, ugyanis az indikátorfüggvény spektruma konvolválódik a jelével. A fejezet bemutatja a Gilbert–Elliot-modell teljesítménysűrűség-spektrumának levezetését, és ennek következményeként az egyszerűbb modellek spektrumait.

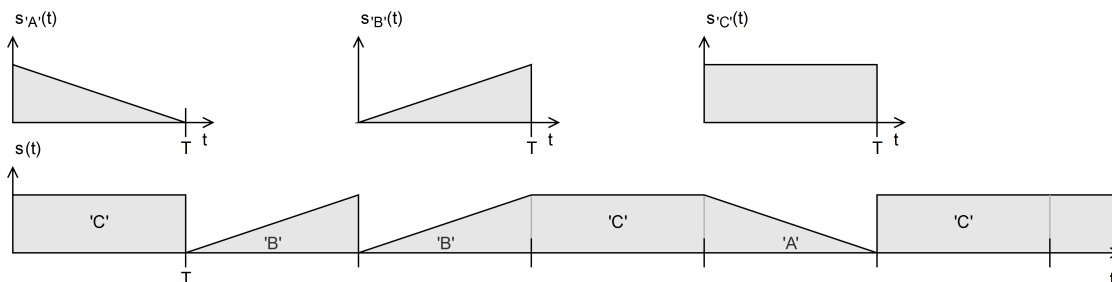
Az adatvesztési modellek ismertetésénél láttuk, hogy a sokféle modell bevezetésének célja, hogy minél jobban tudjunk különféle adatvesztési folyamatokat leírni. A különböző adatvesztési modellek bevezetésének egy másik fontos motivációja a jelek és rendszerek frekvenciatartománybeli leírása. Amikor egy indikátorfüggvény spektrumát vizsgáljuk, jellemzően valamilyen színes zajt látunk. A különböző adatvesztési modellek esetén ez a spektrum más és más, ezért az adatvesztéssel terhelt jel spektruma az aktuális modelltől függő módon fog torzulni. A spektrum birtokában pedig következtetni tudunk az adatvesztési modellre.

4.1. A Gilbert–Elliot-modell spektruma

A levezetés saját munka, alapja a Markov-lánc vezérelte jelek spektruma [11]. Legyen egy Markov-láncunk, és ez T időnként váltson állapotot (azaz a mintavételi periódusidő T). Ha a Markov-lánc minden állapotához hozzárendelünk egy $s_i(t)$ impulzust, és minden állapotváltáskor az új állapotnak megfelelő impulzust „elindítjuk” (hozzáadjuk a kimeneti jelhez), akkor az így kapott $s(t)$ jel egy Markov-lánc vezérelte jel.

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} s_{X_n}(t - nT). \quad (4.1)$$

Markov-lánc vezérelte jelre mutat példát a 4.1. ábra. A három ('A', 'B', 'C') állapothoz tartozó impulzusok az ábra felső részén találhatóak. Az alsó rész mutatja a kimeneti jelet, az adott időszeltekhez tartozó állapotokkal együtt.



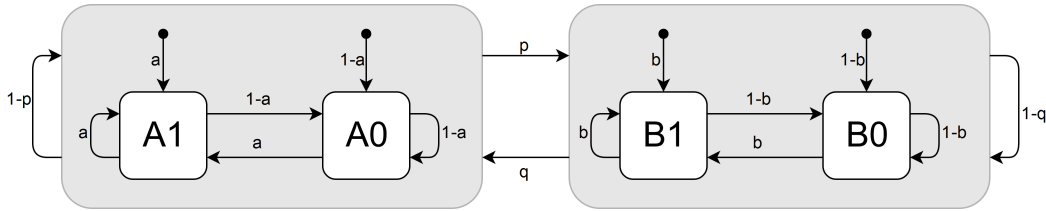
4.1. ábra. Markov-lánc vezérelte jel

A Gilbert–Elliot-modell indikátorfüggvénye nem egy Markov-lánc vezérelte jel. Ezért elő-

szőr a Gilbert–Elliot-modellt transzformáljuk egy egyszerű Markov-lánccá, majd az impulzusok megfelelő megválasztásával elérjük, hogy a jel az indikátorfüggvény nulladrendű tartóval visszaállított változata legyen. Ekkor [11] szerint meghatározhatjuk a folytonos idejű spektrumot, amiből [1] felhasználásával megkapjuk a diszkrét idejű spektrumot.

4.1.1. Az ekvivalens Markov-lánc

Először át kell alakítanunk a Gilbert–Elliot-modellt egy ekvivalens Markov-lánccá. Ezt két lépésben tesszük meg, először átalakítjuk egy hierarchikus modellé, majd ezt egy négyállapotú Markov-lánccá. Az előbbi ekvivalens hierarchikus modellt szemlélteti a 4.2. ábra.



4.2. ábra. Ekvivalens hierarchikus modell

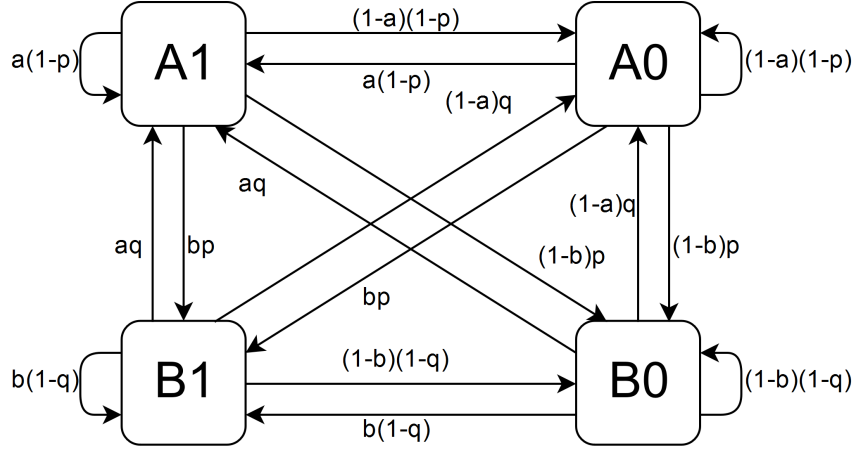
A szürke (külső) állapotok felelnek meg a Gilbert–Elliot-modell állapotainak. Bennük egy kétállapotú Markov-lánc alapú adatvesztés található, olyan paraméterekkel, hogy éppen véletlen független adatvesztéssé fajuljanak el. A belső állapotok megfelelnek annak, hogy a Gilbert–Elliot-modell adott állapotában a kimenet egy vagy nulla.

A modell úgy működik, hogy minden ütemben először eldöntjük, hogy a külső állapotot kell-e váltani. Ha nem, akkor az aktuális belső állapot alapján meghatározzuk, hogy kell-e belső állapotot váltani. A belső állapot pedig egyértelműen meghatározza a kimenetet. Értelmszerűen a kimenet az 'A1' és a 'B1' állapotokban 1, az 'A0' és a 'B0' állapotokban 0. Amennyiben a külső állapotot váltani kell, akkor az új külső állapotban megnézzük a belső állapotokhoz tartozó belépési valószínűségeket (olyan nyíl mellé írva, amelyik nem állapotból, hanem fekete pöttyből indul), és ez alapján kiválasztjuk az aktuális belső állapotot, ami meghatározza a kimenetet. A külső állapot váltásakor a régi külső állapothoz tartozó belső állapotot elfelejtjük.

A következő lépés a hierarchikus modell átalakítása egy ekvivalens négyállapotú Markov-lánccá. Az állapotok a hierarchikus modell belső állapotai lesznek. Azoknál az állapotátmenetekenél, amelyek a hierarchikus modellben azonos külső állapotban voltak, az átmeneti valószínűségeket meg kell szorozni az adott külső állapotban való maradás valószínűségével. Azoknál az átmenetekenél, amelyeknél a hierarchikus modell külső állapota különböző, a külső állapotátmeneti valószínűséget kell megszorozni az új belső állapothoz tartozó belépési valószínűséggel.

A meghatározott ekvivalens négyállapotú Markov-lánc állapotátmeneti mátrixa (az állapotok rendre 'A1', 'A0', 'B1', 'B0') és állapoteloszlása:

$$\mathbf{A}_{4S} = \begin{bmatrix} a(1-p) & a(1-p) & aq & aq \\ (1-a)(1-p) & (1-a)(1-p) & (1-a)q & (1-a)q \\ bp & bp & b(1-q) & b(1-q) \\ (1-b)p & (1-b)p & (1-b)(1-q) & (1-b)(1-q) \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$



4.3. ábra. Ekvivalens Markov-lánc

$$\pi = \begin{bmatrix} \pi_{A1'} \\ \pi_{A0'} \\ \pi_{B1'} \\ \pi_{B0'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{aq}{p+q} \\ \frac{(1-a)q}{p+q} \\ \frac{bp}{p+q} \\ \frac{(1-b)p}{p+q} \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Észrevehető, hogy a Gilbert-, a komplementer Gilbert- és a Gilbert–Elliet-modellek megbízhatósági függvényeinek levezetésére használt módosított állapotátmeneti mátrixok az ekvivalens Markov-lánc átmenetmátrixából sorok és oszlopok törlésével megkaphatók. Továbbá az adatelérhetőségi, illetve az adatvesztési arányok kifejezhetők az állapoteloszlással: $\mu_{GE} = \pi_{A1'} + \pi_{B1'}$ és $\gamma_{GE} = \pi_{A0'} + \pi_{B0'}$.

A levezetéshez szükséges az állapotátmeneti mátrix l . hatványa, mely a következő:

$$\mathbf{A}_{4S}^l = \frac{1}{p+q} \begin{bmatrix} aq + apy^l & aq + apy^l & aq - aqy^l & aq - aqy^l \\ cq + cpy^l & cq + cpy^l & cq - cqy^l & cq - cqy^l \\ bp - bpy^l & bp - bpy^l & bp + bqy^l & bp + bqy^l \\ dp - dpy^l & dp - dpy^l & dp + dqy^l & dp + dqy^l \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

ahol $y = 1 - p - q$, $c = 1 - a$ és $d = 1 - b$. Észrevehető, hogy $(\mathbf{A}_{4S}^l)_{ij} = \pi_i + \varepsilon_{ij}^{(l)}$. A következő, ε -okból álló mátrixot a levezetésben később felhasználjuk:

$$\left[\varepsilon_{ij}^{(l)} \right] = \frac{y^l}{p+q} \begin{bmatrix} ap & ap & -aq & -aq \\ (1-a)p & (1-a)p & -(1-a)q & -(1-a)q \\ -bp & -bp & bq & bq \\ -(1-b)p & -(1-b)p & (1-b)q & (1-b)q \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

4.1.2. Képlet a spektrumra - folytonos időben

Az ekvivalens Markov-lánc meghatározása utáni feladat az egyes állapotokhoz tartozó impulzusok megválasztása. Amennyiben az 'A1' és a 'B1' állapotokhoz 0 és T közötti négy-szögimpulzust, az 'A0' és a 'B0' állapotokhoz konstans nullát rendelünk, az így előálló Markov-lánc vezérelte jel megegyezik az indikátorfüggvény nulladrendű tartóval való vissza-

állításával. Egy Markov-lánc vezérelte jel $\phi(f)$ teljesítménysűrűség-spektruma [11]:

$$\begin{aligned} \phi(f) = & \frac{1}{T} \left(\sum_{k=1}^K \pi_k |S_k(f)|^2 - \left| \sum_{k=1}^K \pi_k S_k(f) \right|^2 + \right. \\ & \left. + 2\Re \sum_{u,v=1}^K \sum_{l=1}^{\infty} \pi_u \varepsilon_{vu}^{(l)} e^{j2\pi flT} S_u(f) S_v^*(f) + \left| \sum_{k=1}^K \pi_k S_k(f) \right|^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(fT - n) \right), \end{aligned} \quad (4.6)$$

ahol K a Markov-lánc állapotainak száma, $S_k(f)$ a k . állapothoz rendelt impulzus Fourier-transzformáltja, \Re a valósrész-képzés, j a képzetes egység, $*$ a komplex konjugálás, $\delta(x)$ pedig a Dirac-delta.

Az impulzusok Fourier-transzformáltjai:

$$S_{A1'}(T) = S_{B1'}(T) = T \operatorname{sinc}(fT) e^{-j\pi fT}, \quad S_{A0'}(T) = S_{B0'}(T) = 0, \quad (4.7)$$

ahol $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$.

A behelyettesítéseket, összevonásokat elvégezve a következő spektrum adódik:

$$\begin{aligned} & \phi_{GE}(f) = \\ = & T \operatorname{sinc}^2(fT) \left(\mu_{GE} (1 - \mu_{GE}) + 2 \frac{pq(a-b)^2 y (\cos x - y)}{(p+q)^2 |1 - ye^{-jx}|^2} + \mu_{GE}^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(fT - n) \right), \end{aligned} \quad (4.8)$$

ahol $x = 2\pi fT$.

4.1.3. Visszatérés a diszkrét időbe

[1] szerint egy adatvesztési modell teljesítménysűrűség-spektruma az alábbi formában adható meg:

$$S(f_k) = GH(f_k) + \mu^2 \delta(f_k), \quad (4.9)$$

ahol $f_k = \frac{k}{N}$ a relatív frekvencia, $k = 0 \dots N-1$, N a DFT pontszáma, G egy skálatényező, $H(f_k)$ szabja meg a spektrum alakját, és μ a kérdéses adatvesztési modell adatelérhetőségi aránya.

A (4.8) egyenlet megadja a Gilbert–Elliot-modell indikátorfüggvényének nulladrendű tartóval visszaállított spektrumát. A nulladrendű tartó felel a $T \operatorname{sinc}^2(fT)$ tényezőért, a nagy zárójelben pedig megtaláljuk a diszkrét idejű spektrum alakját:

$$H(f_k) = \mu_{GE} (1 - \mu_{GE}) + 2 \frac{pq(a-b)^2 y (\cos x - y)}{(p+q)^2 |1 - ye^{-jx}|^2}. \quad (4.10)$$

A G skálatényező számítása [1]:

$$G = \frac{\mu(1-\mu)}{\sum_{k=0}^{N-1} H(f_k)}. \quad (4.11)$$

A Gilbert–Elliot-modellre:

$$G = \frac{\mu_{GE}(1-\mu_{GE})}{N \left(\mu_{GE}(1-\mu_{GE}) + 2 \frac{pq(a-b)^2 y^N}{(p+q)^2 |1-y^N|} \right)}. \quad (4.12)$$

Visszahelyettesítve a (4.9) egyenletbe, a Gilbert–Elliot-modell spektruma:

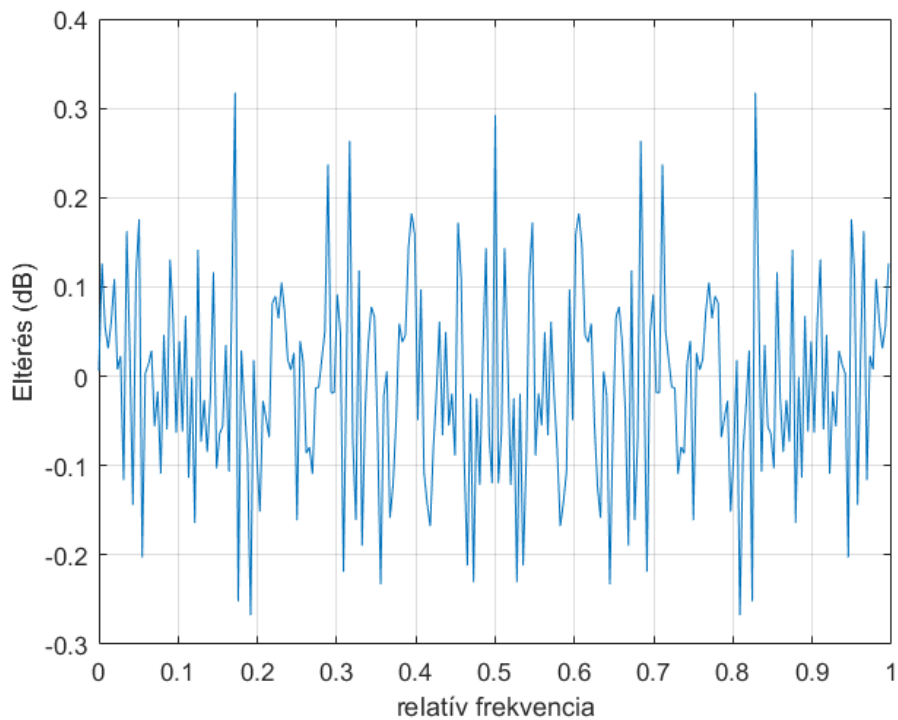
$$S_{GE}(f_k) = \frac{\mu_{GE}(1-\mu_{GE})}{N} \frac{\mu_{GE}(1-\mu_{GE}) + 2 \frac{pq(a-b)^2 y (\cos x - y)}{(p+q)^2 |1 - ye^{-jx}|^2}}{\mu_{GE}(1-\mu_{GE}) + 2 \frac{pq(a-b)^2 y^N}{(p+q)^2 |1 - y^N|}} + \mu_{GE}^2 \delta(f_k). \quad (4.13)$$

4.1.4. Szimulációs ellenőrzés

A levezetett összefüggést Matlab-alapú szimulációkkal ellenőriztem. Egy szimuláció adott (p, q, a, b) modellparaméterekkel zajlott, ezekkel generáltam egy $N \times M$ mintából álló indikátorfüggvényt, ahol N a DFT-blokk hossza és M a blokkok száma. Majd ennek az M blokknak kiszámítottam a teljesítménysűrűség-spektrumát a generált indikátorfüggvényből, továbbá a levezetésből kapott összefüggést is kiértékeltem. Az eredmények decibeleles értékeinek különbségét ábrázoltam.

A szimulációk a teljes (p, q, a, b) paraméterteret lefedték, 0,1-es felbontással. N értéke 256, 1024 és 4096 volt, és egy szimulációban 1000, 10000 vagy 100000 blokkot átlagoltam.

Az elméleti és a szimulált spektrumok eltéréseinek jellemző alakját mutatja be a 4.4. ábra. Az eltérés jó közelítéssel fehér zaj, 0 várható értékkel. A hiba szimmetrikus, mivel a nulla frekvenciától a mintavételi frekvenciáig tartó intervallumot látjuk. Az eltérés nagysága \sqrt{M} -mel csökken, N -től pedig független.



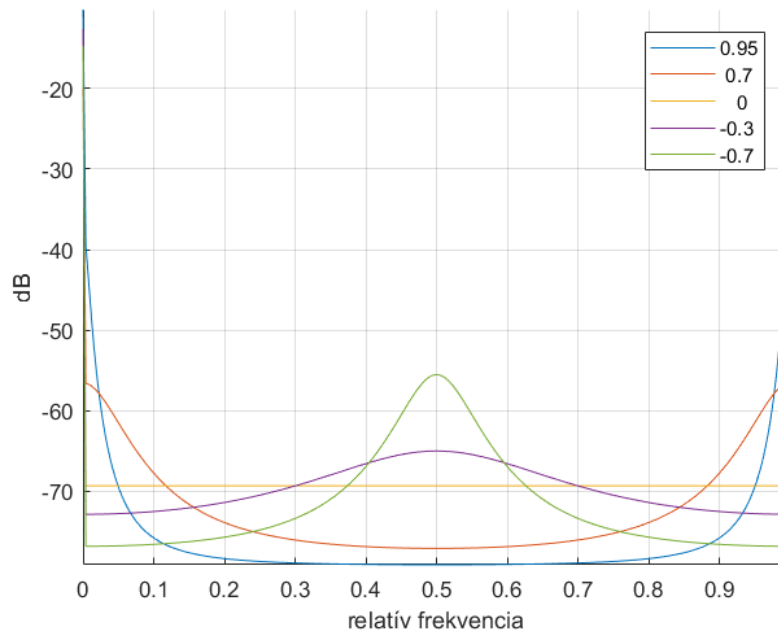
4.4. ábra. A szimulált és az elméleti spektrumok különbsége, $N = 256$, $M = 10000$

4.1.5. Diskusszió

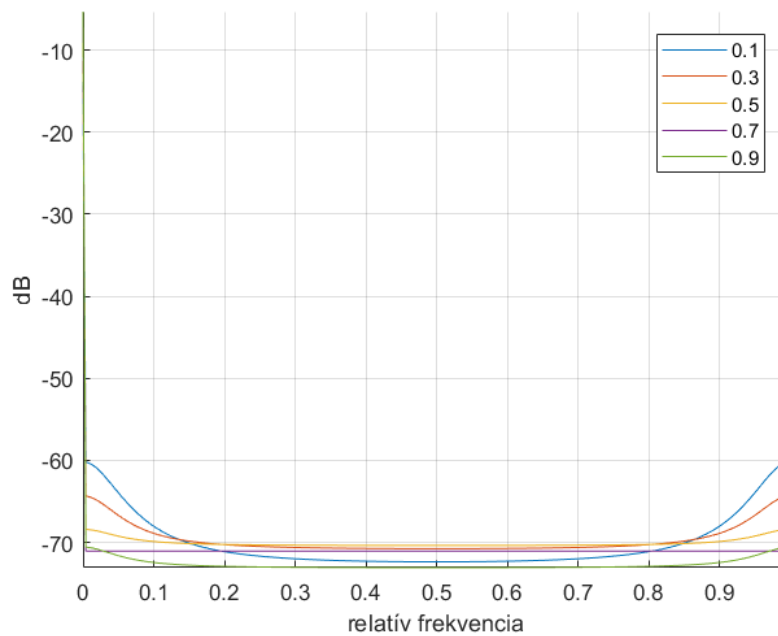
A Gilbert–Elliot-modell spektrumának alakját az y mennyiség határozza meg. 1-hez közeli y esetén a spektrum aluláteresztő jellegű, 0-hoz közeli értéknél közelítőleg fehér, -1 -hez közeli értéknél pedig felüláteresztő jellegű, ezt szemlélteti a 4.5. ábra. Az egyenkomponenshez mindig hozzáadódik az adatelérhetőségi arány négyzete.

Az a paraméter hatását szemlélteti a többi paraméter rögzítése mellett a 4.6. ábra. A b paraméterre ugyanilyen ábrát kapnánk, ha a többi paraméter rögzített.

Egyrészt észrevehető, hogy $a = b$ esetén a spektrum fehér, ez a véletlen független adatvesztés jellemzője [1]. Továbbá, minél közelebb van egymáshoz a és b , annál laposabb a



4.5. ábra. A Gilbert–Elliot-modell spektrumának lehetséges alakjai, a görbék színe y függvénye



4.6. ábra. Az a paraméter hatása, a görbék színe a függvénye, $p = 0, 2$, $q = 0, 1$, $b = 0, 7$

spektrum. Az a és b paraméterek nem befolyásolják a spektrum alul- vagy felüláteresztő jellegét, csupán ezt tompítják, szélsőséges esetben teljesen kifehérik.

4.2. Az egyszerűbb modellek spektruma

Az egyszerűbb modellek spektruma a (4.13) összefüggésből határozható meg, a származtatási feltételek behelyettesítésével. A Gilbert-modellre $a = 1$, így

$$S_G(f_k) = S_{GE}(f_k)|_{a=1} = \frac{\mu_G(1-\mu_G)}{N} \frac{\mu_G(1-\mu_G) + 2\frac{pq(1-b)^2}{(p+q)^2} \frac{y(\cos x-y)}{|1-ye^{-jx}|^2}}{\mu_G(1-\mu_G) + 2\frac{pq(1-b)^2}{(p+q)^2} \frac{y^N}{1-y^N}} + \mu_G^2 \delta(f_k). \quad (4.14)$$

A komplementer Gilbert-modell esetén $b = 0$, tehát a spektrum:

$$\begin{aligned} S_{KG}(f_k) &= S_{GE}(f_k)|_{b=0} = \\ &= \frac{\mu_{KG}(1-\mu_{KG})}{N} \frac{\mu_{KG}(1-\mu_{KG}) + 2\frac{pqa^2}{(p+q)^2} \frac{y(\cos x-y)}{|1-ye^{-jx}|^2}}{\mu_{KG}(1-\mu_{KG}) + 2\frac{pqa^2}{(p+q)^2} \frac{y^N}{1-y^N}} + \mu_{KG}^2 \delta(f_k). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Kétállapotú Markov-láncnál $a = 1$, $b = 0$, ekkor a spektrum tovább egyszerűsíthető:

$$S_{2S}(f_k) = S_{GE}(f_k)|_{a=1,b=0} = \frac{\mu_{2S}(1-\mu_{2S})}{N} \frac{1-y^N}{1+y^N} \frac{1-y^2}{|1-ye^{-jx}|^2} + \mu_{2S}^2 \delta(f_k). \quad (4.16)$$

Az összefüggés a konstans szorzóban eltér [1]-ben adottól, azonban az eltérés mértéke a paraméterek gyakorlati tartományában olyan kicsi, hogy numerikus szimulációkkal egyértelműen nem mutatható ki. A cikkbeli levezetés egy Parseval-tételt használ z-transzformáltakra, ez a lépés akkor jogos, ha N (a DFT pontszáma) minta alatt a hozzá tartozó impulzusválasz lecsillapodik. Ez a feltételezés az értékek gyakorlati tartományában elfogadható közelítés.

Ha $a = b$, akkor véletlen független adatvesztést kapunk, ilyenkor a spektrum fehér:

$$S_{VF}(f_k) = S_{GE}(f_k)|_{a=b} = \frac{\mu_{VF}(1-\mu_{VF})}{N} + \mu_{VF}^2 \delta(f_k). \quad (4.17)$$

$p + q = 1$, vagyis $y = 0$ esetén is ugyanezt a fehér spektrumot kapjuk a behelyettesítéssel, csupán arra kell figyelni, hogy ekkor $\mu_{VF} = aq + bp$.

A blokkos, független modell spektruma [1] alapján:

$$S_{BF}(f_k) = \frac{\mu_{BF}(1-\mu_{BF})}{NM} \left| \frac{\sin(f_k \pi M)}{\sin(f_k \pi)} \right|^2 + \mu_{BF}^2 \delta(f_k), \quad (4.18)$$

ahol M a blokkméret.

5. Adatvesztési modellek identifikációja

Ismert adatvesztési modellhez tartozó indikátorfüggvényt szimulálni egyszerű feladat, még akkor is, ha állapotgépet kell implementálni. Egy ilyen szimulált indikátorfüggvényből könnyen tudunk becsléseket adni a modell spektrumára is. Az inverz probléma viszont, amikor van egy adatvesztési folyamatunk, és ennek a modelljét kell meghatároznunk, lényegesen bonyolultabb. Ez az inverz feladat egy identifikációs probléma, amely a modell-és paraméterillesztési problémák általános megnevezése.

Az identifikációs feladatot általánosan két részre oszthatjuk. Az első rész a helyes modell megválasztása, a második a modell paramétereinek becslése. Az első rész jellemzően a priori ismeretek alapján történik, ugyanis a jó modell jellemzően tükrözi a valóságot, a modellezett rendszer fizikai felépítését.

Amennyiben nincs elképzelésünk, hogy milyen modell írhat le egy adatvesztési folyamatot, akkor választhatunk egy kellően általános modellt, amely paramétereit identifikáljuk. Ha az általánosabb modell paramétereit helyesen becsültük meg, és a választott általános modellnek léteznek speciális esetei, akkor a paramétereiből kiderülhet, hogy esetleg elegendő valamelyik egyszerűbb modellt használni.

Az előbb leírt módszernek azonban ára van. Egy bonyolultabb modellt identifikálni jellemzően sokszor annyi számítást igényel, mint egy egyszerűbbet. Még ha van is rá számítási kapacitás, akkor is léphetnek fel problémák abból adódóan, hogy több paramétert kell meghatározni, ehhez pedig több információra van szükség. Ha az indikátorfüggvény véges hosszú szakaszából kell identifikálnunk (ami gyakran előfordul), akkor ebből egy bonyolultabb modell paramétereit nagyobb bizonytalansággal határozhatók meg, mint egy egyszerűbb modellhez tartozók.

Az identifikációt végezhetjük idő- és/vagy frekvenciatartománybeli adatok felhasználásával. A módszerek egy része tisztán időtartománybeli, más részük elsősorban frekvenciatartománybeli, de utóbbiak is felhasználják időtartománybeli adatokat.

Az időtartománybeli módszerek elsősorban valószínűségeket, statisztikai jellemzőket mérnek, és ezek alapján következtetnek az adatvesztési modellre. A frekvenciatartománybeli módszerek felhasználják a spektrumot, és ebből határozzák meg a modell paramétereit.

5.1. A Gilbert–Elliot-modell egyértelműsége

Az identifikáció egyik kulcskérdése a modell egyértelműsége. A természet leírására szeretünk egyértelmű modelleket használni, mivel ellenkező esetben a modellben valamilyen redundancia található, amiből arra következtethetünk, hogy a modell feleslegesen bonyolult. A rész körüljárja [12] alapján a Gilbert–Elliot-modell (és következményként a belőle levezethető modellek) egyértelműségi feltételeit.

Egy rejtett Markov-modellt meghatároz a következő öt paraméter:

- a kezdeti állapoteloszlás: honnan indul a modell,
- az állapotok x száma,
- a kimenetek y száma,
- az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{x \times x}$ állapotátmeneti mátrix,
- a $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{x \times y}$ megfigyelési mátrix.

Tegyük fel továbbá, hogy minden kimenet egyedi, és a belső Markov-lánc irreducibilis és aperiodikus (ez a Gilbert–Elliot-modellre teljesül). Tekintsünk két rejtett Markov-modellt, jelöljük őket $\underline{\mathbf{A}}$ -val és $\underline{\mathbf{B}}$ -vel, a kimeneteik a i . ütemben legyen A_i és B_i .

Legyenek $Y_{(L)} = (y_1, y_2, \dots, y_L)$ kimeneti sorozatok, melyek tartalmazhatnak olyan kimeneteket is, melyeket nem adhat ki egyik kérdéses rejtett Markov-modell sem. $\underline{\mathbf{A}}$ és $\underline{\mathbf{B}}$ ekvivalensek, ha bármilyen $L \in \mathbb{N}$ és $Y_{(L)}$ esetén

$$\Pr(A_1 = y_1, A_2 = y_2, \dots, A_L = y_L) = \Pr(B_1 = y_1, B_2 = y_2, \dots, B_L = y_L). \quad (5.1)$$

Az, hogy egy rejtett Markov-modell egyértelmű, azt jelenti, hogy az előbb ismertetett valószínűségek egyértelműen azonosítják a modellt, vagyis az indikátorfüggvény egy elég hosszú sorozata alapján a modell egyértelműen visszaállítható.

Egy kétállapotú rejtett Markov-modell egyértelműségének a feltétele:

$$\text{krank}(\mathbf{B} \otimes^r \mathbf{A}) = x, \quad (5.2)$$

ahol $\text{krank}(\mathbf{M})$ az \mathbf{M} mátrix Kruskal-rangja, $\mathbf{B} \otimes^r \mathbf{A}$ pedig a megfigyelési és az állapotátmeneti mátrix soronkénti tenzorszorzata.

Egy mátrix Kruskal-rangja a legnagyobb K egész szám, melyre igaz, hogy a mátrix K tetszőleges sorát kiválasztva, azok lineárisan függetlenek. A $\mathbf{B} \otimes^r \mathbf{A}$ soronkénti tenzorszorzat:

$$\mathbf{B} \otimes^r \mathbf{A} = [\mathbf{D}_1(\mathbf{B}) \mathbf{A} \quad \mathbf{D}_2(\mathbf{B}) \mathbf{A} \quad \dots \quad \mathbf{D}_y(\mathbf{B}) \mathbf{A}], \quad (5.3)$$

ahol $\mathbf{D}_i(\mathbf{B})$ a \mathbf{B} mátrix i . oszlopából alkotott diagonálmátrix.

A képletet alkalmazva a Gilbert–Elliot-modellre (állapotátmeneti és megfigyelési mátrix: (3.9) és (3.33) egyenlet), a vizsgálandó mátrix:

$$\mathbf{W} = \mathbf{B} \otimes^r \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a(1-p) & ap & (1-a)(1-p) & (1-a)p \\ bq & b(1-q) & (1-b)q & (1-b)(1-q) \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

$p + q = 1$ és $a = b$ is szükséges ahhoz, \mathbf{W} két sora lineárisan összefüggő legyen, tehát elvileg minden más esetben egyértelműen identifikálható a Gilbert–Elliot-modell. Azonban, amennyiben az egyik feltétel teljesül, már akkor is véletlen független adatvesztést kapunk, amelyre felesleges egy ilyen bonyolult modellt alkalmazni. Általános esetben pedig beláttuk, hogy a Gilbert–Elliot-modell egyértelmű. Ennek következménye, hogy az identifikációs probléma egyértelműen megoldható, továbbá, hogy az összes speciális eset (Gilbert, komplementer Gilbert, kétállapotú Markov, véletlen független modell) is egyértelmű.

5.2. Egyes modellek identifikációs lehetőségei

Az identifikációs probléma és az egyértelműségi feltétel ismertetése után áttekintjük a vizsgált modellek identifikációs lehetőségeit.

5.2.1. A blokkos adatvesztés kezelése

A 3.7. fejezetben láttuk, hogy tetszőleges mintánkénti adatvesztési folyamat blokkosítható. A blokkos adatvesztés kezelése az identifikáció során is egyszerű, a feladat meghatározni a blokkokra vonatkozó indikátorfüggvényt.

Az első feladat felismerni, hogy blokkos adatvesztésről van szó. Ez gyakran a priori ismeretként adott, például tudjuk, hogy hány mintát fogunk össze egy kommunikációs csomagba, vagy ismert, hogy mekkora időszelvényekre bontunk egy jelet, és ebből tudjuk visszaszámolni a blokkméretet. Amennyiben ez nem áll rendelkezésre, csupán az indikátorfüggvény, akkor csak egy becslést tudunk adni a blokkméretre.

Jellemzően feltételezhetjük, hogy a vizsgált indikátorfüggvény-darabunk blokkhatáron kezdődik és blokkhatáron végződik. Amennyiben ez nem teljesül, mivel az indikátorfüggvény átmenetei csak blokkhatáron lehetnek, ezért az indikátorfüggvényből csak az első és utolsó megfigyelt átmenet közötti részből becsüljük a blokkméretet. A blokkméret a legnagyobb közös osztója az indikátorfüggvényben megfigyelt teljes, illetve üres sorozatok hosszának.

Pontosabban, a blokkméret nem feltétlenül határozható meg egyértelműen, a legnagyobb lehetséges értéke viszont egyértelmű. Ha valamilyen hosszúnak mértük egy adatvesztési folyamat blokkméretét, attól még lehet, hogy az nem is volt blokkos adatvesztés, csupán nem vártunk eleget, hogy az indikátorfüggvényben olyan átmenet keletkezzen, ami ezt megmutatná.

Amennyiben ismerjük az M blokkméretet, a felhasználásával a mintákra vonatkozó indikátorfüggvényből tudunk blokkokra vonatkozó indikátorfüggvényt képezni, úgy, hogy csak minden M . értéket veszünk figyelembe:

$$K_{B,n} = K_{M,Mn}, \quad (5.5)$$

ahol $K_{B,n}$ a blokkokra, $K_{M,n}$ a mintákra vonatkozó indikátorfüggvény. A továbbiakban ismerttetett identifikációs eljárásokat $K_{B,n}$ -re kell alkalmazni.

5.2.2. A Gilbert–Elliot-modell identifikációja

Mivel a Gilbert–Elliot-modell egy rejtett Markov-modell, az identifikációjára alkalmasak a rejtett Markov-modellek identifikációs eljárásai. Az egyik legismertebb ilyen eljárás a Baum–Welch algoritmus [13], mely iteratív módon adja meg a paraméterek legvalószínűbb értékét egy adott megfigyelési sorozatra. A futási ideje erősen függ az inicializációs értékektől, és a paraméterbecslése lehet pontatlan.

Természetesen létezik még többféle, általános rejtett Markov-modell identifikációjára alkalmas eljárás, például a Viterbi-féle útszámlálás [14], vagy egy kétlépéses algoritmus [15], mely először a rejtett állapotssorozatot próbálja meg visszaállítani, majd a második lépésben ennek felhasználásával becsli a modell paramétereit. Az ilyen általános módszerek jellemzői a nagy számítás- és memóriaigény, amely miatt például valós idejű rendszerekben az implementációjuk problémás lehet.

Természetes ötletként merül fel, hogy amennyiben ismert a spektrum, ebből lehetne azonosítani a paramétereket. Ez viszont sajnos nem tehető meg egyértelműen. Tekintsük a spektrum (4.13) képletét, és végezzük el az $p + q \mapsto X$, $pq(a - b)^2 \mapsto Y$ és $aq + bp \mapsto Z$ helyettesítéseket. Ekkor a spektrumra a következő képlet adódik:

$$S_{GE}(f_k) = \frac{\frac{Z}{X} \left(1 - \frac{Z}{X}\right)}{N} \frac{\frac{Z}{X} \left(1 - \frac{Z}{X}\right) + 2 \frac{Y}{X^2} \frac{(1-X)[\cos 2\pi f_k - (1-X)]}{|1-(1-X)e^{-j2\pi f_k}|^2}}{\frac{Z}{X} \left(1 - \frac{Z}{X}\right) + 2 \frac{Y}{X^2} \frac{(1-X)^N}{1-(1-X)^N}} + \left(\frac{Z}{X}\right)^2 \delta(f_k). \quad (5.6)$$

Látható, hogy a spektrum paraméterei valójában az X , Y és Z változók, melyek a modellparaméterek függvényei. Mivel 4 valós számból 3 valós szám képződik, információt veszünk, ezért a spektrumból a paraméterek nem határozhatók meg egyértelműen. Az nyilvánvaló, hogy a modellben információt veszünk, hiszen például állandó kimenet esetén is megtörténhet a belső állapot megváltozása, vagy akár oda-vissza változása. A spektrumból az X , Y , Z paraméterek meghatározhatók, az erre vonatkozó levezetést lásd a B. függelékben:

$$X = \frac{2 - 2\sqrt{H-1}}{2-H}, \quad (5.7)$$

$$Y = \frac{(S'_{GE}(0) - S'_{GE}(\frac{1}{2})) Z (X - Z) (2 - X) X}{2(1-X) [X (S'_{GE}(0) - S'_{GE}(\frac{1}{2})) + 2S'_{GE}(\frac{1}{2})]}, \quad (5.8)$$

$$Z = \mu_{GE} X, \quad (5.9)$$

$$H = \frac{S'_{GE}(0) - S'_{GE}(\frac{1}{2})}{S'_{GE}(\frac{1}{4}) - S'_{GE}(\frac{1}{2})}, \quad (5.10)$$

$$S'_{GE}(f_k) = S_{GE}(f_k) - \mu_{GE}^2 \delta(f_k), \quad (5.11)$$

ahol $S_{GE}(f_k)$ a modell (mért) spektruma, μ_{GE} az adatelérhetőségi arány (szintén könnyen mérhető), és $\delta(f_k)$ a (diszkrét) Dirac-delta. Jogos a kérdés, hogy van-e értelme ezeket a paramétereket kiszámítani annak ellenére, hogy nem hordozzák a modellparaméterek által meghatározott összes információt. Viszont, mivel a teljesítménysűrűség-spektrum az autokorrelációs függvény Fourier-transzformáltja, ezért az autokorrelációs függvényt is ez a három paraméter jellemzi, vagyis a statisztikai tulajdonságok kifejezhetők ezekkel a paraméterekkel. Továbbá, látni fogjuk, hogy a Gilbert- és a komplementer Gilbert-modellek három paramétere spektrumparamétereikből egyértelműen meghatározható.

Egy időtartománybeli, közelítő identifikációs módszert láthatunk [2]-ben. Ennek két lépése van, az első lépésben az állapotokat becsli, majd ez alapján a második lépésben kiszámítja a valószínűségeket. Az üres sorozatok várható hossza és szórása ismeretében meghatároz egy C határt, mely a várható hosszánál egy szórásnyival nagyobb. Amíg az üres sorozatok hossza legfeljebb ez a C határ, a rendszer az 'A' állapotban van. Ha nem, az első „túl hosszú” üres sorozat elején átvált 'B' állapotba, és mindaddig abban marad, amíg egy teljes sorozat hossza át nem lépi C -t. Ekkor ez a teljes sorozat már 'A' állapotban van, és így tovább. A módszer nyilvánvalóan közelítés, azonban egyszerű, kis számításigényű.

5.2.3. A Gilbert- és a komplementer Gilbert-modellek identifikációja

A Gilbert-modell a Gilbert–Elliot-modell speciális esete, ezért az összes, előbb megismert módszer alkalmazható. Mivel azonban ez egyszerűbb modell, ezért nyilvánvalóan léteznek egyszerűbb identifikációs módszerek.

Gilbert a modelljének bemutatása mellett ismertet hozzá identifikációs módszert is [3]. Ez az eljárás időtartománybeli, és legfeljebb három, egymás melletti mintára vonatkozó valószínűségeket használ fel. Ezekből a paraméterek egyszerű kifejezésekkel adódnak. Mivel a komplementer Gilbert-modell a Gilbert-modellből állapotátnevezés, kimenetátnevezés és kölcsönösen egyértelmű paramétertranszformáció útján megkapható, ezért ez (és az összes többi) identifikációs módszer megfelelően módosítva alkalmazható rá.

A Gilbert-modell identifikálható a spektruma alapján. Ugyanazt a módszert követve, mint a Gilbert–Elliot-modell esetén, a spektrumból az X , Y és Z értékek meghatározhatók, melyek képlete, figyelembe véve, hogy a Gilbert-modellben $a = 1$:

$$X_G = p + q, \quad Y_G = pq(1-b)^2, \quad Z_G = q + bp. \quad (5.12)$$

Három egyenletünk van három ismeretlenre, ezért az egyenletrendszer egyértelműen megoldható. A megoldás:

$$p = \frac{X_G (X_G - Z_G)^2}{(X_G - Z_G)^2 + Y_G}, \quad q = \frac{X_G Y_G}{(X_G - Z_G)^2 + Y_G}, \quad b = \frac{Z_G (X_G - Z_G) - Y_G}{X_G (X_G - Z_G)}. \quad (5.13)$$

A komplementer Gilbert-modellre teljesen hasonló gondolatmenet alapján, figyelembe véve, hogy most $b = 0$:

$$X_{KG} = p + q, \quad Y_{KG} = pqa^2, \quad Z_{KG} = aq, \quad (5.14)$$

$$p = \frac{X_{KG} Y_{KG}}{Z_{KG}^2 + Y_{KG}}, \quad q = \frac{Z_{KG}^2 X_{KG}}{Z_{KG}^2 + Y_{KG}}, \quad a = \frac{Z_{KG}^2 + Y_{KG}}{Z_{KG} Y_{KG}}. \quad (5.15)$$

A Gilbert-modellre is használható a Gilbert-Elliotra megismert időtartománybeli közelítő identifikációs módszer. Legyen C az üres sorozatok hossza várható értékének és szórásának összege. Ha egy teljes sorozat legalább C hosszú, akkor az 'A' állapotban van a modell, ennél rövidebb teljes sorozatoknál és az összes üres sorozat esetén pedig 'B'-ben. A valószínűségek a becsült állapotok és az indikátorfüggvény alapján meghatározhatók.

5.2.4. A kétállapotú Markov-modell és a véletlen független adatvesztés identifikációja

A kétállapotú Markov-modell, illetve a véletlen független adatvesztés identifikációja a legyszerűbb a vizsgált modellek közül. Véletlen független modell esetén csupán egy átlaglásra van szüksége, kétállapotú Markov-modell esetén pedig két, közvetlenül megfigyelhető valószínűség meghatározására. Itt nem az a nehéz, hogy a modell paramétereit meghatározzuk, hanem hogy felismerjük, hogy az adott modellről van szó.

A két modell együttes identifikációját a frekvenciatartományban mutatja be [16]. Az eljárás először kiszámítja az adatelérhetőségi arányt, majd időtartományban levonja a jelből. Ezután kiszámítja a teljesítménysűrűség-spektrumát, amelyből meghatározza az adatvesztési folyamat autokorrelációs függvényét. Végül erre egy autoregresszív modellt illeszt. Ez a modell pólusmentes, ha az adatvesztés véletlen független, és egypólusú, ha kétállapotú Markov-modell írja le. Ekkor a pólus és az adatelérhetőségi arány ismeretében a két paraméter egyértelműen meghatározható. A további pólusok nullától való eltérése mutatja, hogy mennyire írja le jól a kétállapotú Markov-modell az adatvesztési folyamatot.

A Gilbert-modellhez hasonlóan a spektrumparaméterek alapján ez a modell is identifikálható. Habár a (4.16) egyenlet szerint a spektrumban csupán az X és Z paraméter jelenik meg, ez egy egyszerűsített képlet, és a B. függelékben leírt módon mindhárom spektrumparaméter helyesen identifikálható. Természetesen, mivel csak két modellparaméterünk van, ezért X és Z elegendők. Ez a két spektrumparaméter jelen esetben, és a belőlük visszaállított modellparaméterek:

$$X_{2S} = p + q, \quad Z_{2S} = q, \quad (5.16)$$

$$q = Z_{2S}, \quad p = Z_{2S} - X_{2S}. \quad (5.17)$$

Egy lehetséges közelítő módszer a véletlen független modell identifikálására az időtartománybeli valószínűségek kiszámítása. Véletlen független modellre $\Pr(1|1) = \Pr(1|0)$ és $\Pr(0|1) = \Pr(0|0)$, ahol $\Pr(1|0)$ annak a valószínűsége, hogy 0 után 1 következzen az indikátorfüggvényben. Ha ezek az egyenlőségek nem állnak fenn, akkor a modell nem lehet véletlen független, viszont lehet például kétállapotú Markov, amelynek éppen ezek a paraméterei. A kétállapotú Markov-modell helyessége a két minta hosszúságú sorozatok mint

feltételek melletti valószínűségek alapján ellenőrizhető (pontosabban: észrevehető, ha nem kétállapotú Markov-modell írja le az adatvesztést).

Annak vizsgálatára, hogy egy modell mennyire ír le jól egy adatvesztési folyamatot, egy lehetséges módszer a modell elméleti spektrumának összevetése a ténylegessel. A tényleges spektrum várhatóan zajos, ezért a hiba nem csökkenthető nullára. A hibára jó becslő lehet az eltérésekből készített hisztogram.

Amennyiben ebben egyetlen csúcs van, és az a nullához közeli, akkor a becslés jó lehet. Ha egy csúcs van, de nem a nullához közel, akkor konstans szorzóban tévedtünk. Ha több csúcs van, az jelentheti azt, hogy különböző frekvenciaintervallumokon következetesen nagyobb a becsült spektrum, mint a valódi, míg másokon következetesen kisebb, vagyis a spektrum alakját rontottuk el. A konstans szorzóbeli tévedés valószínűleg rossz paraméterekre, az alakbeli tévedés valószínűleg rossz modell választására utal.

Az, hogy a modell spektruma megegyezik a mért spektrummal, nem jelenti azt, hogy jó a modell. Láttuk, hogy a Gilbert–Elliot-modellnek 4 paramétere van, a spektrumban azonban csak 3 (ezekből származtatott) paraméter szerepel. Belátható, hogy ehhez a 3 paraméterhez általános esetben végtelen sok olyan Gilbert–Elliot-modell létezik, melynek ezek a spektrumparaméterei. A spektrumparaméterek alapján a modellparamétereket egy intervallumon belüli szabad paraméter és három kötött paraméter segítségével tudjuk megadni. Amennyiben a szabad paramétert az intervallum egyik határán választjuk meg (bármilyen spektrumparaméterek esetén), akkor egy Gilbert- vagy komplementer Gilbert-modellt kapunk.

5.2.5. Véletlen független, kétállapotú Markov-, Gilbert- és komplementer Gilbert-modellek identifikációs eljárása

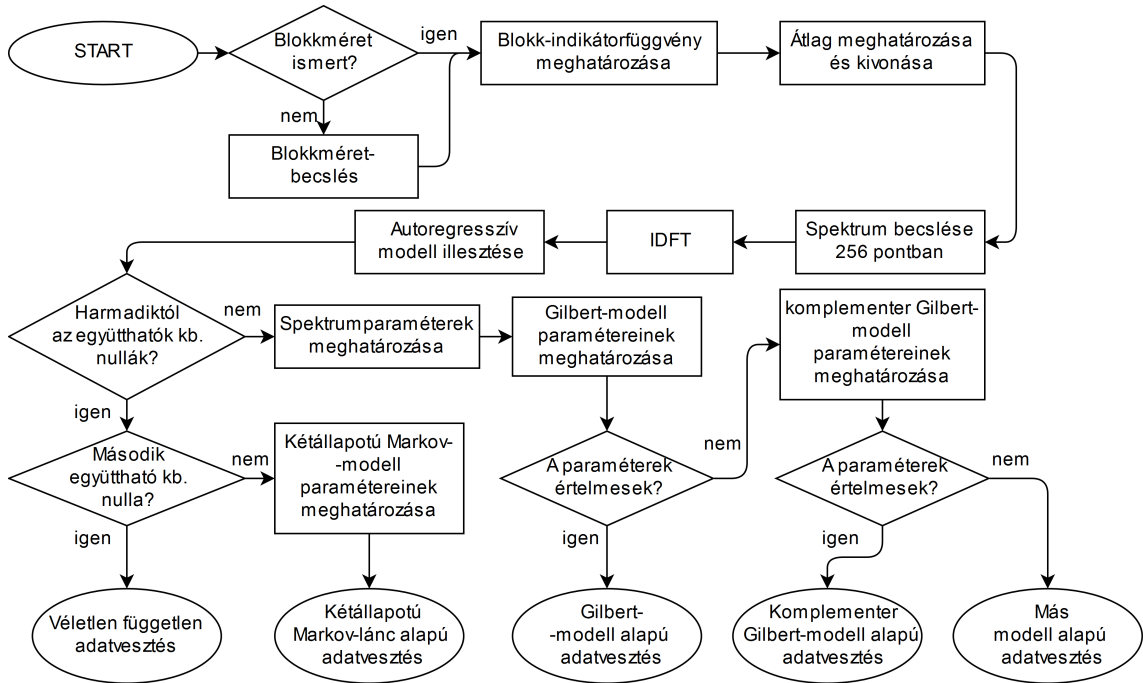
A véletlen független és a kétállapotú Markov-modell frekvenciatartománybeli identifikációs algoritmusát [16], illetve a (komplementer) Gilbert-modell spektrumparaméter alapú identifikációs módszerét felhasználva a következő eljárás alkotható a négy modell identifikációjára:

1. blokkméret becslése, blokk-indikátorfüggvény meghatározása,
2. [16] szerinti identifikációs algoritmus végrehajtása: spektrum becslése N pontban, IDFT, (K -ad rendű) autoregresszív modell illesztése,
3. ha az így kapott együtthetők a harmadikkal kezdve közel 0-k (négyzetösszegük négyzetgyöke legfeljebb δ), akkor kétállapotú Markov-modellről vagy véletlen független adatvesztésről van szó, ezt a második együtthető alapján eldönthetjük,
4. ellenkező esetben kísérlet Gilbert-modell identifikálására a spektrumparaméterek alapján,
5. ha a Gilbert-modell paraméterbecslői kívül esnek a paraméterek értelmezési tartományán, akkor az adatvesztési folyamatnak nem jó modellje a Gilbert-modell, a spektrumparaméterekből ekkor megpróbálunk komplementer Gilbert-modellt identifikálni,
6. ha a komplementer Gilbert-modell paraméterbecslői is kívül esnek a paraméterek értelmezési tartományán, akkor más modell írja le az adatvesztést.

A DFT N pontszámára az a feltétel, hogy N minta alatt az autokorrelációs függvény már lecsillapodjon. Jellemzően a gyakran használt néhány száz, ezer mintás pontszám

megfelelő. Az illesztett autoregresszív modell K rendszáma önkényesen megválasztható, [16]-ben $K = 10$, én $K = 20$ -at használtam. A δ döntési határ értéke is önkényes választás, a dolgozat számításaiban $\delta = 0, 1$.

Az eljárás folyamatábrája az 5.1. ábrán látható.



5.1. ábra. Véletlen független, kétállapotú Markov-, Gilbert- és komplementer Gilbert-modellek identifikációs eljárása

Először a kétállapotú Markov és a véletlen független modellt próbáljuk ki, mert [16] eljárásának jó kritériuma van rá, hogy mikor nem ezek a modellek írják le az adatvesztést. Utána, feltételezve, hogy a rendszer inkább működik, mint nem, előbb Gilbert, majd végül a komplementer Gilbert-modellt próbáljuk ki. Ha az előzetes ismeretekből az következne, akkor e két modell ellenőrzési sorrendjét felcserélhetjük.

Az eljárás hátránya, hogy a (komplementer) Gilbert-modellt csupán a paraméterek értelmezési tartománya alapján ellenőrzi, ezért várhatóan többször kapjuk eredményül ezeket a modelleket, mint amikor tényleg jól írják le az adatvesztést.

5.2.6. Magasabbrendű Markov-modellek identifikációja

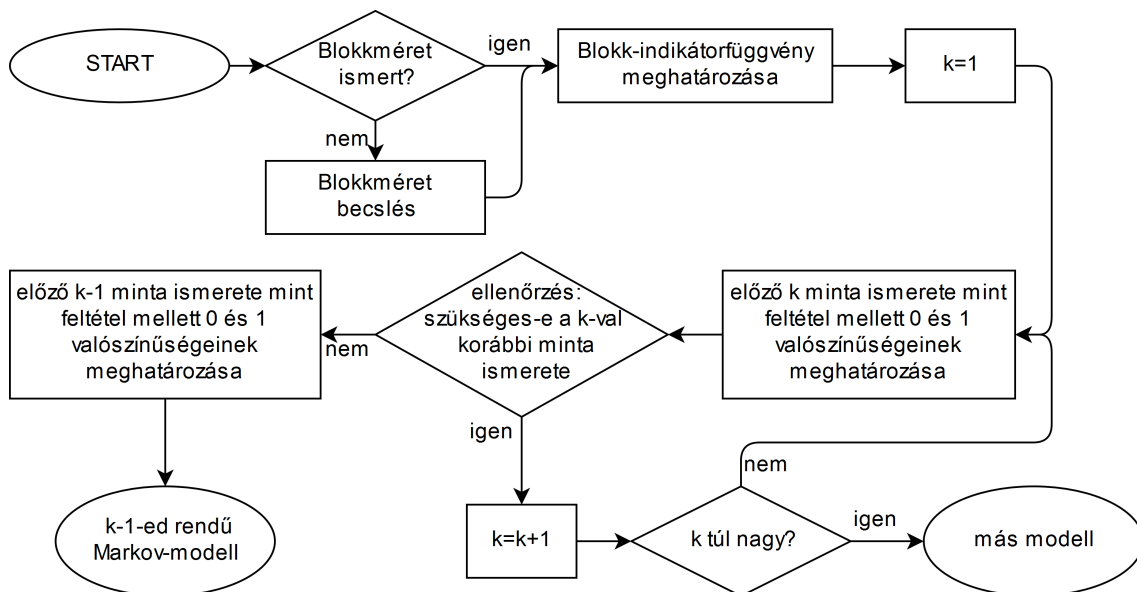
Az 5.2.4. fejezetben a véletlen független és kétállapotú Markov-modell időtartománybeli identifikációjára megismert valószínűségmérés alapú módszer általánosítható magasabbrendű Markov-modellek identifikálására.

Meghatározzuk az egyesek és nullák valószínűségeit, feltéve, hogy az előző két, három stb. mintát ismerjük. Véletlen független modellnél ezek a valószínűségek nem függenek a feltételtől, kétállapotú Markov-modellnél pedig csak a legutolsó mintától függenek. Amennyiben ezek az egyenlőségek nem állnak fent, akkor az adatvesztés nem lehet véletlen független, illetve kétállapotú Markov-modell, de ilyen módon a modellek helyessége nem bizonyítható. Ha ezekkel a valószínűségekkel szeretnénk leírni az adatvesztést ezek után, akkor észrevehetjük, hogy amiket meghatároztunk, azok egy magasabbrendű Markov-modell paraméterei.

Az előző gondolat alapján mondhatjuk, hogy egy k -adrendű modellt elfogadunk, ha még egy minta bevezetésével a valószínűségeket meghatározva, majd ebből azokat a párokat tekintve, ahol csak az első (a legrégebbi) minta különböző, a hozzájuk tartozó valószínűségek (közelítőleg) megegyeznek. Ez alapján az eljárás:

1. blokkméret becslése, blokk-indikátorfüggvény meghatározása,
2. $k = 1$,
3. az adott minta 0 és 1 értékéhez tartozó valószínűségek meghatározása, az előtte lévő k minta ismerete mint feltétel mellett,
4. ellenőrzés, hogy szükség van-e a k -val ezelőtti mintára, nem elég-e $k - 1$: a 0-val és 1-gyel kezdődő, de utána azonosan folytatódó megelőző mintasorozatokhoz tartozó valószínűségek közelítőleg megegyeznek-e,
5. ha nem elég $k - 1$ minta, akkor $k = k + 1$, és folytatás a 3. ponttól,
6. ha elég $k - 1$ minta, akkor ez egy $k - 1$ minta memóriájú modell, a valószínűségek meghatározása.

Az eljárás folyamatábráját az 5.2. ábra szemlélteti.



5.2. ábra. Magasabbrendű Markov-modellek identifikációs eljárása

Ha a modell memóriája 0 minta, az a véletlen független adatvesztés, ha 1 minta, az a kétállapotú Markov-lánc, általánosan ha k minta, akkor k -adrendű Markov-modell. Ha k túl nagyra nő, akkor célszerű az eljárást leállítani, és azt mondani, hogy nem magasabbrendű Markov-modell írja le az adatvesztést.

6. Mérési eredmények

A fejezetben ismertetem az adatvesztés vizsgálatára végzett méréseimet. A méréseket különböző kommunikációs lehetőségek esetén végeztem, mivel ezek voltak könnyen hozzáférhetőek. A mérések között UDP-s kapcsolaton való és Skype-os adatátvitel szerepelt. Továbbá, a BME MIT-en korábban elvégzett rádiókommunikációs mérési adatokra is megpróbáltam adatvesztési modellt illeszteni.

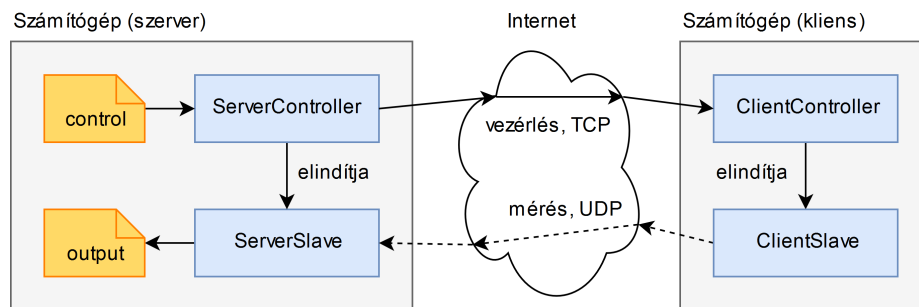
Jövőbeli vizsgálatok témáját képezhetik az iparban használt protokollok. Például a MODBUS protokollt [17] PLC-k közötti kommunikációra fejlesztették ki, melyet lehet implementálni Ethernet hálózaton. Az EGD (Ethernet Global Data) [18] UDP-s kommunikációval tesz lehetővé PLC-k közötti adatcserét. A Zigbee [19] egy vezeték nélküli ad-hoc hálózat specifikáció, amellyel kialakíthatók szenzorhálózatok, ipari irányítási vagy épületautomatizálási rendszerek. A SENT [20] egy autóiparban használt, mérési adatok begyűjtésére kifejlesztett kommunikációs protokoll.

6.1. Adatátvitel UDP-s kapcsolaton

Az első mérésekkel UDP-s kapcsolat adatvesztését vizsgáltam. Az UDP protokoll, ellenben a TCP-vel, nem biztosítja a csomagok megbízható átvitelét, a küldő feladja a csomagot, ami vagy megérkezik, vagy nem. A csomag elveszhet például a hálózati elemek túlterhelése vagy hibás átvitel miatt.

6.1.1. A mérési elrendezés

A mérési elrendezést a 6.1. ábra szemlélteti. A mérés két, az interneten keresztül összekötött számítógép között zajlik. Az egyik számítógépet szervernek, a másikat kliensnek nevezzük. A mérés során négy, saját fejlesztésű programra van szükség, ezek egy-egy vezérlő és egy-egy mérőprogram a kliensen és a szerveren. A vezérlőprogramok a ServerController és a ClientController, a mérőprogramok pedig a ServerSlave és a ClientSlave.



6.1. ábra. UDP-s mérési elrendezés

A mérés paramétereit, hogy a két számítógép „milyen távol” van egymástól (végpontok), közöttük milyen kapcsolat van, és a kliens bonyolít-e közben jelentős párhuzamos hálózati forgalmat.

Egy mérés több menetből áll. A menetek paramétereit, hogy milyen időközönként, mekkora és hány darab csomagot küldünk át. Az azonos mérésbe tartozó menetek nyilvánvalóan azonos végpontok között, azonos kapcsolattal és párhuzamos terhelés mellett zajlottak. Egy menet pedig több csomag átküldéséből áll, a csomagparaméterektől függően.

A mérés paramétereit a mérés előtt kell beállítani, és ezek egy mérés során állandók. A menetek paramétereit is a mérés előtt kell megadni, egy control fájlban. A paraméterek értékeit a 6.1. táblázat tartalmazza. A menetek paramétereinek meghatározásakor a maximális sávszélességigény – az elérhető sávszélességre való tekintettel – 640 kbps volt. A megosztott mobilinternetes kapcsolatot csak VPN-nel együtt tudtam mérni.

Paraméter	Értékkészlet
végpontok	helyi hálózat két gépe; Szentgotthárd - Budapest (kb. 250 km légvonalban)
kapcsolat	Ethernet; VPN (Hamachi); egyik végpont megosztott mobilinterneten keresztül + VPN (Hamachi)
párhuzamos terhelés	nincs; nagy fájl feltöltése Google Drive-ra
csomagok mérete	100 bájt; 200 bájt; 500 bájt; 1000 bájt
egyszerre küldött csomagok száma	1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128; 256; 512
küldési időköz	100 ms; 200 ms; 500 ms; 1000 ms

6.1. táblázat. Az UDP-s mérések paramétereit

A továbbiakban egyes paramétereket, értékeket rövidítve is fogok használni, illetve a csomagparamétereknek három kombinációját elneveztem. Ezek feloldását a 6.2. táblázat tartalmazza.

Rövidítés, kifejezés	Jelentés
VP	végpontok
KCS	kapcsolat
PT	párhuzamos terhelés
HH	helyi hálózat
SZTG-BP	Szentgotthárd-Budapest
ETH	Ethernet
MI	mobilinternet + VPN
normál csomagok	100, 200, 500 és 1000 bájtos csomagokból 1, 2 vagy 4 darab elküldése 1000, 500 és 200 ms-enként
gyakori küldés	100, 200, 500 és 1000 bájtos csomagokból 1, 2, 4 vagy 8 darab elküldése 100 ms-enként
sok csomag	100, 200, 500 és 1000 bájtos csomagokból 8... 512 darab elküldése 1000, 500 és 200 ms-enként

6.2. táblázat. Az UDP-s méréseknél használt rövidítések és kifejezések jelentése

Az egyes mérések paramétereit a 6.3. táblázatban láthatjuk, a sorszámra az eredményeknél fogunk hivatkozni.

Sorszám	VP	KCS	PT	Csomagok
1	HH	ETH	nincs	normál
2	HH	ETH	van	normál
3	HH	ETH	nincs	normál
4	HH	ETH	van	normál
5	HH	VPN	nincs	normál
6	HH	VPN	van	normál
7	SZTG-BP	ETH	nincs	normál
8	SZTG-BP	ETH	van	normál
9	SZTG-BP	VPN	nincs	normál
10	SZTG-BP	VPN	van	normál
11	SZTG-BP	MI	nincs	normál
12	SZTG-BP	MI	van	normál
13	SZTG-BP	ETH	nincs	gyakori küldés
14	SZTG-BP	ETH	van	gyakori küldés
15	SZTG-BP	VPN	nincs	gyakori küldés
16	SZTG-BP	VPN	van	gyakori küldés
17	SZTG-BP	MI	nincs	gyakori küldés
18	SZTG-BP	MI	van	gyakori küldés
19	SZTG-BP	ETH	nincs	sok csomag
20	SZTG-BP	ETH	van	sok csomag
21	SZTG-BP	VPN	nincs	sok csomag
22	SZTG-BP	VPN	van	sok csomag
23	SZTG-BP	MI	nincs	sok csomag
24	SZTG-BP	MI	van	sok csomag

6.3. táblázat. Az UDP-s mérések paraméterei

Egy mérés során a ServerController-t és a ClientController-t kell elindítani a két számítógépen. A ServerController beolvassa a control fájlt, és ez alapján vezérli a mérést. Miután csatlakozott a ClientController, TCP-s kapcsolaton keresztül vezérli a menetek végrehajtását.

A menet elején a ServerController átküldi a menet paramétereit a ClientControllernek, majd elindítja a ServerSlave-et. A ServerSlave létrehozza a menethez tartozó kimeneti állományt, és várja a csomagokat. A ClientController, miután megkapta a menet paramétereit, elindítja a ClientSlave programot. A ClientSlave program vár fél percet, majd a menet paramétereinek megfelelő számú és méretű csomagot küld UDP-s kapcsolat segítségével, a megadott gyakorisággal. Pontosabban azt szimulálja, hogy adott gyakorisággal keletkezik adott mennyiségű adat, ezt periodikusan ellenőrzi, majd a keletkezett adatokat elküldi.

Minden átküldött csomag tartalmaz egy sorszámot, ami a meneten belüli pozícióját azonosítja. A csomag többi része érdektelen. A ServerSlave a megkapott csomagok sorszámait kinyeri, majd lementi a kimeneti fájlba. Egy menetben a csomagok küldése tíz percig tart, miután a ClientSlave befejezi a futását. Ez után a ServerSlave vár még fél percet (pontosabban, a ServerSlave az elindításától kezdve 11 percig fut), majd lezárja a kimeneti fájlt és befejeződik. További egy perc várakozás után a ServerController elindítja a következő menetet.

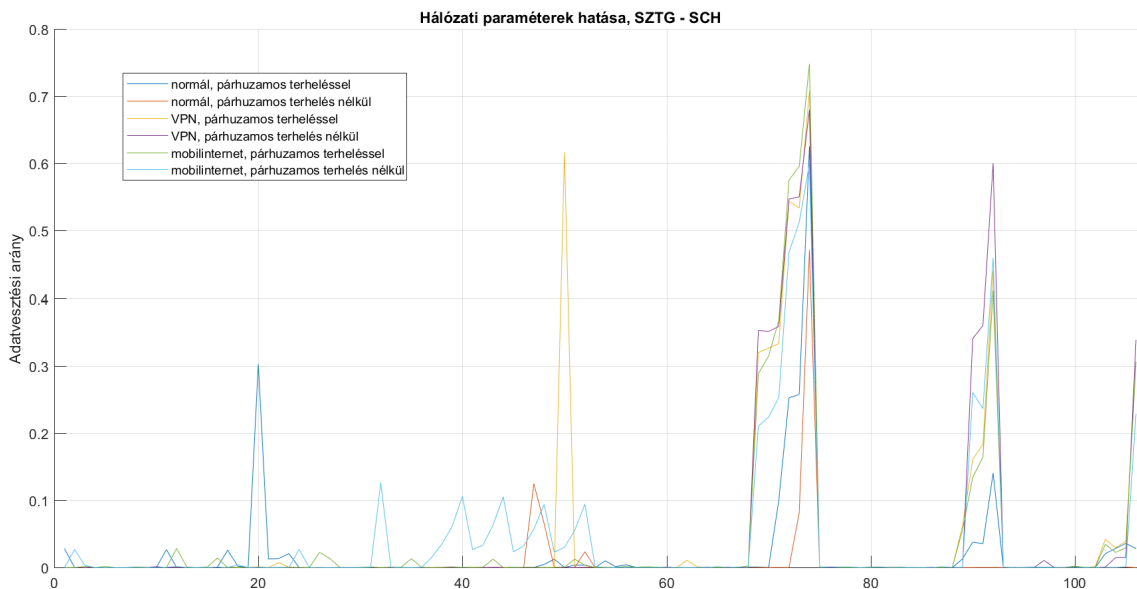
A kimeneti fájlból visszaállítható, hogy egy menetben milyen sorszámú csomagok érkeztek meg, azaz előállítható az indikátorfüggvény.

6.1.2. Mérési eredmények

Alapvető vizsgálatok

A mérések elvégzése után minden menetre meghatároztam az adatvesztési arányt. Logikusnak tűnik a gondolat, hogy nagyobb terhelés esetén több csomag vész el, nagyobb lesz az adatvesztési arány, ezért összehasonlítottam azokat a meneteket, amikor volt párhuzamos terhelés azokkal, amikor nem. A helyi hálózat esetén nem tapasztaltam szignifikáns eltérést, mindkét esetben körülbelül ugyanolyan volt az elveszett csomagok eloszlása.

A nagyobb távolságú mérések esetén a hálózati paraméterek hatását szemlélteti a 6.2. ábra. Az azonos x koordinátához tartozó adatok azonos csomagparaméterekhez (méret, darabszám, küldési időköz) tartoznak. Látható, hogy a grafikonok nagyjából együtt futnak, esetenként egyik-másik kiemelkedik a többi közül. Az igen nagy adatvesztési arányok egyrészt időszakos internetkapcsolat-kiesésből, másrészt sok (legalább 128) csomag egyszerre való elküldéséből származnak. Ekkor válnak el egymástól valamilyen szinten a párhuzamos terheléssel és nélküle történt mérések, egyébként ekkora mértékű párhuzamos terhelés nem befolyásolta észrevehetően a csomagvesztési arányt, nem volt jelentős hatása a mögöttes hálózatra.



6.2. ábra. Hálózati paraméterek összehasonlítása

A csomagparaméterek közül elsősorban az egyszerre elküldött csomagok száma volt a meghatározó. 64 egyszerre elküldött csomagig az adatvesztési arány nagyjából a 0...0,1-es intervallumban mozgott, több csomag esetén drasztikusan megnövekedett, ezek a menetek okozták az akár 75%-os adatvesztést. Ezzel párhuzamosan, amikor adott mennyiségű adatot szeretnénk továbbítani, és választhatunk, hogy ritkábban, de akkor nagyobb adagokat, vagy sűrűbben, kisebb mennyiségeket továbbítsunk, ez alapján érdemes az utóbbit választani. Hasonlóan érdekesebb kevesebb, nagyobb csomagot használni a több, kisebb helyett, amikor az egyszerre küldendő adatokat szétbontjuk.

A méréseknek nem volt célja, hogy velük a csomagvesztésnek az internet napi forgalomváltozása okozta változását mérjük, viszont mivel még a „jelentős párhuzamos terhelés” sem befolyásolta érdemben a teljes forgalmat, és a mérések hosszabb ideig, szinte folyamatosan zajlottak, ezért az idő hatását is le lehetett mérni. A tapasztalatok azt mutatták, hogy nincs lényeges hatása az időpontnak az adatvesztésre, bár ez az állítás nem túl erős, mivel behatóbb vizsgálatához további mérésekre lenne szükség. Ezekben a mérésekben azonos

csomagparaméterekkel kellene mérni, néhány napon át.

Identifikáció Gilbert-Elliot speciális esetként, blokkméretbecsléssel

Mivel rendelkezésre állt az indikátorfüggvény, megpróbáltam minden menet indikátorfüggvényét identifikálni az 5.2.5. fejezetben leírt algoritmus szerint ($N = 256$ pontban becsülve a spektrumot). Észrevehetjük, hogy bár tudjuk, hogy az indikátorfüggvény csomagokra vonatkozik, és a csomagok egymástól függetlenül veszhetnek el, az identifikációt mégis azzal kezdjük, hogy blokkméretet becslünk. Itt nem használtuk fel a „nem blokkos” a priori ismeretet, ennek a hatását is vizsgáljuk. Az egyes menetek identifikációjának eredményeit a 6.4. táblázat tartalmazza. Itt mind a 24 mérés eredményeinek összesítését látjuk.

Kimenet	Darabszám
összesen	852
nincs adatvesztés	499
kétállapotú Markov	103
blokkos, helytelenül	98
véletlen független	86
más modell	54
Gilbert	12

6.4. táblázat. Az UDP-s menetek első identifikációjának összesített eredményei

A menetek több, mint felében minden csomag megérkezett, ekkor nem érdemes identifikációval próbálkozni. Amikor volt adatvesztés, ennek körülbelül 30%-a kétállapotú Markov-modell szerint, nagyjából 25%-a véletlen független modell szerint történt. Azt, hogy ilyen eredményt kaptunk, magyarázhatja, hogy az egyes menetekben más paraméterekkel történt az átvitel, ezért abban a pillanatban más adatvesztési modell volt jellemző.

Látjuk, hogy az adatvesztést tartalmazó menetek közelítőleg 27%-át helytelenül blokkosnak becsülte az algoritmus. Ez jól demonstrálja, hogy ha az identifikációs algoritmusból kihagyunk a priori információkat, akkor azzal a becslésünk pontosságát jelentősen ronthatjuk. Ez a magas hibaarány az oka annak, hogy az eredményeket itt nem adtam meg mérésekre lebontva.

Az adatvesztést tartalmazó menetek hozzávetőleg 14%-át úgy minősítette az algoritmus, hogy más adatvesztési modell írja le őket jól. Azok esetén, melyekre a Gilbert-modellt adta, gyakran csak hasonlóság volt a mért és az illesztett spektrumok között, hiszen az eljárás, amire nem tudott kétállapotú Markov-modellt vagy véletlen független adatvesztést illeszteni, arra próbált rákényszeríteni egy (komplementer) Gilbert-modellt. A mért spektrumokban időnként megjelentek „középfrekvenciás” kiemelések, illetve periodikus csúcsok is, és ilyen esetekre is egy Gilbert-modellt illesztett az algoritmus.

Érdekes, hogy egy komplementer Gilbert-modell sem adódott eredményül. Amikor az adatvesztési arány olyan nagy volt, hogy erre esély lett volna, akkor kiderült, hogy más modell írja le jól a folyamatot.

Identifikáció Gilbert-Elliot speciális esetként, blokkméretbecslés nélkül

Az identifikációt újra elvégeztem a blokkméretbecslés kihagyásával, vagyis annak a tudásnak a felhasználásával, hogy az adatvesztés nem blokkos. Az eredményeket a 6.5. táblázat tartalmazza. Itt az alaposabb vizsgálat céljából az egyes mérések meneteit külön-külön jelenítettem meg.

Az összesítésből látható, hogy amit blokkméretbecsléssel együtt hibásan blokkos adatvesz-

Mérés sorszám	Nincs adatvesztés	Véletlen független	Kétállapotú Markov	Gilbert	Más modell
1	29	1	4	0	2
2	35	0	0	0	1
3	35	0	1	0	0
4	36	0	0	0	0
5	32	2	1	0	1
6	30	3	1	0	2
7	32	2	1	0	1
8	24	3	7	0	2
9	30	3	0	0	3
10	31	3	1	0	1
11	26	3	3	1	3
12	15	11	8	0	2
13	6	4	5	0	1
14	6	1	2	2	5
15	4	8	3	0	1
16	5	6	1	0	4
17	0	15	0	0	1
18	4	2	6	1	3
19	35	1	14	1	3
20	18	1	31	0	4
21	25	3	13	2	11
22	16	0	17	1	20
23	15	8	16	3	12
24	10	6	14	1	23
Összesen	499	86	149	12	106

6.5. táblázat. Az UDP-s menetek második identifikációjának eredményei

tésnek ítélt az algoritmus, arról most kb. fele-fele arányban állapította meg, hogy kétállapotú Markov, vagy hogy más modell illeszkedik rá.

A helyi hálózatos mérésekben csak normál csomagparamétereket használtam, ezzel jellemzően „nincs adatvesztés” lett az eredmény. Amikor adatvesztés volt, azt általában vagy véletlen független, vagy kétállapotú Markov-modell írta le.

A Szentgotthárd és Budapest közötti, normál Ethernetes kapcsolat méréséből megállapítható, hogy a párhuzamos terhelés hatására növekszik azoknak a meneteknek a száma, ahol van adatvesztés, és ezt jellemzően kétállapotú Markov-modell írja le. Ez a tendencia, bár enyhébben, de látszik a VPN-es és a mobilinternetes kapcsolatok esetén is. Továbbá, a mobilinternetes kapcsolat mellett több adatvesztés fordult elő, mint a többi esetben.

A normál és a gyakori küldés csomagparaméterek esetén az adatvesztésre a véletlen független modell a jellemző, míg sok csomag küldése esetén a kétállapotú Markov-modell a többségi választás.

Az adatvesztést tartalmazó menetek körülbelül harmadát nem tudta az eljárás besorolni. Ezek többsége a Szentgotthárd – Budapest, sok csomag, VPN vagy mobilinternet + VPN kombinációk esetén történt. A többi esetben a sikertelen identifikációt okozhatta az, hogy nem volt elég minta egy kellően pontos identifikációhoz, hiszen voltak menetek, amelyekben körülbelül 600 minta volt.

Identifikáció magasabbrendű Markov-modellként

Mivel a menetek nem elhanyagolható részét nem tudtam Gilbert-Elliot speciális esetként identifikálni, megpróbáltam a magasabbrendű Markov-modellek identifikációjára használható eljárást (lásd 5.2.6. fejezet) is. Itt sem használtam blokkméretbecslést. A 6.6. táblázat tartalmazza az eredményeket, szintén mérésekre lebontva.

Az első oszlopban a mérés sorszámát, az utolsó sorban az összesített eredményeket látjuk. Az NA jelentése nincs adatvesztés, a táblázat címsorában lévő számok a modell memóriahosszát (rendszerét) jelzik. A 0 mintás memóriájú modell a véletlen független, az 1 mintás a kétállapotú Markov-lánc. Az utolsó oszlop tartalmazza a más modelleket, amely itt azt jelenti, hogy 20 vagy annál több minta memóriájú, vagy teljesen más modell írja le az adatvesztést.

#	NA	Modell memóriahossza															M
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	15	16	17	
1	29	2	2	2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2	35	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	35	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	36	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	32	2	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	30	3	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	32	2	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	24	3	7	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	30	3	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	31	3	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	26	3	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	15	12	3	5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	6	4	2	0	1	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	1
14	6	1	2	1	2	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0
15	4	8	1	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
16	5	6	0	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
17	0	15	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	4	3	1	3	1	2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
19	35	1	9	2	0	2	0	1	0	1	2	1	0	0	0	0	0
20	18	1	18	1	1	4	1	1	4	2	0	0	0	0	0	0	3
21	25	3	5	1	3	0	0	0	2	1	3	0	0	1	0	0	10
22	16	0	10	2	2	2	2	5	0	0	2	0	2	0	0	0	11
23	15	8	2	3	2	1	1	3	6	1	0	0	0	0	2	0	10
24	10	6	6	5	0	2	2	6	3	1	0	1	0	1	1	0	10
Σ	499	89	72	36	22	17	6	17	21	7	7	3	2	3	3	1	47

6.6. táblázat. Az UDP-s menetek harmadik identifikációjának eredményei

Ez a módszer is körülbelül ugyanazokat a meneteket ismerte fel véletlen függetlennek, mint az előző. Kicsit kevesebb kétállapotú Markov-modell született; ami az előző identifikáció során kétállapotú volt, az itt lehetett másod-, harmad-, vagy magasabbrendű is. Ezeknek az eltéréseknek az oka, hogy a két identifikációs módszerben közelítőleg vizsgálunk különböző egyenlőségeket, ugyanarra a modellre.

A kevés adatvesztést tartalmazó menetekkel ennek a módszernek problémái voltak, többször is előfordult például, hogy egyetlen 7 minta hosszú üres sorozat vont, és ezt 7 minta memóriájú modellnek ismerte fel a módszer.

Szentgotthárd és Budapest között a normál és a gyakori küldés esetén itt is a véletlen független, sok csomag küldésénél pedig valamilyen Markov-modell a helyes. Ezen belül normál ethernetes kapcsolatnál kétállapotú, VPN, illetve mobilinternet esetén pedig kétállapotú vagy magasabbrendű volt az eredmény. Érdekes, hogy ezeknél párhuzamos terhelés hatására a modell rendje csökken.

Az eredmények szűrése

Mindhárom futtatáskor, a kevés mintából álló meneteknél, illetve a kevés üres sorozatot tartalmazó menetek esetén gyakran előfordult nyilvánvalóan rossz eredmény. Ennek oka valószínűleg a kevés bemenő adat volt, ezért azokat a kimeneteket is összesítettem, ahol legalább 5000 minta és legalább 5 üres sorozat volt. Az első eljárás (blokkméretbecslés nélküli) szűrt eredményeit a 6.7. táblázat tartalmazza, a csupa nulla sorok kihagyásával.

Mérés sorszám	Véletlen független	Kétállapotú Markov	Gilbert	Más modell
11	0	1	0	0
13	0	1	0	0
14	0	0	2	1
15	1	0	0	0
16	0	0	0	2
17	15	0	0	1
18	0	3	0	2
19	0	3	1	0
20	0	14	0	4
21	1	1	2	8
22	0	8	1	9
23	1	5	3	10
24	0	10	1	8
Összesen	18	46	10	41

6.7. táblázat. Az UDP-s menetek második identifikációjának szűrt eredményei

Ha a blokkméretbecslést is használtuk volna, most az sem adott volna hamis blokkos eredményeket, vagyis „értelmes mennyiségű” bemenő adattal a blokkméretbecslés is helyes eredményt hoz.

A helyi hálózatos mérésekből, továbbá Szentgotthárd és Budapest közötti normál csomagok küldésekor, Ethernet, illetve VPN esetén nem keletkezett (mobilinternetnél is csak egyszer) annyi adatvesztés, hogy itt megjelenjenek az eredmények.

A gyakori küldéssel történő menetekben egyszer előfordult (mobilinternet esetén), hogy egy kivétellel az összes menetben fellépett véletlen, független adatvesztés. Ez lehet, hogy kiugró érték, mivel a többi gyakori küldés esetén mérésenként néhány menetben keletkezett elég adatvesztés, hogy ide bekerüljön.

Sok csomag küldésekor látszik, hogy párhuzamos terhelés esetén növekszik az adatvesztés, amit Ethernet esetén kétállapotú Markov-modell, VPN és mobilinternet esetén kétállapotú Markov vagy egyéb modell jellemez. VPN és mobilinternet esetén a párhuzamos terheléstől függetlenül voltak olyan menetek, melyekre más modellt adott az eljárás. Ez az összes menet kb. 35%-át az jelentette.

A hosszabb memóriájú modellekre vonatkozó identifikációs eljárás szűrt eredményei a 6.8. táblázatban láthatók, szintén a csupa 0 sorok nélkül. Ez az eljárás ugyanazt a 18 menetet

Sorszám	Modell memóriahossza												Más modell
	0	1	2	3	4	5	6	7	11	15	16	17	
11	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
14	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
15	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
17	15	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	1	1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	1
19	0	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
20	0	10	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	3
21	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	10
22	0	6	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	11
23	1	1	0	1	1	1	2	1	0	0	1	0	10
24	0	3	2	0	0	1	1	0	0	1	1	0	10
Összesen	18	25	6	3	4	2	3	1	1	2	2	1	47

6.8. táblázat. Az UDP-s menetek harmadik identifikációjának szűrt eredményei

minősítette véletlen függetlennek, mint az első. Az eljárás az előzőnél kb. 2/3-szor kevesebb menetet ítelt kétállapotú Markov modellnek, de ez még így is a legnagyobb létszámú csoport. Ami az előbb kétállapotú volt, az most lehet másod-, harmad-, vagy magasabbrendű modell. Természetesen itt is csak azokban a mérésekről szerepel sor a táblázatban, mint az előbb.

A szűréssel jelentősen csökkent a magasabbrendű modellek száma, ez arra utal, hogy azok elsősorban az egyetlen, néhány minta hosszú üres sorozatot tartalmazó indikátorfüggvényekből származnak. A normál és a gyakori küldés esetére ugyanazt lehet elmondani, mint az előző esetben.

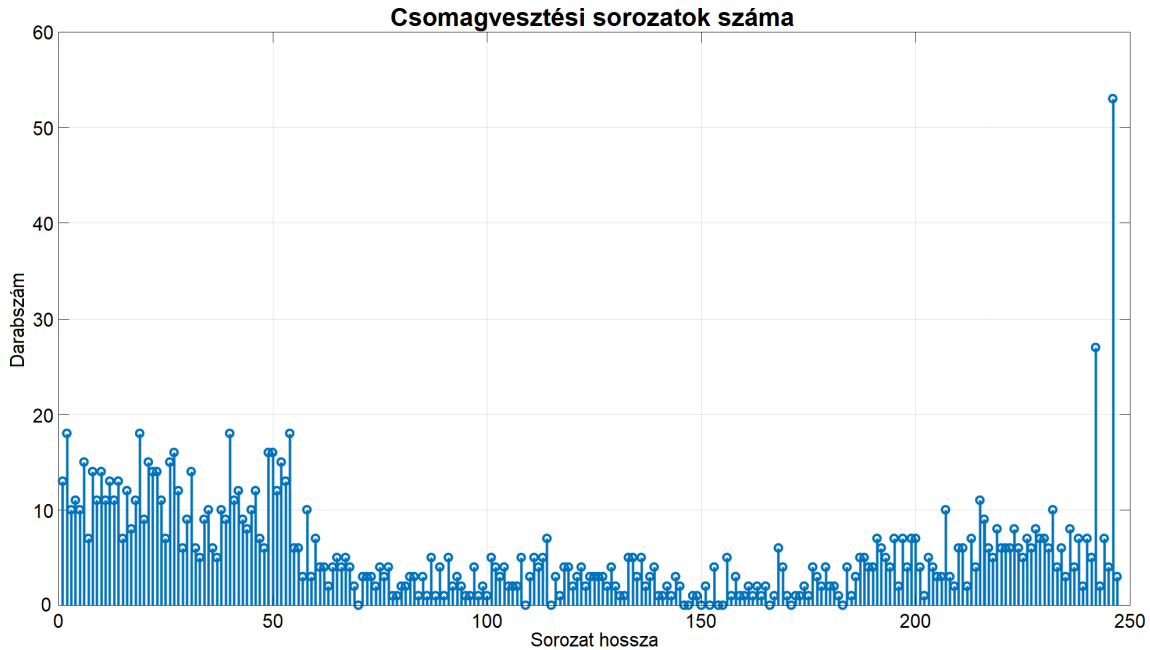
Sok csomagnál párhuzamos terhelés hatására valóban növekszik az adatvesztés, nem csökken azonban a Markov-modell rendje. Az összes menetnél ez a csökkenés csak látszólagos, mivel a kisebb adatvesztésnél gyakrabban fordulhatnak elő azok az esetek, amikor egyetlen üres sorozatot tartalmaz az indikátorfüggvény, amiről már ismert, hogy hibásan lesz magasabbrendű modell.

Sajnos most is sikertelen volt a menetek kb. 35%-ának az identifikációja. Ez a sok csomag, VPN vagy mobilinternet paraméterű mérésekben fordult elő.

A „más modell” eredmény vizsgálata

A sikertelenül identifikált menetekben az üres sorozatok eloszlására jellemző, hogy alapvetően hosszabb üres sorozatból kevesebb van, viszont egy adott hosszánál található egy kiemelkedés. Erre mutat egy példát a 6.3. ábra. Itt két ilyen csúcsot láthatunk, az ábra jobb szélén, körülbelül a 245 minta hosszú sorozatnál. Látható, hogy az egyik nagysága hozzávetőleg háromszorosa a rövid sorozatok gyakoriságának, ami érthetően okozhatta a sikertelen identifikációt, hiszen a vizsgált modellekben az üres sorozatok valószínűsége csökken, ahogy a hosszuk növekszik, és egy ilyen mértékű eltérésre nagy biztonsággal mondhatjuk, hogy nem véletlen eredetű.

Bár nem feltétlenül ilyen erősen, de ez a jelenség volt tapasztalható a többi nem identifikálható, VPN-es vagy mobilinternetes menetnél is. Ezek közös jellemzője az volt, hogy egyszerre legalább 128 csomagot próbált meg a program kiküldeni. Ezek valószínűleg a VPN szoftvert túlterhelték, ami miatt belőlük viszonylag sokat (de itt még valamilyen de-



6.3. ábra. Példa egy sikertelenül identifikált menet üres sorozatainak eloszlására

terminisztikus szabály szerint) el kellett dobni. Ennek eredményeként létrejöttek ezek a hosszú üres sorozatok.

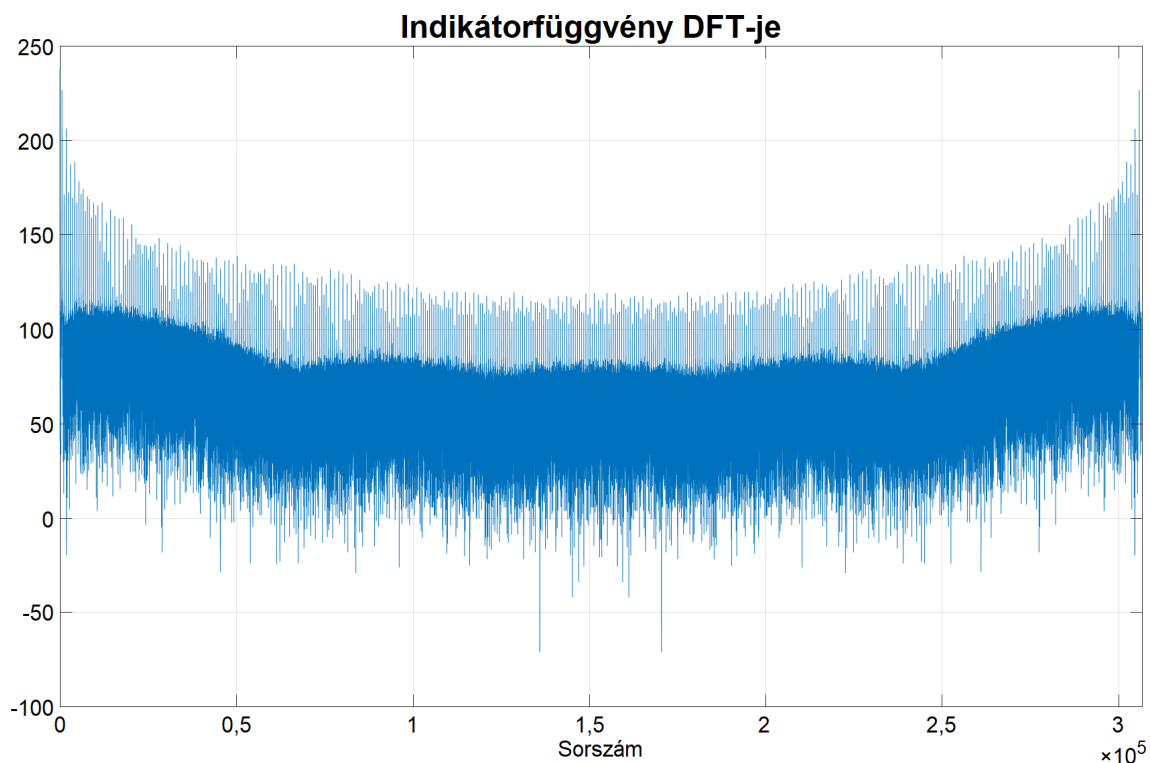
Ez a determinisztikus adatvesztés látható akkor is, ha ezeknek a menteknek az indikátorfüggvényén elvégzünk egy DFT-t. Az előző példa indikátorfüggvényének DFT-jét (a teljes indikátorfüggvényt mint DFT-blokkot tekintve) mutatja a 6.4. ábra.

A spektrumon észrevehetjük, hogy egy zajszerű és egy vonalas spektrum összege. A zaj-szerű, „folytonos” komponenst várnánk, hiszen adatvesztésről, sztochasztikus folyamatról van szó. Ez meg is jelenik, viszont van egy vonalas összetevő is, ami valamilyen periodicitásra utal, és mivel a teljes indikátorfüggvényt transzformáltuk, ami több mint 300000 mintát tartalmazott, ez nem magyarázható egy szerencsétlenül kiválasztott blokkal. Ez a periodicitás determinisztikus adatvesztéssel magyarázható.

6.2. Adatátvitel Skype segítségével

Amennyiben hangfrekvenciás jeleket szeretnénk számítógépes hálózaton átvinni, kézenfekvő lehetőség valamilyen voIP szoftvert választani. Ezek a szoftverek jellemzően UDP protokollt használnak adatátvitelre, itt azonban adatvesztés nemcsak azért fordulhat elő, mert a csomag elveszik a hálózaton, hanem eredhet ez a szoftver algoritmusából is. Az ilyen lehetőségek közül a Skype-ot vizsgáltam meg.

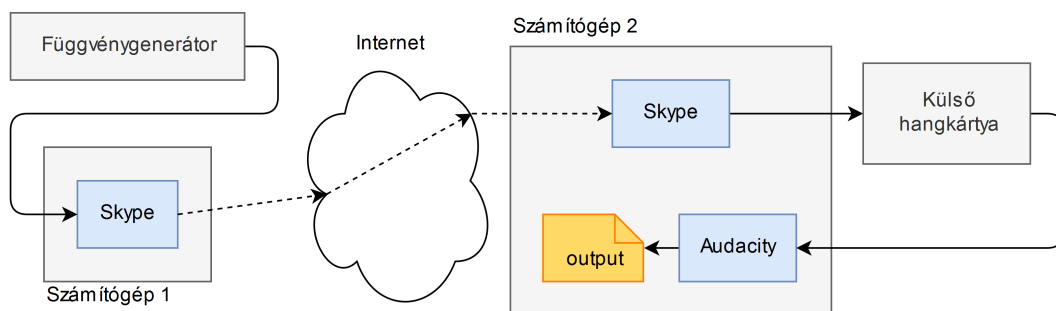
Vitatható, hogy miért éppen egy közcélú, emberek közötti kommunikációra kifejlesztett szoftvert és miért nem egy ipari kommunikációs protokoll implementációját választottam. Egyrészt várhatóan az ipari protokollok megbízhatóbbak, kevesebb adatvesztéssel, mint a Skype, ezért ezekkel a mérésekkel valamilyen korlátot lehet adni az ipari protokollok problémáira. Másrészt ez volt számomra elérhető, amikor a méréseket végeztem.



6.4. ábra. Az előző példához tartozó indikátorfüggvény DFT-je

6.2.1. A mérési elrendezés

A mérési elrendezés a 6.5. ábrán látható. Az UDP-s méréshez hasonlóan itt is két, hálózatba kapcsolt számítógép között történik a mérés.



6.5. ábra. A Skype-os mérési elrendezés

A méréshez egy függvénygenerátor által előállított jelet használtam, mely az első mérésekben szinuszjel, a későbbiekben sweepelő szinuszjel volt. A jelet az egyik számítógép „line in” bemenetére kötöttem, ez adta a Skype hangbemenetét.

A másik számítógépen a Skype által vett jelet egy hangfelvételre képes külső hangkártyára vezettem. A hangfelvételt az Audacity programmal készítettem el.

Az elvégzett mérések összeállításait a 6.9. táblázat tartalmazza.

Sorszám	Végpontok	Átvitt jel
1	helyi hálózat	400 Hz szinuszjel
2	helyi hálózat	400 Hz szinuszjel
3	helyi hálózat	321 Hz szinuszjel
4	helyi hálózat	368 Hz szinuszjel
5	helyi hálózat	368 Hz szinuszjel
6	helyi hálózat	432 Hz szinuszjel
7	helyi hálózat	500-2000 Hz, 200 ms sweepelő szinuszjel
8	helyi hálózat	500-2000 Hz, 1 s sweepelő szinuszjel
9	helyi hálózat	500-2000 Hz, 5 s sweepelő szinuszjel
10	BME I épület - Schönherz Kollégium	400 Hz szinuszjel

6.9. táblázat. A Skype-os mérések összeállításai

6.2.2. Mérési eredmények

Az első mérésekben szinuszjelet használtam. Az átvitt jelben négyféle hibára lettem figyelmes:

- 200 Hz-es additív zavarjel,
- a jel amplitúdója lecsillapodik, egy ideig nullához közeli, majd kicsit később fokozatosan visszatér,
- a jel amplitúdója hirtelen nullához közeli értékre ugrik, majd kicsit később hirtelen visszatér,
- egyszeres, önmagában álló vagy több, egymás utáni fázisugrás.

A 200 Hz-es zavar a teljes időtartamban jelen van, míg a többi hiba a minták kis részét (számszerűen lásd az identifikációs eredményeknél) érinti. A csillapodás-erősödés után a jel nem feltétlenül azonos fázisban folytatódik, mint előtte.

Ha ezeket a jelenségeket modellezni akarjuk, az eddigi eszközeink nem elégségesek, ugyanis a fázisugrást nem tudják kezelni. Fázisugrás úgy keletkezhet, hogy a jelből egy szakaszt „kivágunk”, és időben összecúsztatjuk, esetleg egy szakaszt megismétlünk. Ilyen kivágási, ismétlési jelenségeket okozhat egy késleltetés megváltozása, mely elképzelhető a Skype esetén.

Annak kiderítésére, hogy a fázisugrások honnan származhatnak, további méréseket végeztem sweepelő szinusszal. Ezekből kiderült, hogy a fázisugrások során kimaradnak blokkok a jelből, míg a hirtelen eltűnő, majd visszatérő jel esetén üres blokkok beszúrása történik. Ezért a változó hosszúságú késleltetés feltételezése potenciális magyarázatot és modellt ad a megfigyelt jelenségekre.

Azt tudjuk modellezni az eszköztárunkkal, amikor a jel hirtelen eltűnik, majd hirtelen visszajön. Kis elhanyagolással a csillapodás – fokozatos visszatérés jelenségét is tekinthetjük ilyennek. Amennyiben úgy definiáljuk az indikátorfüggvényt, hogy megadja, hogy hol van valami probléma a jellel, akkor a fázisugrásokat is tudjuk legalább kvalitatív szinten modellezni.

Az előző felfogás szerint a mérésekhez készítettem mintánkénti indikátorfüggvényt, melyet megpróbáltam identifikálni a Gilbert–Elliot-modell speciális eseteként, valamint magasabbrendű Markov-modellként is. Az eredményeket a 6.10. táblázat tartalmazza, amelyben megjelenítettem az adatvesztési arányokat is.

Sorszám	Adatvesztési arány	GE speciális eset	Magasabbrendű
1	51,4 ppm	kétállapotú Markov	kétállapotú Markov
2	1,19%	kétállapotú Markov	kétállapotú Markov
3	214 ppm	kétállapotú Markov	kétállapotú Markov
4	132 ppm	kétállapotú Markov	kétállapotú Markov
5	176 ppm	kétállapotú Markov	kétállapotú Markov
6	164 ppm	kétállapotú Markov	kétállapotú Markov
7	0,881%	kétállapotú Markov	kétállapotú Markov
8	0,504%	kétállapotú Markov	kétállapotú Markov
9	27,7 ppm	kétállapotú Markov	kétállapotú Markov
10	16,3 ppm	kétállapotú Markov	kétállapotú Markov

6.10. táblázat. A Skype-os mérések identifikációjának eredményei

Jól látszik, hogy mindkét eljárás szerint az összes esetet a kétállapotú Markov-lánc alapú adatvesztés írja le jól.

6.3. Rádiós kommunikáció mérése

A rádiókommunikációs mérések adatait a BME MIT-en végzett korábbi mérésekből kaptam. A mérések a [21] szerinti elrendezésekben történtek.

A kommunikáció két úgynevezett „mote” (hordozható, akkumulátoros eszköz, mikrokontrollerrel, rádió adóvevővel) között zajlottak. A vevőt egy számítógéphez csatlakoztatták, feladata az adatok mentése volt. Az adó 25-ös csomagokban küldte a mintákat, egyes mérésekben szinuszjelet, máskor egy AM jelet.

Az adóval több, a kommunikációt potenciálisan zavaró tevékenységet végeztek. Egyes mérésekben egy fémszekrénybe helyezték, és a szekrény ajtaját különböző mértékben hagyták nyitva. Más mérésekben az adóval sétáltak, így az adó és a vevő közötti távolság változásával az adatvesztés is változott. Továbbá a vevő mellé helyeztek egy mobiltelefont, amelyen wifis kommunikációt folytattak, és a wifi zavarta a mote-ok kommunikációját.

A kapott indikátorfüggvényeket az UDP-s méréseknél ismerttetett mindkét eljárással megpróbáltam identifikálni, az eredmények a 6.11. táblázatban láthatók. Az egy sorban lévő két eredmény ugyanahhoz a méréshez tartozik. A címsorban GE speciális eset a Gilbert–Elliot-modell speciális eseteként való identifikációt, a magasabbrendű a magasabbrendű Markov-modellként való identifikációt jelenti. Ezekre a továbbiakban rendre első és második módszerként is fogok hivatkozni.

Láthatjuk, hogy mindkét módszer gyakran adta a más modell eredményt, három mérést egyik módszer sem tudott identifikálni. Az UDP-s mérések kiértékelésekor a véletlen független modelleket mindkét módszer képes volt felismerni, itt viszont a két módszer által javasolt modellek mindig különböztek.

Mivel ilyen sokszor kaptam más modellt eredményül, és az identifikációs módszerekben a „döntési határok” értékét önkényesen választhatók meg, ezeket a határokat lazítva újra lefuttattam az eljárásokat. Ilyen döntési határ, hogy az első módszerben a további együtt-hatók „körülbelül nulla” voltát milyen módszerrel és határral ellenőrizzük. Itt megtartottam a 2-normát, de a határt növeltem az eddigiekhez képest. A második módszernél a döntési határ az, hogy mennyire kell megegyezniük a valószínűségeknek, ezen is lazítottam. A lazított határok melletti eredmények láthatók a 6.12. táblázatban.

Sorszám	GE speciális eset	Magasabbrendű
1	más modell	véletlen független
2	más modell	véletlen független
3	más modell	más modell
4	más modell	más modell
5	Gilbert-modell	más modell
6	más modell	más modell
7	más modell	véletlen független
8	más modell	14-ed rendű Markov
9	más modell	véletlen független
10	Gilbert-modell	más modell
11	nincs adatvesztés	nincs adatvesztés

6.11. táblázat. A mote-os mérések identifikációjának eredményei

Sorszám	GE speciális eset	Magasabbrendű
1	véletlen független	véletlen független
2	véletlen független	véletlen független
3	kétállapotú Markov	véletlen független
4	más modell	véletlen független
5	Gilbert-modell	másodrendű Markov
6	kétállapotú Markov	kétállapotú Markov
7	véletlen független	véletlen független
8	kétállapotú Markov	véletlen független
9	más modell	véletlen független
10	kétállapotú Markov	harmadrendű Markov
11	nincs adatvesztés	nincs adatvesztés

6.12. táblázat. A mote-os mérések identifikációjának eredményei, lazított feltételekkel

Itt a második módszer már mindegyik modellre képes volt becslést adni, és ezek az esetek kb. felében megegyeztek. A második módszer két esetben bonyolultabb, két esetben egyszerűbb modellt adott az elsőnél, a bonyolultságot a paraméterszám alapján mérve.

Mindkét módszer esetén, amire a szigorúbb feltételek mellett kaptunk valamilyen modellt, jellemzően itt is azt kaptuk. Ez alól két kivétel van, a 10-es mérés első eljárás és a 8-as mérés második eljárás. A 10-es mérés első eljárás esetén kétállapotú Markov-modellt kaptunk Gilbert-modell helyett. Itt a Gilbert-modell b paraméterére 0,0646-os értéket adott az eljárás, vagyis tényleg közel van egy kétállapotú Markov-modellhez.

[16] is ismerteti egyes mérések identifikációs eredményit. A 2-es mérésre véletlen független modellt, a 6-os esetén kétállapotú Markov-modellt, illetve a 10-esre harmadrendű Markov-modellt állapítottak meg. Ezek az eredmények megegyeznek a dolgozatbeli identifikációs eredményekkel.

7. Összefoglalás, kitekintés

A dolgozat bemutatta az adatvesztési problémát, az adatvesztés módjait, példákat adott adatvesztést okozó rendszerekre. Láttuk, hogy az adatvesztés általánosan előforduló jelenség, melyre a rendszereinket fel kell készítenünk.

Megismertük az adatvesztés egy lehetséges matematikai leírását az indikátorfüggvény segítségével. Bemutattuk az adatvesztés alapvető mennyiségeit, függvényeit.

Ezek után ismertettünk különböző, egyre komplexebb adatvesztési modelleket. Mindegyiknél láttunk példát az indikátorfüggvényre és levezettük a korábban megismert alapvető mennyiségeket, függvényeket. Ezek közül saját levezetések a Gilbert–Elliot-modell megbízhatósági függvényei, illetve üres és teljes sorozatainak várható hosszai.

Az időtartományi vizsgálat után áttértünk a frekvenciatartományba. Levezettem a Gilbert–Elliot-modell spektrumát folytonos időben, ehhez transzformálnunk kellett a modellt. A folytonos idejű spektrumból meghatároztam a diszkrét idejű spektrumot, melyet szimulációkkal ellenőriztem.

Körüljártuk az identifikációs problémát, a feladat egyértelmű megoldhatóságát, megnéztük, hogy a vizsgált modelleket hogyan lehet identifikálni.

Az identifikáció után áttértünk a mérések ismertetésére, mely két esetben saját mérés volt. Mértem csomagvesztést UDP-s kapcsolaton saját fejlesztésű programok segítségével, valamint adatátvitelt Skype segítségével. Saját, illetve kapott adatokra próbáltam adatvesztési modelleket illeszteni.

A mérési adatok identifikációja sokszor adta a „más modell” eredményt. Természetes további feladat ennek vizsgálata. Lehetséges, hogy az identifikációs eljárást kell tovább finomítani, vagy ténylegesen más modell írja le jól az adatvesztést.

Másik természetes további feladat más adatvesztési modellek vizsgálata. Önkényes döntés volt, hogy a Gilbert–Elliot-modellt vizsgáljam, és ne például egy többállapotú vagy magasabbrendű Markov-modellt.

Jövőbeli vizsgálatok témáját képezhetik az iparban használt protokollok. A PLC-k közötti kommunikációra kifejlesztett MODBUS protokoll [17] implementálható Ethernet hálózat fölött. Szintén PLC-k közötti adatcserére ad lehetőséget az EGD (Ethernet Global Data) protokoll [18] UDP-s kommunikáció segítségével. Vezeték nélküli ad-hoc hálózatok alakíthatók ki a Zigbee specifikációnak megfelelően [19], így rugalmas épületautomatizálási, ipari irányítási rendszerek, valamint szenzorhálózatok hozhatók létre. Az autóiparban használatos mérési adatok begyűjtésére a SENT [20] protokoll.

Irodalomjegyzék

- [1] L. Sujbert and G. Orosz, „FFT-based spectrum analysis in the case of data loss,” *Ieee Transactions on Instrumentation and Measurement*, pp. 968–976, Jan. 2016.
- [2] J. Rachwalski, „Analysis of packet loss pattern for concatenated transmission channels using burst ratio parameter,” 2016.
- [3] E. N. Gilbert, „Capacity of a burst-noise channel,” *Bell System Technical Journal*, vol. 39, no. 5, pp. 1253–1265, 1960.
- [4] E. O. Elliott, „Estimates of error rates for codes on burst-noise channels,” in *The Bell System Technical Journal*, vol. 42, Sept. 1963.
- [5] G. Haßlinger and O. Hohlfeld, „Analysis of random and burst error codes in 2-state markov channels,” in *2011 34th International Conference on Telecommunications and Signal Processing (TSP)*, pp. 178–184, Aug 2011.
- [6] S. Fine, Y. Singer, and N. Tishby, „The hierarchical hidden markov model: Analysis and applications,” *Machine Learning*, vol. 32, pp. 41–62, Jul 1998.
- [7] P. Boufounos, „Generating binary processes with all-pole spectra,” in *2007 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing - ICASSP '07*, vol. 3, pp. III–981–III–984, April 2007.
- [8] M. Ellis, D. P. Pazaros, T. Kypraios, and C. Perkins, „A two-level markov model for packet loss in udp/ip-based real-time video applications targeting residential users,” *Computer Networks*, vol. 70, pp. 384 – 399, 2014.
- [9] S. Lawlor and M. G. Rabbat, „Time-varying mixtures of markov chains: An application to road traffic modeling,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 65, pp. 3152–3167, June 2017.
- [10] L. E. Baum and T. Petrie, „Statistical inference for probabilistic functions of finite state Markov chains,” *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 37, pp. 1554–1563, 1966.
- [11] P. Galko and S. Pasupathy, „The mean power spectral density of markov chain driven signals,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 27, pp. 746–754, November 1981.
- [12] P. Tune, H. X. Nguyen, and M. Roughan, „Hidden markov model identifiability via tensors,” *CoRR*, vol. abs/1305.0321, 2013.
- [13] L. E. Baum, T. Petrie, G. Soules, and N. Weiss, „A maximization technique occurring in the statistical analysis of probabilistic functions of markov chains,” *Ann. Math. Statist.*, vol. 41, pp. 164–171, Feb. 1970.

- [14] R. I. A. Davis and B. C. Lovell, „Comparing and evaluating hmm ensemble training algorithms using train and test and condition number criteria,” *Pattern Anal. Appl.*, vol. 6, pp. 327–336, Feb. 2003.
- [15] B. Vanluyten, J. C. Willems, and B. D. Moor, „A new approach for the identification of hidden markov models,” in *2007 46th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 4901–4905, Dec. 2007.
- [16] L. Sujbert and G. Orosz, „Frequency domain identification of data loss models,” in *Acta IMEKO*, vol. 6, pp. 61–67, Dec. 2017.
- [17] „MODBUS application protocol specification v1.1b3.” http://www.modbus.org/docs/Modbus_Application_Protocol_V1_1b3.pdf. Accessed: 2018-10-25.
- [18] „EGD prolinx gateway ge ethernet global data.” https://www.prosoft-technology.com/content/download/731/6619/version/6/file/egd_protocol_manual.pdf. Accessed: 2018-10-25.
- [19] „Zigbee specification.” <http://www.zigbee.org/wp-content/uploads/2014/11/docs-05-3474-20-0csg-zigbee-specification.pdf>. Accessed: 2018-10-25.
- [20] „SENT - single edge nibble transmission for automotive applications j2716-201604.” https://www.sae.org/standards/content/j2716_201604/. Accessed: 2018-10-25.
- [21] G. Orosz, L. Sujbert, and G. Peceli, „Testbed for wireless adaptive signal processing systems,” in *2007 IEEE Instrumentation Measurement Technology Conference IMTC 2007*, pp. 1–6, May 2007.
- [22] „Formula for matrix raised to power n.” <https://www.freemathhelp.com/forum/threads/55028-Formula-for-matrix-raised-to-power-n?p=227129&viewfull=1#post227129>. Accessed: 2018-10-18.
- [23] „Using cayley-hamilton theorem to calculate matrix powers.” <https://www.physicsforums.com/threads/using-cayley-hamilton-theorem-to-calculate-matrix-powers.671687/>. Accessed: 2018-10-18.

A. A Gilbert–Elliot-modell időtartománybeli levezetései

Az alábbiakban található a Gilbert–Elliot modell megbízhatósági és komplementer megbízhatósági függvényeinek, az üres és teljes sorozatok várható hosszainak levezetései. Ez a rész tartalmazza továbbá a Gilbert- és a komplementer Gilbert-modellek főszövegben nem ismertett levezetéseit mint speciális eseteket.

A.1. Megbízhatósági függvények

A megbízhatósági függvény levezetéséhez vezessünk be két valószínűséget:

$$A_k = \Pr(\forall i \in \{1, \dots, L\} : K_i = 1 \wedge X_k = 'A'), \quad (\text{A.1})$$

$$B_k = \Pr(\forall i \in \{1, \dots, L\} : K_i = 1 \wedge X_k = 'B'), \quad (\text{A.2})$$

vagyis annak valószínűségét, hogy a Markov-lánc az 'A' ('B') állapotban van, egy k mintából álló teljes sorozat végén. $k = 1$ -re ezek az értékek az állapoteloszlásból és a modellparaméterekből:

$$A_1 = \frac{aq}{p+q}, \quad B_1 = \frac{bp}{p+q}. \quad (\text{A.3})$$

Észrevehető, hogy $A_1 + B_1 = \mu_{GE}$ ((3.35) egyenlet). A $k+1$ -hez tartozó értékek kifejezhetők a k -hoz tartozókból a következő módon:

$$A_{k+1} = A_k(1-p)a + B_kqa, \quad (\text{A.4})$$

$$B_{k+1} = A_kpb + B_k(1-q)b. \quad (\text{A.5})$$

Mátrixos formába átírva:

$$\begin{bmatrix} A_{k+1} \\ B_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-p)a & qa \\ pb & (1-q)b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_k \\ B_k \end{bmatrix} = \mathbf{P}_{1,GE} \begin{bmatrix} A_k \\ B_k \end{bmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

A bevezetett $\mathbf{P}_{1,GE}$ mátrix, A_1 és B_1 segítségével felírható A_k és B_k :

$$\begin{bmatrix} A_k \\ B_k \end{bmatrix} = \mathbf{P}_{1,GE}^{k-1} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

$\mathbf{P}_{1,GE}^{k-1}$ meghatározásához szükségesek $\mathbf{P}_{1,GE}$ sajátértékei, melyek a $\det(\mathbf{P}_{1,GE} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ egyenlet gyökei:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(1-p)a + (1-q)b \pm \sqrt{[(1-p)a + (1-q)b]^2 - 4aby}}{2}, \quad (\text{A.8})$$

$$y = 1 - p - q. \quad (\text{A.9})$$

Mivel a két sajátérték különböző, ezért $\mathbf{P}_{1,GE}^k$ a következő módon megadható (levezetését lásd az A.1.2. fejezetben):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^k &= \frac{(\lambda_2 \lambda_1^k - \lambda_1 \lambda_2^k) \mathbf{I} + (\lambda_2^k - \lambda_1^k) \mathbf{P}}{\lambda_2 - \lambda_1} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\lambda_2 \lambda_1^k - \lambda_1 \lambda_2^k + (\lambda_2^k - \lambda_1^k)(1-p)a}{\lambda_2 - \lambda_1} & \frac{(\lambda_2^k - \lambda_1^k)aq}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ \frac{(\lambda_2^k - \lambda_1^k)bp}{\lambda_2 - \lambda_1} & \frac{\lambda_2 \lambda_1^k - \lambda_1 \lambda_2^k + (\lambda_2^k - \lambda_1^k)(1-q)b}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Az (A.7) egyenletbe visszahelyettesítve az imént kapott eredményt, a bevezetett valószínűségek:

$$A_L = \frac{aq \left[\lambda_2 \lambda_1^{L-1} - \lambda_1 \lambda_2^{L-1} + (\lambda_2^{L-1} - \lambda_1^{L-1}) ((1-p)a + bp) \right]}{(p+q)(\lambda_2 - \lambda_1)}, \quad (\text{A.11})$$

$$B_L = \frac{bp \left[\lambda_2 \lambda_1^{L-1} - \lambda_1 \lambda_2^{L-1} + (\lambda_2^{L-1} - \lambda_1^{L-1}) ((1-p)a + bp) \right]}{(p+q)(\lambda_2 - \lambda_1)}. \quad (\text{A.12})$$

Ezek összege adja a megbízhatósági függvényt:

$$\begin{aligned} R_{GE}(L) = A_L + B_L &= \frac{aq \left[\lambda_2 \lambda_1^{L-1} - \lambda_1 \lambda_2^{L-1} + (\lambda_2^{L-1} - \lambda_1^{L-1}) ((1-p)a + bp) \right]}{(p+q)(\lambda_2 - \lambda_1)} + \\ &+ \frac{bp \left[\lambda_2 \lambda_1^{L-1} - \lambda_1 \lambda_2^{L-1} + (\lambda_2^{L-1} - \lambda_1^{L-1}) ((1-q)a + bq) \right]}{(p+q)(\lambda_2 - \lambda_1)}. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

A komplementer megbízhatósági függvényt a megbízhatósági függvényből tudjuk származtatni, $a \mapsto 1-a$ és $b \mapsto 1-b$ helyettesítésekkel. Ugyanis, ha a 0 és 1 kimenet valószínűségeit mindkét állapotban felcseréljük, akkor pontosan akkor ad a módosított modell egyet, mint az eredeti nullát. Így az eredeti modell komplementer megbízhatósági függvénye megegyezik a módosított modell megbízhatósági függvényével. Ügyelnünk kell rá, hogy ugyanezt a helyettesítést a sajátértékek esetén is el kell végezni, az így kapott értékeket jelöljük $\lambda'_{1,2}$ -vel:

$$\begin{aligned} R'_{GE}(L) &= \frac{(1-a)q \left[\lambda'_2 \lambda_1'^{L-1} - \lambda'_1 \lambda_2'^{L-1} + (\lambda_2'^{L-1} - \lambda_1'^{L-1}) ((1-p)(1-a) + (1-b)p) \right]}{(p+q)(\lambda'_2 - \lambda'_1)} + \\ &+ \frac{(1-b)p \left[\lambda'_2 \lambda_1'^{L-1} - \lambda'_1 \lambda_2'^{L-1} + (\lambda_2'^{L-1} - \lambda_1'^{L-1}) ((1-q)(1-a) + (1-b)q) \right]}{(p+q)(\lambda'_2 - \lambda'_1)}. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$\lambda'_{1,2} = \frac{(1-p)(1-a) + (1-q)(1-b) \pm \sqrt{[(1-p)(1-a) + (1-q)(1-b)]^2 - 4(1-a)(1-b)y}}{2}. \quad (\text{A.15})$$

A.1.1. Speciális esetek

A Gilbert-modell a Gilbert–Elliot-modell speciális esete $a = 1$ teljesülésével, ezért a megbízhatósági függvénye:

$$R_G(L) = R_{GE}|_{a=1} = \frac{q \left[\lambda_2 \lambda_1^{L-1} - \lambda_1 \lambda_2^{L-1} + \left(\lambda_2^{L-1} - \lambda_1^{L-1} \right) (1 - p + bp) \right]}{(p+q)(\lambda_2 - \lambda_1)} + \frac{bp \left[\lambda_2 \lambda_1^{L-1} - \lambda_1 \lambda_2^{L-1} + \left(\lambda_2^{L-1} - \lambda_1^{L-1} \right) (1 - q + bq) \right]}{(p+q)(\lambda_2 - \lambda_1)}. \quad (\text{A.16})$$

Ekkor a sajátértékek:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(1-p) + (1-q)b \pm \sqrt{[(1-p) + (1-q)b]^2 - 4by}}{2}. \quad (\text{A.17})$$

Mivel a komplementer Gilbert-modell is egy speciális eset (itt azonban $b = 0$), ezért a komplementer megbízhatósági függvénye:

$$R'_{KG}(L) = R'_{GE}|_{b=0} = \frac{(1-a)q \left[\lambda'_2 \lambda_1'^{L-1} - \lambda_1' \lambda_2'^{L-1} + \left(\lambda_2'^{L-1} - \lambda_1'^{L-1} \right) ((1-p)(1-a) + p) \right]}{(p+q)(\lambda'_2 - \lambda'_1)} + \frac{p \left[\lambda'_2 \lambda_1'^{L-1} - \lambda_1' \lambda_2'^{L-1} + \left(\lambda_2'^{L-1} - \lambda_1'^{L-1} \right) ((1-q)(1-a) + q) \right]}{(p+q)(\lambda'_2 - \lambda'_1)}. \quad (\text{A.18})$$

Jelen esetben a módosított sajátértékek:

$$\lambda'_{1,2} = \frac{(1-p)(1-a) + (1-q) \pm \sqrt{[(1-p)(1-a) + (1-q)]^2 - 4(1-a)y}}{2}. \quad (\text{A.19})$$

A.1.2. A \mathbf{P}^k mátrix levezetése

Az alábbi levezetést azért közlöm, mert teljességében nem érhető el, vagy csupán a végeredmény [22], vagy csak a levezetés vázlata [23] található meg. A feladat a következő összefüggés levezetése:

$$\mathbf{P}^k = \frac{(\lambda_2 \lambda_1^k - \lambda_1 \lambda_2^k) \mathbf{I} + (\lambda_2^k - \lambda_1^k) \mathbf{P}}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad (\text{A.20})$$

ahol $\lambda_1 \neq \lambda_2$ a \mathbf{P} 2×2 -es mátrix két különböző sajátértéke, \mathbf{I} az egységmátrix. Legyen \mathbf{P} egy általános 2×2 -es mátrix:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}. \quad (\text{A.21})$$

A mátrix karakterisztikus egyenlete:

$$0 = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{P}) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1 \lambda_2. \quad (\text{A.22})$$

A Cayley–Hamilton-tétel értelmében az előző egyenletet kielégíti a \mathbf{P} mátrix is, tehát:

$$\mathbf{P}^2 = (\lambda_1 + \lambda_2) \mathbf{P} - \lambda_1 \lambda_2 \mathbf{I} \quad (\text{A.23})$$

Az előző egyenlet ismételt alkalmazásával \mathbf{P}^k a következő alakban írható fel:

$$\mathbf{P}^k = a_0 \mathbf{I} + a_1 \mathbf{P}, \quad (\text{A.24})$$

ahol a_0 és a_1 két valós együttható. Mivel ezt az egyenletet az (A.23) egyenlet ismételt felhasználásával kaptuk és a Cayley–Hamilton-tétel miatt a sajátértékek is kielégítik az (A.23) egyenletet, így az előbbi összefüggés a két különböző sajátértékre is teljesül:

$$\lambda_1^k = a_0 + a_1 \lambda_1, \quad \lambda_2^k = a_0 + a_1 \lambda_2. \quad (\text{A.25})$$

Az egyenletrendszer a_0 -ra és a_1 -re megoldva:

$$a_0 = \frac{\lambda_2 \lambda_1^k - \lambda_1 \lambda_2^k}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad a_1 = \frac{\lambda_2^k - \lambda_1^k}{\lambda_2 - \lambda_1}. \quad (\text{A.26})$$

Ezeket visszahelyettesítve az (A.24) egyenletbe, megkapható a levezetendő kifejezés.

A.2. Teljes és üres sorozatok várható hossza

A teljes sorozatok várható hosszának levezetéséhez vezessünk be két várható értéket:

$$A = \text{olyan teljes sorozat várható hossza, amely 'A' állapotból indul}, \quad (\text{A.27})$$

$$B = \text{olyan teljes sorozat várható hossza, amely 'B' állapotból indul}. \quad (\text{A.28})$$

Az adott állapotból való indulást úgy kell érteni, hogy a teljes sorozat első mintája idején a Markov-lánc az adott állapotban volt.

Az A várható értékre a következő egyenlet teljesül:

$$A = 1 - a(1-p) - bp + a(1-p)(1+A) + bp(1+B). \quad (\text{A.29})$$

Magyarázat: teljes várhatóérték-tétel, az „a teljes sorozat megszakad”, „a teljes sorozat folytatódik és az 'A' a következő állapot”, illetve az „a teljes sorozat folytatódik és a 'B' a következő állapot” események mentén. Az 'A' állapotban $a(1-p)$ a valószínűsége, hogy a következő állapot is 'A', miközben az aktuális kimenet 1, és bp a valószínűsége, hogy a következő állapot 'B', miközben az aktuális kimenet 1. Így $1 - a(1-p) - bp$ a valószínűsége, hogy a következő lépésben 0 kimenet legyen, vagyis a teljes sorozat egyetlen mintából álljon. Ha a teljes sorozat folytatódik és következő állapot szintén az 'A', akkor a várható hossz az 'A' állapotból indított sorozat várható hosszánál eggyel több. Hasonlóan a 'B'-ben folytatott sorozatra. A B várható értékre ugyanilyen megfontolások alapján felírható:

$$B = 1 - b(1-q) - aq + b(1-q)(1+B) + aq(1+A). \quad (\text{A.30})$$

Az egyenletekből rendre A -t és B -t kifejezve, majd keresztbe behelyettesítve:

$$A = \frac{1 - by}{1 - [a(1-p) + b(1-q)] + aby}, \quad B = \frac{1 - ay}{1 - [a(1-p) + b(1-q)] + aby}, \quad (\text{A.31})$$

ahol továbbra is $y = 1 - p - q$.

Ezekből egy újabb teljes várhatóérték-étellel kiszámítható a teljes sorozatok várható hossza:

$$E_{N1,GE} = \left(\frac{aq}{p+q} A + \frac{bp}{p+q} B \right) \frac{1}{\mu_{GE}} = \frac{aq + bp - ab(p+q)y}{(aq + bp)(1 - [a(1-p) + b(1-q)] + aby)}, \quad (\text{A.32})$$

ahol az adatelérhetőségi aránnyal való osztásra azért van szükség, mivel ez egy feltételes várható érték, azzal a feltétellel, hogy az első minta elérhető.

Az üres sorozatok várható hosszát ugyanúgy kapjuk a teljes sorozatokéból, mint ahogy a komplementer megbízhatósági függvényt kaptuk a megbízhatósági függvényből:

$$\begin{aligned}
 E_{N0,GE} &= E_{N1,GE}|_{a \rightarrow 1-a; b \rightarrow 1-b} = \\
 &= \frac{(1-a)q + (1-b)p - (1-a)(1-b)(p+q)y}{((1-a)q + (1-b)p)(1 - [(1-a)(1-p) + (1-b)(1-q)] + (1-a)(1-b)y)}.
 \end{aligned}
 \tag{A.33}$$

A.2.1. Speciális esetek

Ha $a = 1$, a Gilbert-modellt kapjuk a Gilbert–Elliot-modellből, ezért a Gilbert-modellben a teljes sorozatok várható hossza:

$$E_{N1,G} = E_{N1,GE}|_{a=1} = \frac{q + bp - b(p+q)y}{(q+bp)(1 - [1-p + b(1-q)] + by)}.
 \tag{A.34}$$

A komplementer Gilbert-modell üres sorozatainak várható hosszát $b = 0$ mellett kapjuk:

$$E_{N0,KG} = E_{N0,GE}|_{b=0} = \frac{(1-a)q + p - (1-a)(p+q)y}{((1-a)q + p)(1 - [(1-a)(1-p) + (1-q)] + (1-a)y)}.
 \tag{A.35}$$

B. A Gilbert–Elliot-modell spektrumának paraméterei

Láttuk, hogy a Gilbert–Elliot-modell esetén valójában a modell négy paraméteréből képzünk három paramétert, amely meghatározza a spektrumot ((5.6) egyenlet). Ebben a függékben levezetjük, hogy a spektrumból hogyan lehet meghatározni ezt a három paramétert, az adatelérhetőségi arány ismeretében. Az adatelérhetőségi arány ismerete nem probléma, hiszen egy egyszerű átlagolással számítható az indikátorfüggvényből. A spektrum és paraméterei a modellparaméterekkel:

$$S_{GE}(f_k) = \frac{\frac{Z}{X} \left(1 - \frac{Z}{X}\right)}{N} \frac{\frac{Z}{X} \left(1 - \frac{Z}{X}\right) + 2 \frac{Y}{X^2} \frac{(1-X)[\cos 2\pi f_k - (1-X)]}{|1 - (1-X)e^{-j2\pi f_k}|^2}}{\frac{Z}{X} \left(1 - \frac{Z}{X}\right) + 2 \frac{Y}{X^2} \frac{(1-X)^N}{1 - (1-X)^N}} + \left(\frac{Z}{X}\right)^2 \delta(f_k), \quad (\text{B.1})$$

$$X = p + q, \quad Y = pq(a - b)^2, \quad Z = aq + bp. \quad (\text{B.2})$$

Felhasználjuk továbbá, hogy $\mu_{GE} = \frac{Z}{X}$. Vonjunk ki a spektrumból $\left(\frac{Z}{X}\right)^2 \delta(f_k)$ -t, ez eredmény legyen $S'_{GE}(f_k)$:

$$S'_{GE}(f_k) = \frac{\frac{Z}{X} \left(1 - \frac{Z}{X}\right)}{N} \frac{\frac{Z}{X} \left(1 - \frac{Z}{X}\right) + 2 \frac{Y}{X^2} \frac{(1-X)[\cos 2\pi f_k - (1-X)]}{|1 - (1-X)e^{-j2\pi f_k}|^2}}{\frac{Z}{X} \left(1 - \frac{Z}{X}\right) + 2 \frac{Y}{X^2} \frac{(1-X)^N}{1 - (1-X)^N}}. \quad (\text{B.3})$$

Helyettesítsünk be S'_{GE} -be 0 , $\frac{1}{4}$ és $\frac{1}{2}$ relatív frekvenciát, az eredmény legyen rendre A , B és C :

$$A = S'_{GE}(0) = \frac{\frac{Z}{X} \left(1 - \frac{Z}{X}\right)}{N} \frac{\frac{Z}{X} \left(1 - \frac{Z}{X}\right) + 2 \frac{Y}{X^2} \frac{1-X}{X}}{\frac{Z}{X} \left(1 - \frac{Z}{X}\right) + 2 \frac{Y}{X^2} \frac{(1-X)^N}{1 - (1-X)^N}}, \quad (\text{B.4})$$

$$B = S'_{GE}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\frac{Z}{X} \left(1 - \frac{Z}{X}\right)}{N} \frac{\frac{Z}{X} \left(1 - \frac{Z}{X}\right) + 2 \frac{Y}{X^2} \frac{-(1-X)^2}{1 + (1-X)^2}}{\frac{Z}{X} \left(1 - \frac{Z}{X}\right) + 2 \frac{Y}{X^2} \frac{(1-X)^N}{1 - (1-X)^N}}, \quad (\text{B.5})$$

$$C = S'_{GE}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{Z}{X} \left(1 - \frac{Z}{X}\right)}{N} \frac{\frac{Z}{X} \left(1 - \frac{Z}{X}\right) + 2 \frac{Y}{X^2} \frac{-1+X}{2-X}}{\frac{Z}{X} \left(1 - \frac{Z}{X}\right) + 2 \frac{Y}{X^2} \frac{(1-X)^N}{1 - (1-X)^N}}. \quad (\text{B.6})$$

Legyen $D = \frac{A}{C}$ és $E = \frac{B}{C}$, behelyettesítve:

$$D = \frac{A}{C} = \frac{\frac{Z}{X} \left(1 - \frac{Z}{X}\right) + 2 \frac{Y}{X^2} \frac{1-X}{X}}{\frac{Z}{X} \left(1 - \frac{Z}{X}\right) + 2 \frac{Y}{X^2} \frac{-1+X}{2-X}}, \quad (\text{B.7})$$

$$E = \frac{B}{C} = \frac{\frac{Z}{X} \left(1 - \frac{Z}{X}\right) + 2 \frac{Y}{X^2} \frac{-(1-X)^2}{1 + (1-X)^2}}{\frac{Z}{X} \left(1 - \frac{Z}{X}\right) + 2 \frac{Y}{X^2} \frac{-1+X}{2-X}}. \quad (\text{B.8})$$

A nevezőkkel átszorozva, a $\frac{Z}{X}(1 - \frac{Z}{X})$ -s tagokat egy oldalra rendezve, és ezeket elnevezve F -fel és G -vel:

$$F = (D - 1) \frac{Z}{X} \left(1 - \frac{Z}{X}\right) = 2 \frac{Y}{X^2} \left(\frac{D(1 - X)}{2 - X} + \frac{1 - X}{X}\right), \quad (\text{B.9})$$

$$G = (E - 1) \frac{Z}{X} \left(1 - \frac{Z}{X}\right) = 2 \frac{Y}{X^2} \left(\frac{E(1 - X)}{2 - X} - \frac{(1 - X)^2}{1 + (1 - X)^2}\right). \quad (\text{B.10})$$

Legyen $H = \frac{F}{G}$, ekkor a $HG = F$ egyenletet felírva:

$$\frac{EH(1 - X)}{2 - X} - \frac{H(1 - X)^2}{1 + (1 - X)^2} = \frac{D(1 - X)}{2 - X} + \frac{1 - X}{X}. \quad (\text{B.11})$$

Tegyük fel, hogy $X \neq 1$, ekkor oszthatunk $(1 - X)$ -szel. Továbbá, $X \in (0; 2)$ (lásd (B.2) egyenlet és 3.6. táblázat), ezért a nevezőkkel nincs probléma. A közös nevezővel beszorozva és X azonos hatványait összerendezve:

$$X^3(EH - H - D + 1) + X^2(-2EH + 3H + 2D - 4) + X(2EH - 2H - 2D + 6) - 4 = 0. \quad (\text{B.12})$$

Felhasználva, hogy $EH - H - D + 1 = 0$, a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$(H - 2)X^2 + 4X - 4 = 0. \quad (\text{B.13})$$

Ezt megoldva, az X -re kapott két megoldás:

$$X_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{H - 1}}{2 - H}. \quad (\text{B.14})$$

Mivel $X \in (0; 2)$, a negatív ágra van szükségünk:

$$X = \frac{2 - 2\sqrt{H - 1}}{2 - H}. \quad (\text{B.15})$$

Mivel $H = \frac{F}{G}$, a (B.9) és (B.10) összefüggések felhasználásával az értéke könnyen meghatározható. Behelyettesítve D és E , majd A , B és C definícióit, megkapjuk H számításának képletét:

$$H = \frac{D - 1}{E - 1} = \frac{A - C}{B - C} = \frac{S'_{GE}(0) - S'_{GE}(\frac{1}{2})}{S'_{GE}(\frac{1}{4}) - S'_{GE}(\frac{1}{2})} \quad (\text{B.16})$$

Mivel ismerjük az adatelérhetőségi arányt, Z értéke könnyen számítható:

$$Z = \mu_{GE}X. \quad (\text{B.17})$$

A (B.9) egyenlet átrendezéséből, majd A és C behelyettesítéséből Y értéke:

$$Y = \frac{(S'_{GE}(0) - S'_{GE}(\frac{1}{2}))Z(X - Z)(2 - X)X}{2(1 - X)[X(S'_{GE}(0) - S'_{GE}(\frac{1}{2})) + 2S'_{GE}(\frac{1}{2})]}. \quad (\text{B.18})$$

A levezetésben kikötöttük, hogy $X \neq 1$. Amennyiben ez mégis teljesülne, akkor sincs probléma, hiszen ekkor $p + q = 1$, vagyis véletlen független adatvesztésről van szó, és nincs szükség az X , Y és Z paraméterekre.

A gyakorlatban, mivel a mért spektrumok jellemzően zajosak, és ez az eljárás a spektrum adott pontbeli értékeit használja fel, ezért a mért spektrumokat érdemes simítani, például egy cirkuláris mozgó átlagolást végrehajtani rajtuk, és az így kapott értékeket használni az identifikációra. Viszont ez a simítás, mivel a csúcsokat „letöri”, ezért sajnos a hasznos információt is torzítja, de összességében érdemes lehet egy néhány DFT-pont szélességű mozgó átlagolást elvégezni.