

**Dobhang fizikai alapú szintézise**  
TDK dolgozat

**Garamvölgyi Zsolt**  
V. évf. vill. szakos hallgató

**2006**

Konzulens: dr. Bank Balázs  
BME Méréstechnika és Információs Rendszerek Tanszék

# Tartalomjegyzék

<b>Bevezetés .....</b>	<b>3</b>
<b>1. A hangszintézis módszereinek áttekintése .....</b>	<b>5</b>
1.1. Jel alapú szintézis.....	5
1.1.1. Additív szintézis.....	5
1.1.2. Szubtraktív szintézis .....	6
1.1.3. FM szintézis .....	6
1.1.4. Hangminta alapú szintézis .....	6
1.2. Fizikai alapú szintézis .....	7
1.2.1. Véges differencia módszer (VDM).....	8
1.2.2. Digitális hullámvezető módszer (Digital Waveguide Method, DWM) .....	8
1.2.3. Végeselem módszer (VEM).....	9
1.2.4. Függvénytranszformációs módszer (Functional Transformation Method, FTM) ....	9
<b>2. A VDM bemutatása a húr fizikai alapú modelljén .....</b>	<b>11</b>
2.1. Az ideális húr differenciálegyenlete .....	11
2.2. A differenciálegyenlet megoldása.....	13
2.3. A PDE közelítése véges differencia módszerrel .....	14
2.4. A húr tömeg-rugó modellje.....	15
2.5. A modell numerikus stabilitása.....	17
2.6. Numerikus diszperzió .....	20
<b>3. Membrán fizikai alapú modellje.....</b>	<b>27</b>
3.1. A PDE különböző alakjai.....	27
3.1.1. A PDE Descartes-féle koordinátarendszerben .....	27
3.1.2. A PDE síkbeli polár-koordinátarendszerben.....	30
3.2. Membrán véges differencia modellje Descartes-koordinátarendszerben .....	31
3.3. A membránmodell bővítése .....	37
3.3.1. Frekvenciafüggetlen veszteség .....	39
3.3.2. Frekvenciafüggő veszteség .....	41
3.3.3. Merev membrán.....	45
3.3.4. Nemlineáris viselkedés .....	46
<b>4. A dobverő modellezése .....</b>	<b>55</b>
4.1. A dobverő véges differencia modellje .....	56
4.2. A membrán és a dobverő közötti kölcsönhatás modellezése.....	61
<b>Értékelés.....</b>	<b>69</b>
<b>Függelék.....</b>	<b>71</b>
F.1. A húr differenciálegyenletének analitikus megoldása .....	71
F.2. A húr differenciálegyenletének levezetése a tömeg-rugó modellből.....	73
F.3. A membránt leíró PDE polárkoordinátás alakjának levezetése.....	76
F.4. Az ütközésnél használt konstansok kiszámítása .....	80
<b>MATLAB programok.....</b>	<b>83</b>
M.1. Az ideális húr (2.3.8) szerinti modelljének MATLAB megvalósítása.....	83
M.2. Az ideális, négyzet alakú membrán MATLAB megvalósítása .....	84
<b>Hivatkozások .....</b>	<b>85</b>

# Bevezetés

A zenei hangszerek fizikai alapú modellezése a tudomány egy viszonylag új, és napjainkban is dinamikusan fejlődő területe. A jelfeldolgozó processzorok teljesítményének növekedése és a modell implementálásához szükséges hatékony algoritmusok megjelenése csak a közelmúltban tette lehetővé a valódi hangszerek hangjának fizikai alapú reprodukálását. A kutatók napjainkra jelentős eredményeket értek el ezen a területen, és egyre nyilvánvalóbbá válnak a módszer előnyei. Ennek következtében úgy tűnik, hogy a közeljövőben a fizikai modellezés lesz a hangszintézis egyik fő irányvonala.

Napjainkban a húros, valamint egyéb egydimenziós hullámvezetők (pl. légoszlop) épülő hangszerek modellezése viszonylag kiforrottnak tekinthető: az irodalomban jól dokumentált, és egyre több valós idejű megvalósítás érhető el. 1994-ben az első fizikai modellezésű szintetizátor, a Yamaha VL1 megjelenését igen pozitív visszhang kísérte. Ezzel szemben a kétdimenziós hullámvezetőket is tartalmazó hangszerek (pl. dobok) modellezésével csak a közelmúltban kezdtek el foglalkozni. Mivel a különböző membránok egyéb kutatási területeken is nagy jelentőséggel bírnak, számos modell készült viselkedésük leírására, ugyanakkor a membránok hangszermodellezéssel kapcsolatos vonatkozásaival még az utóbbi években is csak igen kevesen foglalkoztak.

A kereskedelmi forgalomban kapható dobgépek, dobszintetizátorok működése általában előre felvett hangminták visszajátszásán alapul. Néhány típusban (pl. Roland V-Drum) ugyan a gyártó cég állítása szerint a hangminta alapú szintézis kiegészítéseként megjelenik a fizikai modellezésen alapuló hangszintézis, ugyanakkor kizárólag ilyen elven működő dobszintetizátor tudomásunk szerint még nem készült.

A kutatás során elsődleges célunk egy olyan fizikai alapú dobmodell felépítése volt, amely alkalmas jó minőségű, a lehetőségekhez képest valósághű hangok létrehozására. Célunk volt továbbá az is, hogy a modell által generált hang változatos legyen, tehát pl. a valódi dobokhoz hasonlóan a membránt egymás után két különböző helyen gerjesztve a létrehozott hang is változzon.

A dolgozatban nem tárgyaljuk a dobtést, valamint a hangterjedés modellezésének kérdéseit, ezek későbbi kutatások tárgyát képezik. Ez a modell használhatóságát azonban csak kismértékben befolyásolja, mivel véleményünk szerint a dob hangját elsősorban a membrán viselkedése és a gerjesztés módja határozza meg. A dolgozatban az ideális membrán modelljébe integráljuk a hangot leginkább befolyásoló tényezőket. Ezek közül is kiemelkedik a membrán nemlineáris viselkedése, amelynek modellezésére, annak ellenére, hogy egyes dobok hangja kifejezetten erre a jelenségre épül, csak a legújabb kutatások során tettek kísérletet.

Az élethű hangzáshoz nem csak maga a hangszer, hanem a gerjesztés megfelelő modellezése is szükséges. A hangminta alapú megoldásoknak éppen ez a gyenge pontjuk: egyetlen felvett hang lejátszásával tökéletesen reprodukálhatjuk a dob hangját, de egymás után többször lejátszva a valósághű hangzás illúziója szertefoszlik, mivel a valódi hangszerrel ellentétben az egymást követő hangok azonosak. A szakirodalomban tárgyalt dobmodellek egyszerű gerjesztése (pl. kezdeti sebesség megadása) szintén nem vezet valósághű eredményre. Az általunk és mások által elvégzett mérések alapján arra a következtetésre jutottunk, hogy a megfelelő hangzáshoz a dobverő modellezése is szükséges. A merev rúd differenciálegyenletéből kiindulva felépítjük a dobverő modelljét, valamint a membrán és a dobverő ütközésének modellezésével az eddigieknél jobb hangminőséget biztosító, új módszert mutatunk be a dob gerjesztésének modellezésére.

A membránmodell analíziséhez általában valamely pontjának kitérését, ill. a kitérés időfüggvényét fogjuk használni, amely nyilvánvalóan nem azonos azzal a jellel, amelyet egy valódi dob hangjának mikrofonnak történő rögzítésével kapunk. Ez korlátozza a modell és a valóság kvantitatív összehasonlításának lehetőségeit, de mint látni fogjuk, a modell jellemzése szempontjából lényegesebb kvalitatív összevetést nem akadályozza.

Az első fejezetben nagy vonalakban bemutatjuk a hangszintézis ma használt módszereit, így az olvasó képet kaphat a hangszerek jel- ill. fizikai alapú modellezésének fő irányvonalairól. A második fejezetben a véges differencia módszer bemutatása következik. Ehhez, viszonylagos egyszerűsége miatt, az ideális húr modelljét fogjuk felhasználni. A harmadik fejezetben, a húr modellezésének tanulságait felhasználva, felépítjük a kör alakú membrán hangszintézisre alkalmas modelljét. A negyedik fejezetben a dobverő, majd a dobverő és a membrán közötti kölcsönhatás modellje kerül ismertetésre. A függelékben kaptak helyet azok a képletek, levezetések, amelyek a tárgyalt problémák megértéséhez nem feltétlenül szükségesek, valamint a modell megértését segítő MATLAB kódrészletek. A dolgozatban található levezetések az irodalomban szokásosnál részletesebben közöljük, hogy a téma iránt érdeklődő olvasó a leírtak alapján akár saját maga is implementálhassa a tárgyalt modellt. Az eredmények értékelését a mellékelt CD-n található hangminták és animációk segítik.

# 1. A hangszintézis módszereinek áttekintése

A huszadik században az elektronika, majd később a digitális technika fejlődése lehetővé tette zenei hangok elektronikus úton történő előállítását. Számos különböző módszert dolgoztak ki az additív szintézistől a fizikai modellezésig. Ezek egy része leginkább eddig nem hallott, mesterséges hangok előállítására használható, de akadnak olyanok is, amelyek kiválóan alkalmasak valódi hangszerek hangjának reprodukálására. Az alábbiakban, a teljesség igénye nélkül, egy rövid áttekintést adunk a hangszintézis napjainkban is használt módszereiről. A hangszintézis módszereinek egy, az alábbiaktól részben eltérő osztályozása megtalálható a [Smith, 2005] írásban, részletes értékelésük és összehasonlításuk pedig [Tolonen, 1998]-ban.

## 1.1. Jel alapú szintézis

Jel alapú szintézis esetén abból indulunk ki, hogy mit hallunk, tehát a hangszer hangjából. Valamilyen módszerrel megpróbálunk egy olyan hangot létrehozni, amely a lehető legjobban megközelíti egy kiválasztott hangszer hangját. Ezek a módszerek általában viszonylag egyszerűen megvalósíthatók valós időben is, ez indokolja elterjedtségüket. A legtöbb hangszer a játéktechnikától függően számos különböző módon képes megszólalni. Pl. egy hosszan kitartott hegedűhang és a húrok pengetésével kapott hang egyáltalán nem hasonlít egymáshoz. A hangszerek további jellemzője, hogy a gerjesztés-válasz kapcsolat nemlineáris (pl. egy dobot erősebben megütve nem csak a hangerő, hanem a hang karaktere is változik). A jel alapú szintézis a hangszerek e sajátosságait csak korlátozottan tudja figyelembe venni, leginkább egy konkrét megszólalás reprodukálására alkalmas. Egy teljes hangszermodell létrehozása a konkrét módszertől függően nehézkes és korlátozott, ill. lehetetlen.

### 1.1.1. Additív szintézis

Az additív szintézis a periodikus jelek azon tulajdonságából indul ki, hogy felírhatók különböző frekvenciájú, fázisú és amplitúdójú szinuszos jelek (harmonikusok) összegeként. Vannak olyan hangszerek, amelyek hangja a kezdeti tranziensek lecsengése után periodikusnak tekinthető (pl. orgona), míg mások hangja időben lecsengő szinuszokkal modellezhető. Ahhoz, hogy egy adott hangszer hangját elő tudjuk állítani, először meg kell vizsgálnunk a spektrumát, illetve a spektrum időbeli változását. Ezek segítségével meg tudjuk határozni a szinuszos komponensek frekvenciáját és amplitúdóját. A kezdeti tranziens és a lecsengés modellezéséhez a harmonikusok amplitúdójának időbeli változtatása szükséges. A módszer legfőbb előnye az egyszerűsége.

### 1.1.2. Szubtraktív szintézis

Még ma is az egyik legelterjedtebb módszer zenei hangok, hanghatások előállítására, ugyanakkor létező hangszerek hangjának szintézisére is alkalmas. A szubtraktív elven működő szintetizátorokban a jelforrás néhány (tipikusan 2-3) oszcillátor és egy zajgenerátor. Az oszcillátorok valamilyen harmonikusokban gazdag periodikus jelet (pl. négyszög-, fűrészfogjel), a zajgenerátor pedig fehér vagy színes zajt állít elő. A jelek keverésével, modulálásával és szűrésével állítjuk elő a kívánt hangot. Az oszcillátorok frekvenciája és amplitúdója tetszőlegesen állítható. A különböző modulációkhoz egy vagy több alacsonyfrekvenciás ( $f < 50$  Hz) oszcillátor (LFO) áll rendelkezésre. Ezek jelével tipikusan az oszcillátorok által előállított jel amplitúdóját, frekvenciáját, és a szűrő törésponti frekvenciáját lehet modulálni. A szűrő általában egy alacsony fokszámú aluláteresztő, amelynek törésponti frekvenciája és kiemelése állítható. A különböző paramétereket az LFO-kon kívül általában burkológörbe-generátorokkal is alakíthatjuk. Szubtraktív szintézissel egyszerűen megvalósítható eszközökkel igen sokféle hangot hozhatunk létre. A módszer hangszerhang előállítására is alkalmazható. Bár a hallgató a szintetizált hang alapján általában meg tudja állapítani, milyen hangszerről van szó, a hang csak főbb jellemzőiben hasonlít az eredetire, azzal nem keverhető össze, így a módszer használhatósága e tekintetben igencsak korlátozott (pl. szubtraktív elven generált pergődob-hang használata elektronikus zenében). Az első szubtraktív szintetizátort Robert Moog fejlesztette ki 1964-ben.

### 1.1.3. FM szintézis

Ha egy szinuszjel frekvenciáját egy másik, alacsony frekvenciás ( $f < 20$  Hz) szinuszos jellel moduláljuk, akkor az ún. vibrato effektushoz jutunk. A hang karaktere alapvetően nem változik, csak a magassága. Más a helyzet, ha a moduláló jel frekvenciája meghaladja a 20-30 Hz-et. Ekkor a változó hangmagasságú szinusz helyet egy harmonikusokban gazdag jelet kapunk, amely egyáltalán nem hasonlít a kiindulási jelre. Ez a jelenség az FM szintézis alapja. Az ilyen elven működő szintetizátorokban a szinuszjelet generáló oszcillátorok jeleit sokféleképpen összekapcsolhatjuk, pl. egy frekvenciamodulált jellel modulálhatjuk egy harmadik szinuszjel frekvenciáját, de lehetőség van visszacsatolásra is: egy oszcillátor kimenete a saját frekvenciáját is modulálhatja. A paraméterek valós idejű módosítása tovább bővíti az FM szintézis lehetőségeit. A módszerrel különböző hangszerek (pl. dobok és egyéb ritmushangszerek) hangját is elő lehet állítani, de a paraméterek hangolása egy kívánt hangzás elérése érdekében nagy tapasztalatot igényel. Aki először találkozik egy FM szintetizátorral (pl. Yamaha DX7), nagy valószínűséggel csak zajszerű hangokat lesz képes létrehozni. Az érdeklődő olvasó a módszerről részletesebb felvilágosítást kaphat a [Chowning, 1973] írásban.

### 1.1.4. Hangminta alapú szintézis

A szintézis szó ebben az esetben némileg félrevezető, hiszen arról van szó, hogy egy vagy több előre felvett (vagy szintetizált) hangot játszunk le. Az ilyen elven működő szintetizátorok

a *sample*rek. A konkrét megvalósítások igen bonyolultak lehetnek, pl. a ma használt, PC-n futó zongoramodellek esetén az előre felvett hangminták által lefoglalt lemezterület akár gigabyte nagyságrendű is lehet. Ezzel a módszerrel a hangszer egy konkrét megszólalása tökéletesen reprodukálható, viszont a valódi hangszerekre jellemző változatos, élő hangzás modellezése igen nehéz és memóriaigényes. Egy érdekes példa a hangminta alapú szintézisre a 60-as években kifejlesztett *mellotron*, amely mágnesszalagon tárolt hangminták (főleg hegedűhangok) visszajátszására képes, így az első samplernek tekinthető.

## 1.2. Fizikai alapú szintézis

A fizikai alapú szintézis nem a létrehozott hangot, hanem magát a hangszert, annak fizikai viselkedését próbálja modellezni. Megfelelő fizikai modell esetén természetesen a létrehozott hang igen jól közelítheti a valódi hangszer hangját. A legtöbb hangszer két fő részből áll, valamilyen hullámvezetőből (pl. húr, légoszlop) és egy rezonátorból (hangszertest), amely a rezgést felerősíti. Ezen kívül általában igen fontos a megfelelő gerjesztés modellezése (pl. zongoránál a kalapács). A hullámvezetők mechanikai rezgő rendszerek, amelyek viselkedését általában parciális differenciálegyenletekkel (PDE) írjuk le. Fizikai rendszerek esetén a problémát az jelenti, hogy viszonylag egyszerű rendszereket is csak igen bonyolult egyenletekkel tudunk leírni, amelyek gyakran analitikusan nem megoldhatók. Egy modell kidolgozása így legtöbbször egy PDE numerikus megoldását jelenti.

Fizikai alapú módszerekkel elvileg bármely hangszer modellezhető, ugyanakkor a valós rendszerek bonyolultsága miatt mindig egyszerűsítésekkel kell élnünk, amelyek a modell minőségét rontják. Egy ilyen modell megvalósításánál a fentiek miatt mindig kompromisszumra kényszerülünk, el kell döntenünk, mely jelenségeket szükséges nagy pontossággal leírni, és melyeket hanyagolhatjuk el. Ez a döntés természetesen nem egyértelmű, az egyes jelenségek súlya a kitűzött céltól függ. Amennyiben a végső cél a hangszer hangjának reprodukálása, úgy a hangot csak kis mértékben vagy egyáltalán nem befolyásoló tényezők figyelmen kívül hagyhatók.

A fizikai alapú modellek legnagyobb hátránya a gyakran jelentős számításigény, amely korlátot szab a modell valós idejű alkalmazhatóságának. Szerencsére az egyre nagyobb teljesítményű jelfeldolgozó processzorok megjelenésével egyre bonyolultabb modellek valós idejű implementálására nyílik lehetőség. A fizikai alapú eljárások nagy előnye, hogy alkalmasak a nemlineáris gerjesztés és a felhasználói interakció modellezésére. Egy dobot nem lehet kétszer pontosan ugyanúgy megütni, egy megfelelő dobmodell esetén e jelenség leírása nem jelent problémát. A módszer további előnye, hogy az állítható paraméterek konkrét fizikai jelentéssel bírnak, míg ez a jel alapú modellekre nem áll fenn (gondoljunk csak arra, hogy pl. az FM szintézisnél az oszcillátorok frekvenciája és amplitúdója milyen elvont kapcsolatban áll a generált jellel). Az fizikai alapú hangszintézisről először 1971-ben publikáltak ([Hiller, 1971a,b]), azóta számos különböző módszert dolgoztak ki. Az alábbiakban a legfontosabb fizikai alapú módszerek rövid összefoglalása következik, ezekről bővebb információ található pl. [Välimäki, 2006]-ban.

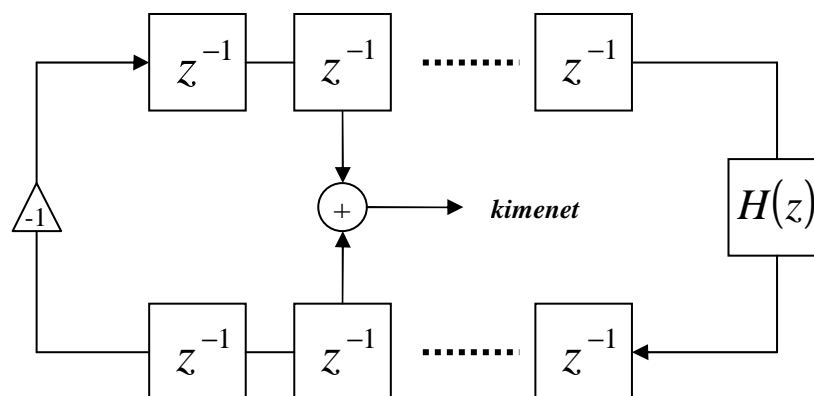
### 1.2.1. Véges differencia módszer (VDM)

A fizikai rendszereket leíró egyenletek megoldásai időben és térben folytonos, többváltozós függvények. Ez azt jelenti, hogy egy ilyen, analitikus megoldás a rendszer végtelen sok pontjának viselkedését írja le végtelen sok időpontban. Analitikus megoldás hiányában valamilyen numerikus közelítéssel kell élnünk, így a rendszert időben és térben is diszkrétizálnunk kell. A digitálisan megvalósított fizikai modell feladata, hogy a rendszer véges sok pontjának viselkedését írja le diszkrét időpontokban. A véges differencia módszer lényege, hogy a vizsgált differenciálegyenletben szereplő deriváltakat *differenciahányadosokkal* közelíti.

A módszer igen jól skálázható, mivel a szomszédos pontok távolsága, és így a vizsgált pontok száma, ill. az időlépés szabadon megválasztható. Megfelelően felépített modell a pontszám növelésével egyre jobban közelíti a folytonos rendszert (konvergens). A véges differencia módszer előnye, hogy igen szemléletes, valamint viszonylag egyszerűen megvalósítható. Hátránya, hogy bonyolult rendszerek esetén stabilitási problémák léphetnek fel. Ezt a problémát többek között a mintavételi frekvencia növelésével orvosolhatjuk, ami viszont maga után vonja a növekvő számításigényt. További hátrányt jelent, hogy a bonyolult térbeli tartományok (pl. egy szaxofon teste) esetén a számításigény igen nagy lehet. A módszert a későbbiekben részletesen meg fogjuk vizsgálni.

### 1.2.2. Digitális hullámvezető módszer (Digital Waveguide Method, DWM)

A J. O. Smith által kidolgozott módszer (ld. [Smith, 1992]) alapjául az ideális húr viselkedését leíró egyenlet d'Alembert-féle megoldása szolgál, amely szerint a húr pontjainak kitérése az idő függvényében felírható két, ellentétes irányban haladó hullám összegeként. Az ideális, veszteségmentes húrban a hullám torzítatlanul, csillapítás nélkül terjed, a végeken pedig ellentétes előjellel visszaverődik. A DWM egy ilyen rendszer digitális modelljét két késleltetőlánccal valósítja meg. A valódi húrban fellépő veszteségek a késleltetővonal végéhez illesztett digitális szűrővel jól modellezhetők (ld. 1.2.2.1. ábra).



1.2.1.1. ábra. Waveguide módszerrel megvalósított húrmodell.



A módszer egyszerűen továbbfejleszhető, hogy alkalmas legyen többdimenziós rendszerek leírására is (ld. [Van Duyne, 1993]). A waveguide módszer bizonyos feltételek mellett ekvivalens a VDM-mel, így a két módszer előnyei és hátrányai hasonlóak. Az első Waveguide alapú szintetizátor az 1994-ben megjelent Yamaha VL1.

### 1.2.3. Végeselem módszer (VEM)

A végeselem módszer a teljes vizsgált tartományt leíró PDE megoldását a tartomány részalmazaira felírt egyszerűbb egyenletek megoldásával, majd a megoldások összeillesztésével közelíti. A módszer legfőbb előnye, hogy képes hatékonyan szimulálni bonyolult geometriával rendelkező fizikai rendszereket, ezért elterjedten használják pl. gépjárművek törésvizsgálatára, elektromágneses terek szimulációjára. Mivel az egyszerű hullámvezetők modellezése egyszerűbb módszerekkel is igen jó eredményre vezet, eddig kevesen tettek kísérletet hangszerek végeselem módszerrel való modellezésére.

### 1.2.4. Függvénytranszformációs módszer (Functional Transformation Method, FTM)

Az FTM a lineáris hálózatok számításánál elterjedten használt, Laplace-transzformáción alapuló módszer általánosításának tekinthető. Lineáris rendszerek esetén egy adott gerjesztéshez tartozó válasz kiszámításának lépései a következők (ld. [Fodor, 2002]):

- a rendszert leíró differenciálegyenletet Laplace-transzformáljuk<sup>1</sup>, így megkapjuk a rendszer jellemző átviteli függvényt
- meghatározzuk a gerjesztő jel Laplace-transzformáltját
- az így kapott komplex frekvenciatartománybeli függvényt megszorozzuk a rendszer átviteli függvényével, így megkapjuk az adott gerjesztéshez tartozó válasz Laplace-transzformáltját
- a kapott függvényt inverz Laplace-transzformálva megkapjuk az időtartománybeli választ

Ez a módszer a Laplace-transzformáció azon tulajdonságait használja ki, hogy az idő szerinti deriválást szorzásra redukálja, a kezdeti feltételeket pedig additív tagokká alakítja. Az FTM ugyanezt az eljárást követi, azzal a különbséggel, hogy a több változótól is függő, parciális differenciálegyenletek esetén az idő szerinti Laplace-transzformáció alkalmazása után egy alkalmas transzformációval a tér szerinti deriváltakat is szorzatokká kell alakítani. Így egy többdimenziós átviteli függvényt kapunk, amellyel a transzformált gerjesztést megszorozva megkapjuk a transzformált választ, amelyre az idő és a tér szerinti transzformációk inverzét alkalmazva analitikus formában kapjuk meg a választ leíró többváltozós függvényt. A digitális megvalósításhoz a gerjesztés és az átviteli függvény diszkretizációja szükséges. A módszer legnagyobb előnye és szépsége abban rejlik, hogy a megoldást közelítések nélkül, analitikus formában szolgáltatja, amely így mentes számos, az egyéb modellezési

---

<sup>1</sup> Az átviteli függvény a rendszer egészét leíró differenciálegyenlet hiányában is meghatározható

módszereknél fellépő, problémától (pl. stabilitási problémák, numerikus diszperzió). A módszer hátránya, hogy a térkoordináták szerinti transzformáció a vizsgált rendszer geometriájától függ, így bonyolult fizikai rendszerek esetén meghatározása igen nehéz lehet. Nehézséget jelent továbbá, hogy a rendszert leíró PDE meghatározása komplex rendszerek esetén szintén bonyolult feladat, így a módszer, ellentétben pl. a véges elem módszerrel, csak akkor használható hatékonyan, ha a vizsgált rendszer geometriája nem túl bonyolult (pl. húr, négyzet- ill. kör alakú membrán). A módszerről bővebb információ található a [Rabenstein, 1998] ill. [Trautmann, 1999] publikációkban.

## 2. A VDM bemutatása a húr fizikai alapú modelljén

Egy fizikai rendszer viselkedését annak differenciálegyenletével írjuk le. Az egyszerű rezgő rendszerek (pl. húr, membrán) különböző pontosságú leírására számos egyenletet ismerünk. Pl. egy ideális húr rezgését leíró lehető legegyszerűbb egyenlet:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

A fenti egyenletben  $c$  terjedési sebesség,  $y(x,t)$  pedig a húr egy adott pontjának kitérése a  $t$  időpillanatban. Természetesen egy adott probléma megoldásához az egyenlet önmagában nem elegendő, ismernünk kell a megfelelő kezdeti érték- és peremfeltételeket. Például egy két végén befogott húr esetén a peremfeltételek:

$$y(0,t) = y(L,t) = 0$$

ahol  $L$  a húr hossza. A digitális modell előállításához a folytonos idejű modellt térben és időben is diszkrétizálnunk kell. A véges differencia módszer főbb tulajdonságainak megismeréséhez jó kiindulópont a (2.1) egyenlet által leírt ideális húr, ezért az alábbiakban először egy ilyen rendszer diszkrét idejű modellje kerül ismertetésre.

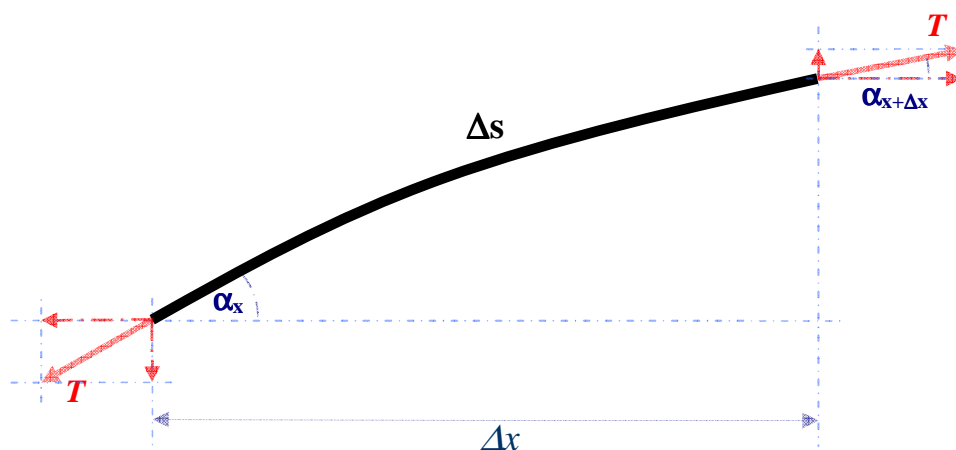
### 2.1. Az ideális húr differenciálegyenlete

A későbbiekben tárgyalt, bonyolultabb rezgő rendszerek differenciálegyenletét levezetés nélkül fogjuk tárgyalni. Az ideális húr viselkedését leíró PDE levezetését azért közöljük, mert támpontul szolgálhat egyéb rendszerek esetén is, hiszen a felhasznált apparátus lényegében ugyanaz. A (2.1) egyenlet itt közölt levezetése [Aird, 2002] és [Fletcher, 1991] alapján készült.

Az általunk vizsgált húrról feltételezzük, hogy kitérése hosszához képest elhanyagolható, valamint hogy a húrban ébredő erő nagysága a húr minden pontjában azonosnak tekinthető. A 2.1.1. ábra jelöléseit használva ez esetben igaz, hogy

$$\alpha_x \cong \alpha_{x+dx} \ll 1$$

$$T \cos \alpha_x \cong T \cos \alpha_{x+dx} \cong T$$



2.1.1. ábra. A húr kis darabja és a rá ható erők

ahol  $T$  a húrban egyensúlyi állapotban ébredő erő. Ez azt jelenti, hogy a vizsgált húrdarabra ható vízszintes irányú erők egyensúlyban vannak, így a húrban nem terjed longitudinális hullám. A húrdarabra ható függőleges irányú erők eredőjére Newton II. törvénye értelmében igaz, hogy

$$dF_y = \mu \cdot ds \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \cong \mu \cdot dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (2.1.1)$$

ahol  $\mu$  az egységnyi hosszúságú húrdarab tömege,  $y(x,t)$  pedig a húr kitérését leíró függvény.  $dF_y$  a következőképpen írható fel:

$$dF_y = -T \sin \alpha_x + T \sin \alpha_{x+dx} = -T \sin \alpha_x + T \sin\left(\alpha_x + \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} dx\right) \quad (2.1.2)$$

Kis  $\alpha_x$  szögekre érvényesek a következő közelítések:

$$\sin \alpha_x \cong \alpha_x$$

$$\alpha_x \cong \tan \alpha_x = \frac{\partial y}{\partial x}$$

A kapott eredményt (2.1.2)-be behelyettesítve:

$$dF_y = -T \alpha_x + T\left(\alpha_x + \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} dx\right) = T dx \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} = T dx \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (2.1.3)$$

(2.1.1) és (2.1.3) alapján felírhatjuk az ideális húr differenciálegyenletét:

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T dx \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

ahol  $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$  a terjedési sebesség.

## 2.2. A differenciálegyenlet megoldása

A később tárgyalásra kerülő időben és térben diszkrét modell jellemzésére kézenfekvő módszer, hogy a modell által szolgáltatott közelítő eredményeket összevetjük a PDE megoldásával kapottakkal, így ellenőrizhetjük, hogy a modell megfelelően írja-e le a vizsgált rendszert. A húr differenciálegyenlete a F.1. függelékben megtalálható, itt csak a végeredményt közöljük.

A függelékben közölt megoldás szerint a két végén befogott húr csak meghatározott hullámhosszú szinuszos jel alakját veheti fel. A különböző hullámhosszú megengedett szinuszhullámok neve *módus*. Az n-edik módus frekvenciáját a következőképpen írhatjuk fel:

$$f_n = n \cdot f_1$$

ahol

$$f_1 = \frac{c}{2L}$$

Tetszőleges kezdeti feltételekhez tartozó megoldás felírható a módusok súlyozott összegeként:

$$y(x, t) = \sum_n (A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t) \cdot \sin k_n x$$

$$k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n}$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

$\lambda_n$  az n-edik módus térbeli hullámhossza,  $k_n$  pedig hullámszáma, amely tulajdonképpen a körfrekvencia térbeli megfelelőjének tekinthető.

## 2.3. A PDE közelítése véges differencia módszerrel

A differenciálegyenlet térbeli diszkretizálása azt jelenti, hogy a megoldást csak véges számú, egymástól  $\Delta x$  távolságra lévő pontban közelítjük. Az időbeli diszkretizáció jelentése ezzel teljesen analóg: a megoldást csak a  $t = n \cdot \Delta t$  időpontokban, tehát a mintavételi idő egész számú többszöröseinél keressük. Ahogy azt már korábban említettük, a véges differencia módszer a PDE-ben szereplő deriváltakat *differenciahányadosokkal* közelíti az alábbiak szerint<sup>2</sup> (ld. pl. [Aird, 2002]):

$$y'_x(i \cdot \Delta x, n \cdot \Delta t) \cong \frac{y_{i,n} - y_{i-1,n}}{\Delta x} \quad (2.3.1)$$

$$y''_x(i \cdot \Delta x, n \cdot \Delta t) \cong \frac{y_{i+1,n} - 2y_{i,n} + y_{i-1,n}}{\Delta x^2} \quad (2.3.2)$$

$$y'_t(i \cdot \Delta x, n \cdot \Delta t) \cong \frac{y_{i,n} - y_{i,n-1}}{\Delta t} \quad (2.3.3)$$

$$y''_t(i \cdot \Delta x, n \cdot \Delta t) \cong \frac{y_{i,n+1} - 2y_{i,n} + y_{i,n-1}}{\Delta t^2} \quad (2.3.4)$$

ahol bevezettük az  $y_{i,n} = y(i \cdot \Delta x, n \cdot \Delta t)$  jelölést. Helyettesítsük be a (2.3.2) és a (2.3.4) kifejezéseket az ideális húrt leíró (2.1) egyenletbe:

$$\frac{y_{i,n+1} - 2y_{i,n} + y_{i,n-1}}{\Delta t^2} = c^2 \frac{y_{i+1,n} - 2y_{i,n} + y_{i-1,n}}{\Delta x^2} \quad (2.3.5)$$

Rendezzük úgy az egyenletet, hogy a bal oldalon csak az  $y_{i,n+1}$  tag maradjon:

$$y_{i,n+1} = \left( c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (y_{i+1,n} - 2y_{i,n} + y_{i-1,n}) + 2y_{i,n} - y_{i,n-1} \quad (2.3.6)$$

A (2.3.6) egy rekurzív kifejezés, amely igen egyszerűen implementálható pl. MATLAB-ban. Amennyiben az egyenletben szereplő konstansokat ( $c, \Delta t, \Delta x$ ) úgy választjuk meg, hogy

<sup>2</sup> Mint később látni fogjuk, a deriváltakat egyéb kifejezésekkel is közelíthetjük

$$\left( c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 = 1 \quad (2.3.7)$$

egy még egyszerűbb kifejezéshez jutunk:

$$y_{i,n+1} = y_{i+1,n} + y_{i-1,n} - y_{i,n-1} \quad (2.3.8)$$

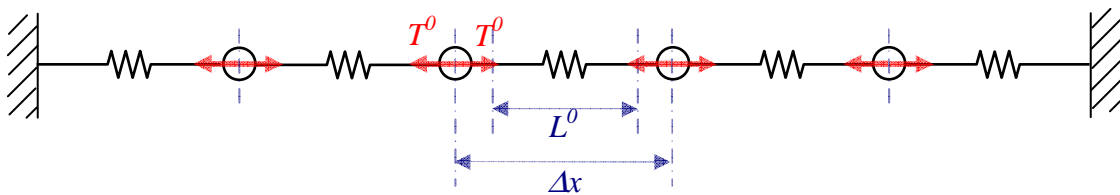
A konstansok (2.3.7) szerinti megválasztása azt jelenti, hogy

$$\Delta x = c \cdot \Delta t$$

tehát, hogy a hullám egy mintavételi periódus alatt egy vizsgált ponttól pontosan a vele szomszédos pontokig jut el. Ez képezi a *waveguide* módszer alapját. A két módszer kapcsolatáról bővebb információ található a [Karjalainen, 2004] írásban, a *waveguide* módszerről pedig az érdeklődő olvasó a [Smith, 1992] ill. [Aird, 2002] írásokban talál részletes ismertetést. Mint később látni fogjuk, a (2.3.7) választás az egyszerűbb egyenlet mellett egyéb előnyös tulajdonságokkal is rendelkezik (ld. 2.6).

## 2.4. A húr tömeg-rugó modellje

Az alábbiakban azt fogjuk belátni, hogy a húr ún. *tömeg-rugó modellje* a véges differencia módszerrel azonos eredményre vezet.



2.4.1. ábra. A tömeg-rugó modell szemléltetése

A tömeg-rugó modell a rezgő rendszert mint véges számú diszkrét tömegpontot írja le, amelyeket rugók kötnek össze. Ezzel a módszerrel egy térben diszkrét modellhez jutunk. Egy tömegpont mozgását Newton II. törvénye értelmében a következő egyenlettel írhatjuk le:

$$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a} \quad (2.4.1)$$

$\mathbf{F}$  a tömegpontra ható erők eredője,  $m$  a tömege,  $\mathbf{a}$  pedig az eredő gyorsulás. A rugót leíró függvény annak megnyúlása és az általa kifejtett erő között teremt kapcsolatot. A modellben használt lineáris rugó egyenlete:

$$\mathbf{F} = -K \cdot \Delta l$$

$K$  a rugóállandó,  $\Delta l$  a megnyúlás. A negatív előjel azt jelzi, hogy a rugó a megnyúlással ellentétes irányban fejt ki erőt. A rugók akkor is meg vannak nyúlva, amikor a húr nincs kitérítve, így a húr nyugalmi állapotában is erőt fejtenek ki, amelynek nagysága:

$$T = K \cdot (\Delta x - L^0) \quad (2.4.2)$$

$L^0$  a rugók nyújtatlan hossza,  $\Delta x$  pedig a tömegpontok távolsága nyugalmi állapotban. A megnyúlás nagysága:

$$\Delta l = L - L^0$$

ahol  $L$  a rugó aktuális, megnyújtott hossza. A modellezni kívánt húr tömegeloszlása egyenletes, így a tömegpontok tömege azonos:

$$m = \mu \cdot \Delta x$$

A már korábban is használt  $\mu$  mennyiség a húr vonalmenti tömegeloszlása, mértékegysége [kg/m]. Az F.2. függelékben megtalálható levezetés végeredménye a következő, térben diszkrét, de időben folytonos egyenlet:

$$m \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\Delta x} \cdot (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) \quad (2.4.3)$$

A digitális megvalósításhoz szükséges az időbeli diszkrétizáció is. Ezt a deriváltak lineáris közelítésével tehetjük meg:

$$\dot{y}_{i,n} = \frac{\partial y}{\partial t} \cong \frac{y_{i,n} - y_{i,n-1}}{\Delta t}$$

$$\ddot{y}_{i,n} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \cong \frac{\dot{y}_{i,n+1} - \dot{y}_{i,n}}{\Delta t} = \frac{y_{i,n+1} - 2y_{i,n} + y_{i,n-1}}{\Delta t^2}$$

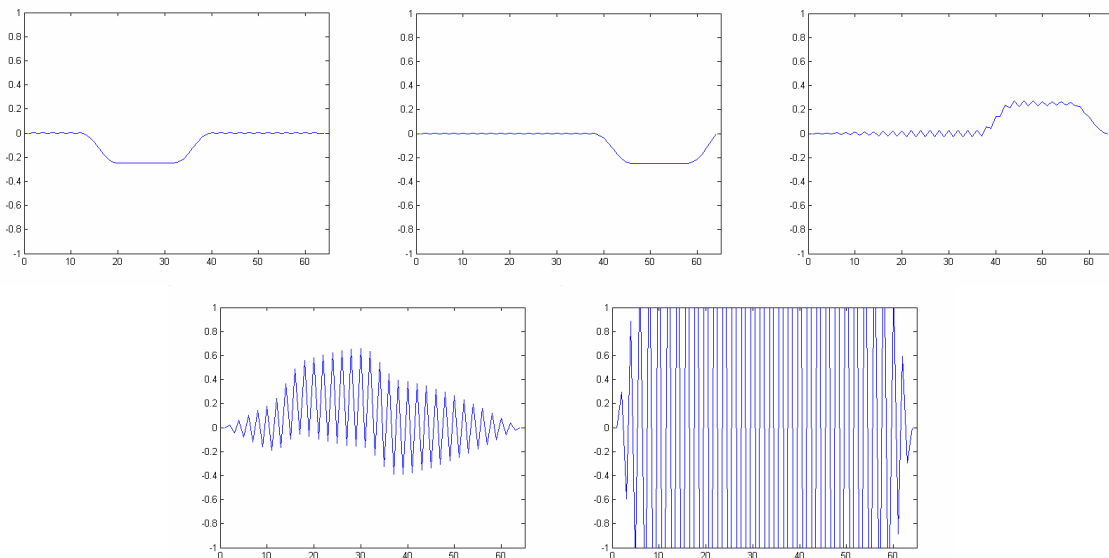


ahol  $y_{i,n} = y(i \cdot \Delta x, n \cdot \Delta t)$ ,  $\Delta t$  pedig a mintavételi idő. (2.4.3)-ba behelyettesítve, és átrendezve azt kapjuk, hogy

$$y_{i,n+1} = \frac{T \cdot \Delta t^2}{\mu \cdot \Delta x^2} \cdot (y_{i-1,n} - 2y_{i,n} + y_{i+1,n}) + 2y_{i,n} - y_{i,n-1}$$

ami megegyezik a VDM-mel kapott (2.3.6) egyenlőséggel.

## 2.5. A modell numerikus stabilitása



2.5.1. ábra. Az ábrán a 64 pontos instabil húrmodell kitérése (a húr alakja) látható a térkoordináta függvényében különböző időpontokban. Látható, ahogy az idő előrehaladtával a modell elszáll.

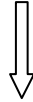
Az analitikus megoldás és a modell összehasonlításához meg kell határoznunk a modell által szolgáltatott módusfrekvenciákat. A MATLAB implementáció nem jelent különösebb problémát, a különböző paraméterek ( $c$ ,  $\Delta t$ ,  $\Delta x$ ) bizonyos értékei mellett azonban egy furcsa jelenséget tapasztalunk. A 2.5.1. ábrán látható, ahogy a húr „elszáll”. A paraméterértékek módosításával azt tapasztaljuk, hogy a húr akkor stabil, ha a

$$c \cdot \Delta t \leq \Delta x$$

feltétel teljesül.

Egy véges differencia modell numerikus stabilitásának eldöntésére a Von Neumann-analízis módszerét fogjuk alkalmazni (ld. pl. [Smith, 2006], [Aird, 2002]). Ennek lényege, hogy a differenciálegyenlet diszkrétizálása után kapott rekurzív differenciaegyenletet a térkoordináták szerint Fourier-transzformáljuk, és megvizsgáljuk, hogy az így kapott diszkrét idejű szűrő stabil-e. A modell akkor numerikusan stabil, ha a szűrő minden térbeli frekvenciára (hullámszáma) stabil, ez esetben minden módus amplitúdója időben csökken vagy konstans. A tér szerinti Fourier-transzformációt a következő formulával értelmezzük:

$$y(i \cdot \Delta x, n \cdot \Delta t) = y_{i,n}$$



$$Y_n(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} y_{i,n} \cdot e^{-jk \cdot i \Delta x}$$

Összevetve az idő szerinti Fourier-transzformáció ismert képletével látható, hogy  $k$  és  $\omega$ , valamint  $x$  és  $t$  egymással analóg mennyiségek. A tér szerinti Fourier-transzformációra érvényes eltolási-tétel:

$$y(x + \Delta x, n \cdot \Delta t) = y_{i+1,n}$$



$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} y_{i+1,n} \cdot e^{-jk \cdot i \Delta x} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_{m,n} \cdot e^{-jk \cdot (m-1) \Delta x} = e^{jk \cdot \Delta x} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_{m,n} \cdot e^{-jk \cdot m \Delta x} = e^{jk \cdot \Delta x} \cdot Y_n(k)$$

Vizsgáljuk meg először a húr (2.3.6) szerinti modelljét! (2.3.8)-at Fourier-transzformálva az egyetlen térkoordináta szerint, felhasználva az eltolási-tételt:

$$Y_{n+1}(k) = Y_n(k) \cdot \left[ \left( c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \cdot (e^{jk \Delta x} - 2 + e^{-jk \Delta x}) + 2 \right] - Y_{n-1}(k)$$

$$Y_{n+1}(k) - 2Y_n(k) \cdot \left[ \left( c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \cdot (\cos(k \Delta x) - 1) + 1 \right] + Y_{n-1}(k) = 0 \quad (2.5.1)$$

A (2.5.1) egyenletet z-transzformálva:

$$zY(k, z) - 2Y(k, z) \cdot \left[ \left( c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \cdot (\cos(k\Delta x) - 1) + 1 \right] + z^{-1}Y(k, z) = 0$$

Vizsgáljuk meg a kapott differenciaegyenlet által reprezentált digitális szűrő stabilitását! A szűrő pólusai a

$$z^2 - 2C_k z + 1 = 0 \quad (2.5.2)$$

egyenlet gyökei, ahol  $C_k = \left( c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \cdot (\cos(k\Delta x) - 1) + 1$

$$p_{1,2} = \frac{2C_k \pm \sqrt{4C_k^2 - 4}}{2} = C_k \pm \sqrt{C_k^2 - 1} \quad (2.5.3)$$

$C_k^2 - 1 > 0$  esetén  $|C_k| > 1$ , ekkor viszont legalább az egyik gyök 1-nél nagyobb, vagyis ebben az esetben a modell instabil.  $C_k^2 - 1 \leq 0$  esetén az egyenletnek két konjugált komplex gyöke van, melyek abszolút értékére igaz, hogy

$$|p_1| = |p_2| = \sqrt{C_k^2 + 1 - C_k^2} = 1$$

tehát a gyökök ekkor az egységkörön vannak, így a rendszer stabil. A  $C_k^2 - 1 \leq 0$  feltétel a következőt jelenti:

$$-1 \leq C_k \leq 1$$

$$-1 \leq \left( c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \cdot (\cos(k\Delta x) - 1) + 1 \leq 1$$

A  $\left( c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \cdot (\cos(k\Delta x) - 1) + 1 \leq 1$  egyenlőtlenség mindig teljesül, hiszen  $(\cos(k\Delta x) - 1)$  értéke

legfeljebb nulla lehet. A  $\left( c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \cdot (\cos(k\Delta x) - 1) + 1 \geq -1$  egyenlőtlenség azt jelenti, hogy

$$\left( c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \cdot (\cos(k\Delta x) - 1) \geq -2$$

A legkedvezőtlenebb esetben, tehát  $\cos(k\Delta x) = -1$  esetén, ez a feltétel akkor teljesül, ha

$$\left( c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \leq 1$$

A stabilitás feltétele tehát:

$$c \cdot \Delta t \leq \Delta x$$

Ez megfelel várakozásainknak, mivel tapasztalataink szerint a MATLAB-ban implementált modell stabilitásának éppen ez a feltétele.

Összefoglalva, a Von Neumann-analízis azt vizsgálja, hogy van-e olyan módus, amelynek amplitúdója az idő függvényében nő. A rendszer akkor tekinthető stabilnak, ha minden módus stabil, tehát amplitúdójuk konstans, vagy időben csökken.

## 2.6. Numerikus diszperzió

A terjedési sebesség  $c = \frac{\Delta x}{\Delta t}$  szerinti megválasztása mellett a modell által szolgáltatott módusfrekvenciákat a 2.6.1. ábrán látható spektrumrészlet szemlélteti. A pontozott, piros vonalak jelzik a PDE analitikus megoldásával kapott, (F.1.7) szerinti értékeket. Látható, hogy a kapott módusok frekvenciái elvárásainknak megfelelően alakulnak. A 2.6.2. ábrán látható, hogy a húrban a hullám csillapítás és torzítás nélkül terjed.

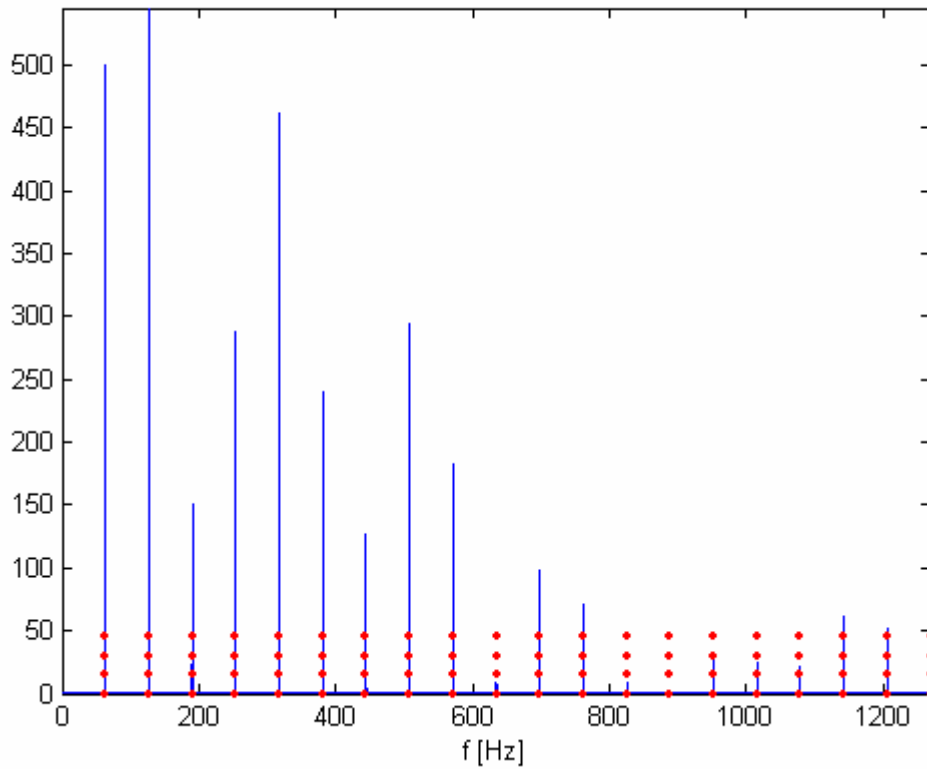
Más a helyzet, ha a  $c$ ,  $\Delta x$ ,  $\Delta t$  paramétereket úgy választjuk meg, hogy  $c < \frac{\Delta x}{\Delta t}$ . Az előző esettel összehasonlítva ez az alábbiak valamelyikét jelenti:

- a húr feszítettségét csökkentettük
- a húr tömegét növeltük
- a húr adott hosszúsága mellett a tömegpontok számát csökkentettük
- adott számú tömegpont mellett a húr hosszát növeltük
- a mintavételi frekvenciát növeltük

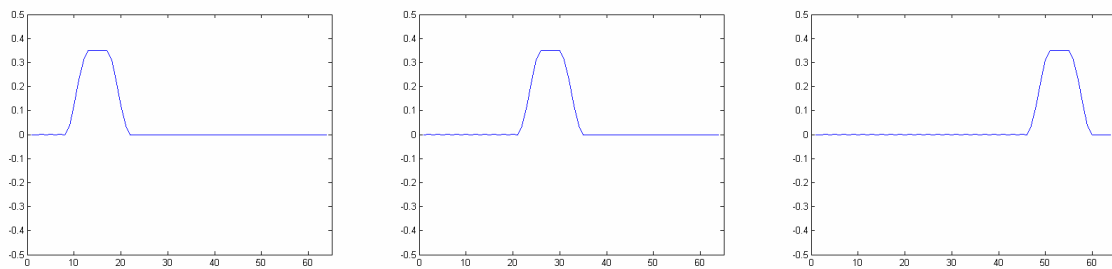
Ekkor a módusfrekvenciák a 2.6.3. ábra szerint alakulnak. Látható, hogy ez esetben a modell által szolgáltatott módusfrekvenciák a vártnál kisebbek. A jelenség oka a numerikus diszperzió, tehát az, hogy a térbeli diszkretizáció következtében a különböző frekvenciájú módusok terjedési sebessége nem azonos<sup>3</sup>. Ez az időtartományban úgy jelenik meg, hogy a haladó hullám torzul. A 2.6.4. ábrán látható, hogy a nagyfrekvenciás komponensek „lemeradnak”.

---

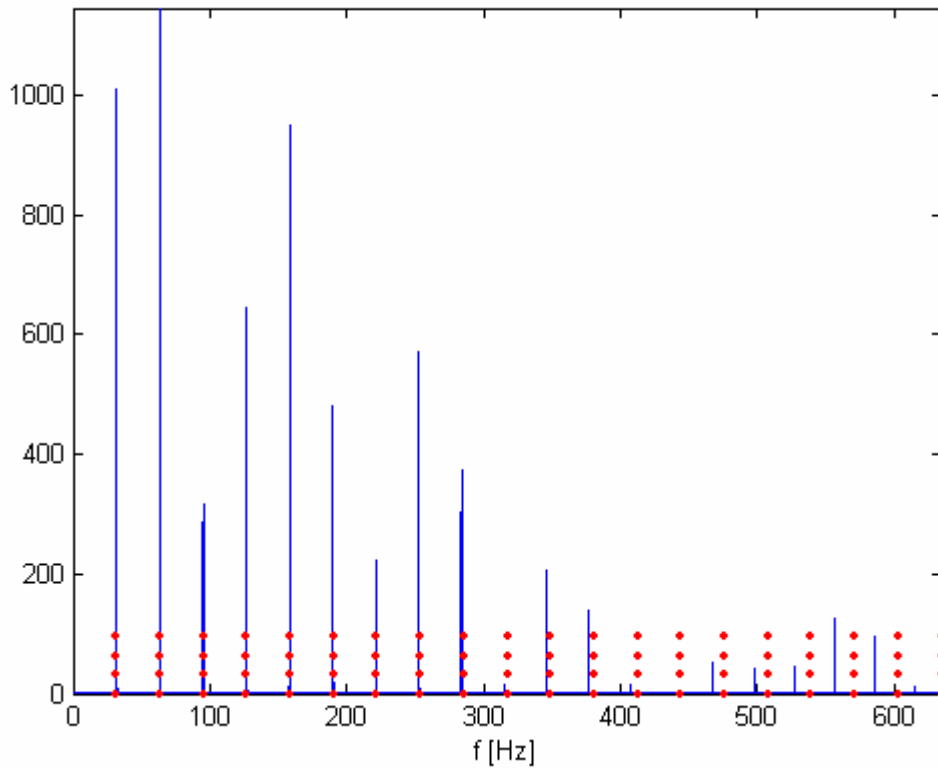
<sup>3</sup> Nem keverendő össze az anyag merevsége miatt fellépő diszperzióval (ld. 3.3.3.)



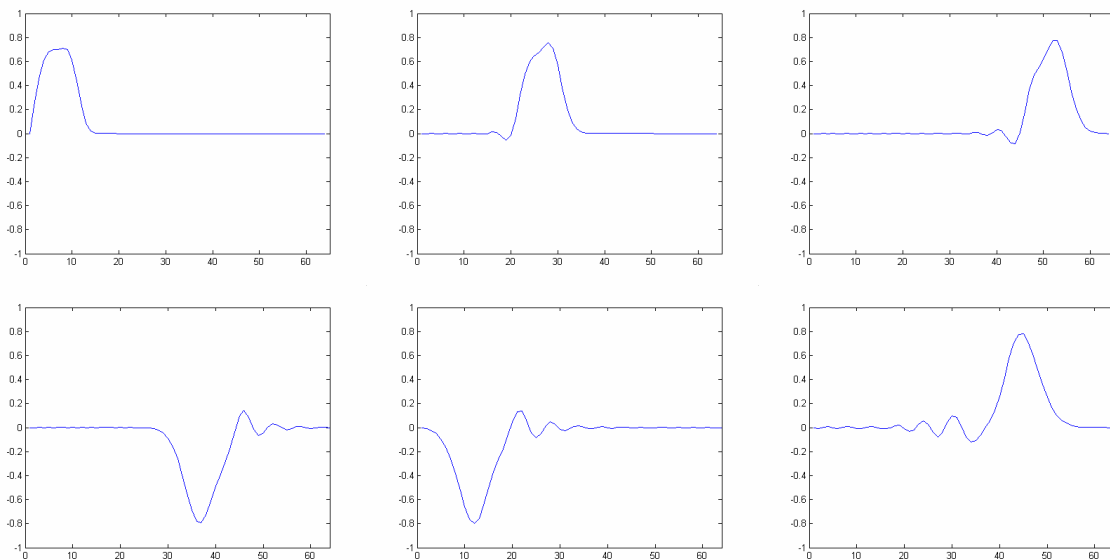
2.6.1. ábra. A 64 pontból álló húrmodell módusfrekvenciái  $c = \Delta x / \Delta t$  esetén ( $f_s = 8000$  Hz). A modell által szolgáltatott és az elméleti értékek megegyeznek.



2.6.2. ábra. A hullám terjedése  $c = \Delta x / \Delta t$  esetén. Az ábrákon a húrmodell alakja (a kitérés a térkoordináta függvényében) látható különböző időpillanatokban. Látható, hogy a hullám alakhűen terjed, tehát nem lép fel diszperzió



2.6.3. ábra. A 64 pontból álló húrmodell módusfrekvenciái  $c < \Delta x / \Delta t$  esetén ( $f_s = 8000$  Hz). A modell által szolgáltatott és az elméleti értékek eltérőek.



2.6.4. ábra. A hullám terjedése  $c < \Delta x / \Delta t$  esetén. Az ábrákon a húrmodell alakja (a kitérés a térkoordináta függvényében) látható. A numerikus diszperzió miatt a kisfrekvenciás komponensek gyorsabban terjednek, így a hullámterjedés nem alakhű.

A 2.5. pontban tárgyalt Von Neumann-analízis a véges differencia modellek stabilitásának eldöntése mellett a numerikus diszperzió kvantitatív vizsgálatára is alkalmas. Ehhez a stabilitás feltételének egy másik megfogalmazására lesz szükségünk. Vezessük be a  $G(k)$  *spektrális erősítési tényező* fogalmát:

$$Y_{n+1}(k) = G(k) \cdot Y_n(k) \quad (2.6.1)$$

$$Y_{n+1}(k) = G^2(k) \cdot Y_{n-1}(k) \quad (2.6.2)$$

$Y_n(k)$  a húr  $y(i \cdot \Delta x, n \cdot \Delta t)$  kitérésének térbeli Fourier-transzformáltja, ahogy azt a 2.5. pontban definiáltuk. A spektrális erősítési tényező tehát arról ad képet, hogy a különböző frekvenciájú (hullámszámú) módusok amplitúdója és fázisa hogyan változik egy mintavételi periódus alatt.  $G(k)$  abszolútértéke a stabilitás szempontjából jellemzi a modellt. Azon  $k$  hullámszámú módusok, amelyekre  $|G(k)| > 1$ , nem stabilak, mivel amplitúdójuk időben minden határon túl nő. A stabilitás elégséges feltétele tehát az, hogy

$$|G(k)| \leq 1$$

minden  $k$  értékre.

$G(k)$  fázisa numerikus diszperzió szempontjából jellemzi a modellt. A spektrális erősítési tényező valójában egy olyan átviteli karakterisztikának tekinthető, amely arról ad információt, hogy a rendszer módusai az  $n$ -edik és az  $(n+1)$ -edik mintavételi időpont között mekkora csillapítást ill. fázistolást szenvednek el. Egy lineáris, időinvariáns hálózat alakhű átvitelének feltétele az, hogy fáziskarakterisztikája lineáris legyen, hiszen ekkor a különböző frekvenciájú szinuszos komponensek a rendszeren áthaladva azonos időkéleltetést szenvednek. Ezzel összhangban, a véges differencia modell módusai alakhű terjedésének feltétele az, hogy  $G(k)$  fázisa lineáris legyen. A különböző hullámszámú (térbeli frekvenciájú) módusok diszperzív rendszer esetén különböző (térbeli) fáziskésleltetést szenvednek el, amelyet a

$$\frac{\varphi(k)}{k} = \frac{\text{arc}G(k)}{k} \quad (2.6.3)$$

mennyiséggel jellemezhetünk. Lineáris hálózatokban az ezzel analóg

$$\frac{\varphi(\omega)}{\omega}$$

mennyiség azt adja meg, hogy egy adott  $\omega$  körfrekvenciájú szinuszos jel a rendszeren áthaladva mekkora *időkésleltetést* szenved. Ezzel analóg módon (2.6.3) a módusok által két mintavételi időpont között elszenvedett térbeli késleltetést adja meg méterben. Mivel erre a térbeli késleltetésre igaz, hogy

$$c(k) \cdot \Delta t = \frac{\varphi(k)}{k}$$

a különböző hullámszámú módusok terjedési sebességére azt kapjuk, hogy

$$c(k) = \frac{\text{arc}G(k)}{k \cdot \Delta t}$$

Először vizsgáljuk meg, hogy a (2.3.8) szerinti modellt numerikus diszperzió szempontjából! A (2.3.8) egyenletet Fourier-transzformálva, (2.6.1) és (2.6.2) behelyettesítése után a következő egyenletet kapjuk:

$$G^2(k) \cdot Y_{n-1}(k) = 2 \cos(k\Delta x) \cdot G(k) \cdot Y_{n-1}(k) - Y_{n-1}(k)$$

$Y_{n-1}(k)$ -val egyszerűsítve, majd  $G(k)$ -ra rendezve:

$$G^2(k) - 2 \cos(k\Delta x) \cdot G(k) + 1 = 0$$

Az egyenlet megoldásával határozzuk meg a spektrális erősítési tényezőt!

$$\begin{aligned} G(k) &= \\ &= \frac{2 \cos(k\Delta x) \pm \sqrt{4 \cos^2(k\Delta x) - 4}}{2} = \cos(k\Delta x) \pm \sqrt{\cos^2(k\Delta x) - 1} = \\ &= \cos(k\Delta x) \pm \sqrt{\cos^2(k\Delta x) - (\sin^2(k\Delta x) + \cos^2(k\Delta x))} = \cos(k\Delta x) \pm j \cdot \sin(k\Delta x) = \\ &= e^{\pm jk\Delta x} \end{aligned}$$

$G(k)$  abszolútértéke egységnyi, fázisa lineáris, így a modell stabil és diszperziómentes, tehát az eredmény egybevág tapasztalatainkkal. A spektrális erősítési tényezőre kapott két különböző megoldás a két, ellentétes irányban haladó hullámnak felel meg.

Vizsgáljuk most meg a (2.3.6) szerinti, általánosabb modellt numerikus diszperzió szempontjából! A fenti lépéseket elvégezve a következő egyenletet kapjuk:

$$G^2(k) - 2G(k) \cdot (A \cdot \cos(k\Delta x) - A + 1) + 1 = 0 \quad (2.6.4)$$



ahol

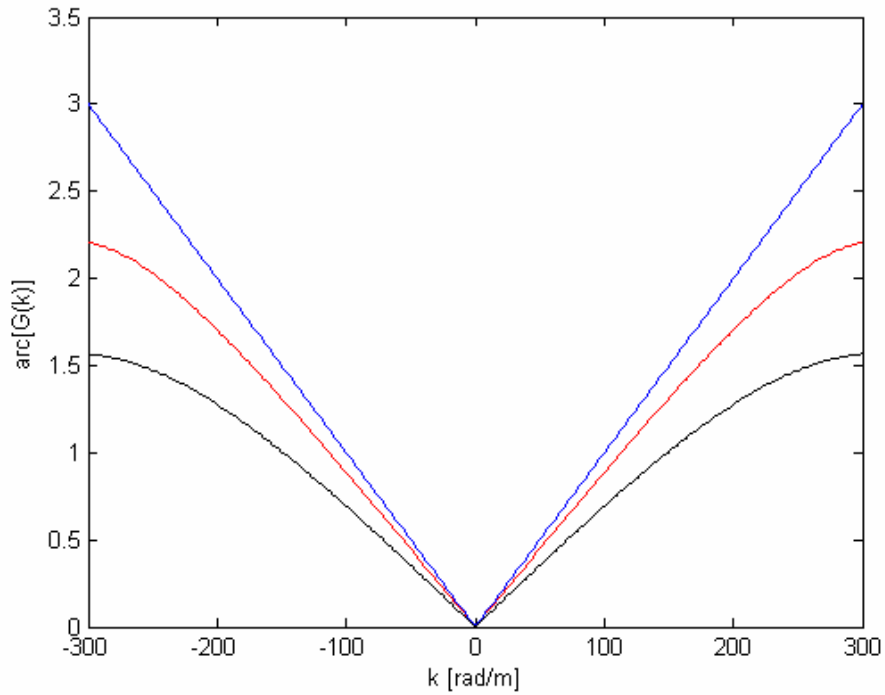
$$A = \left( c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2$$

(2.6.4) két megoldása stabil modell esetén mindig konjugált komplex pár, tehát abszolútértékük megegyezik, fázisuk ellentétes. A két gyök a két terjedési iránynak felel meg.

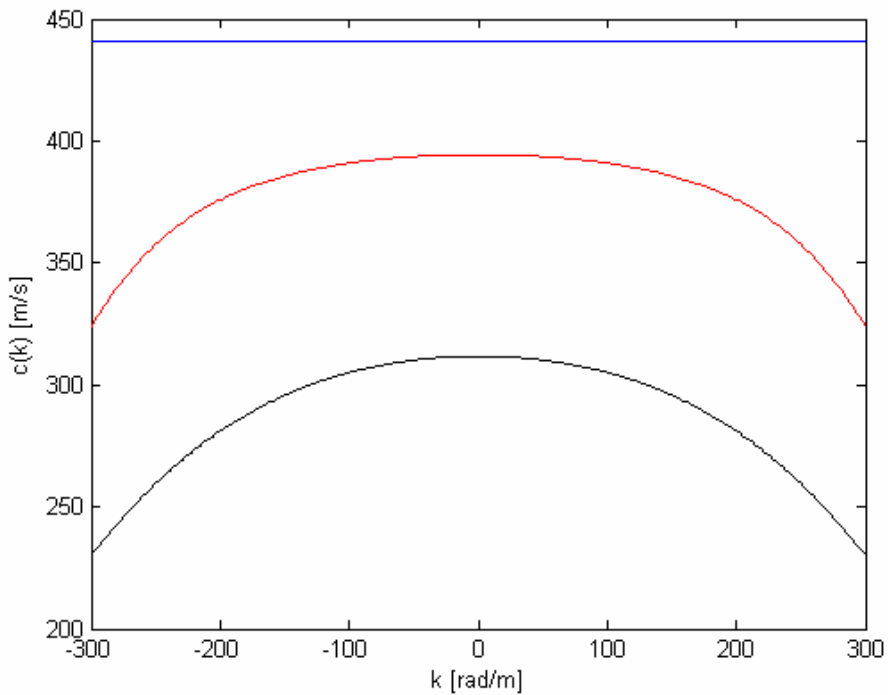
Az egyenletet különböző  $A$  és  $k$  paraméterértékek mellett numerikusan megoldva képet kaphatunk a terjedési sebesség frekvenciafüggéséről. A 2.6.3. *a)* ábrán a spektrális erősítési tényező fázisát, a *b)* ábrán a  $c(k)$  terjedési sebességet ábrázoltuk a hullámszám függvényében.

Az  $A$  paraméter különböző értékei mellett grafikonokról leolvasható, hogy  $A$  értékének csökkenése a terjedési sebesség egyre erősebb frekvenciafüggését okozza.  $A < 1$  esetén a nagyfrekvenciás komponensek lassabban terjednek.  $A = 1$  esetén a terjedési sebesség frekvenciafüggetlen, értéke ( $f_s = 44,1$  kHz,  $\Delta x = 1$  cm esetén)  $441$  m/s, amely megegyezik az elméleti  $\frac{\Delta x}{\Delta t}$  értékkel.

A leírtakból azt a következtetést vonhatjuk le, hogy adott hosszúságú húr mellett, a mintavételi frekvencia növelése esetén a modell csak akkor lesz diszperziómentes, ha a vizsgált pontok számát növeljük.



(a)



(b)

$A=1$

$A=0.8$

$A=0.5$

2.6.3. ábra. A numerikus ideális húr véges differencia modelljében ( $f_s = 44,1$  kHz,  $\Delta x = 1$  cm). Az *a*) ábrán a spektrális erősítési tényező fázisa, a *b*) ábrán a terjedési sebesség látható adott húrhossz mellett.

## 3. Membrán fizikai alapú modellje

Az előző fejezetben a legegyszerűbb elosztott rezgő rendszeren, az ideális húron mutattuk be a véges differencia módszer főbb jellemzőit. A módszer többdimenziós rendszerekre való alkalmazása első közelítésben nem nehezebb, mint egydimenziós esetben: a modellezni kívánt rendszert leíró PDE-ben a deriváltakat differenciahányadosokkal közelítjük. A problémát az jelenti, hogy az egydimenziós esettel ellentétben a diszkretizációt többféleképpen is elvégezhetjük, és az így kapott modellek igencsak eltérő tulajdonságokkal rendelkeznek. Az alábbiakban megpróbáljuk az előző fejezetben leírtakat egy membránra alkalmazni. Az ideális membrán véges differencia modelljén bemutatjuk a kétdimenziós rendszereknél felmerülő további problémákat, majd megvizsgáljuk, hogyan módosul a modell, ha a valódi membránokra jellemző, egyéb fizikai jelenségeket (veszteségek, nemlineáris viselkedés) is figyelembe vesszük.

### 3.1. A PDE különböző alakjai

Egy kör alakú membrán analitikus leírására a membrán differenciálegyenletének polárkoordinátás alakja a legalkalmasabb. Ennek az az oka, hogy a membrán alakját meghatározó peremfeltétel (a kitérés zérus, ha a középponttól mért távolság egy  $R$  számnál nagyobb) érvényesítése polárkoordinátás alakban a legegyszerűbb. Egy kör alakú membrán diszkretizált modelljét ugyanakkor a PDE egyéb alakjaiból is származtathatjuk. Az így kapott modellek nem ekvivalensek, közülük a célunknak leginkább megfelelőt kell választanunk. A megvalósítás egyszerűsége és viszonylag alacsony számításigénye miatt a későbbiekben a PDE Descartes-koordinátás alakját fogjuk előnyben részesíteni. Ugyanakkor az eredmények értékeléséhez ismernünk kell a kör alakú membrán módusfrekvenciáit, amelyeket a polárkoordinátás alak megoldásával kaphatunk meg.

#### 3.1.1. A PDE Descartes-féle koordinátarendszerben

A membrán differenciálegyenlete, az ideális húr egyenletéhez nagyon hasonló módon, igen egyszerűen levezethető, a levezetés és a megoldás lépései az irodalomban (pl. [Fletcher, 1991]) megtalálhatóak, ezért közlésüket itt mellőzzük.

A PDE Descartes-féle koordinátarendszerben a következőképpen írható fel:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \cdot \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \quad (3.1.1.1)$$

Láthatóan az egyenlet nagyon hasonlít az ideális húr egyenletéhez, azzal a különbséggel, hogy (3.1.1.1)-ben a kitérést jelölő  $z(x,y,t)$  az idő és mind a két térváltozó függvénye. A  $c$  terjedési sebesség ebben az esetben a

$$c^2 = \frac{T}{\sigma}$$

formulával adható meg, ahol  $\sigma$  a felületmenti tömegeloszlás (mértékegysége  $[\text{kg}/\text{m}^2]$ ),  $T$  pedig a húrnál már megismert nyugalmi (mechanikai) feszültség.

A (3.1.1.1) egyenlet csak négyyszögletes membrán esetén oldható meg egyszerűen. Ez esetben a megoldásból kiderül, hogy a kitérés itt is felírható módusok súlyozott összegeként (ld. [Fletcher, 1991, 67-68.o.]):

$$z(x, y, t) = \sum_m \sum_n z_{m,n}(x, y, t) = \sum_m \sum_n \sin(k_{x,m} x) \cdot \sin(k_{y,n} y) \cdot (A_{m,n} \cdot \sin \omega_{m,n} t + B_{m,n} \cdot \cos \omega_{m,n} t) \quad (3.1.1.2)$$

$k_{x,m}$  és  $k_{y,n}$  az  $(m,n)$  módushoz tartozó  $x$ - ill  $y$  irányú hullámszám, amelyeket a következőképpen írhatunk fel:

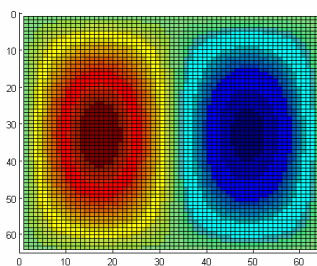
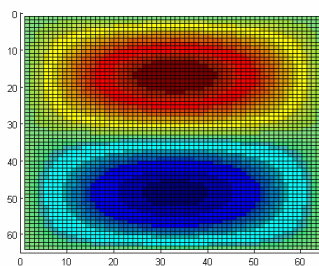
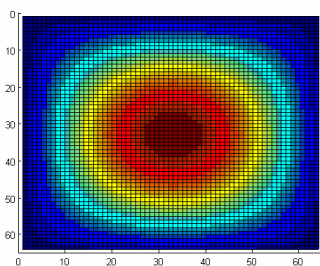
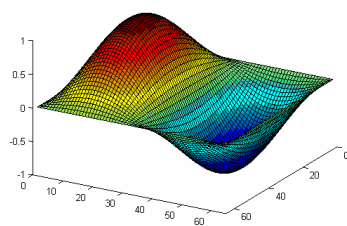
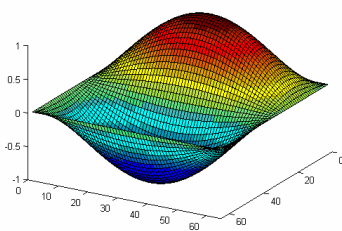
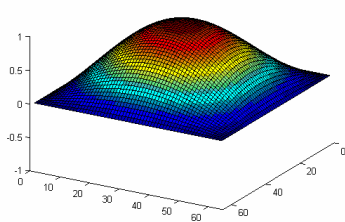
$$k_{x,m} = \frac{m\pi}{L_x}$$

$$k_{y,n} = \frac{n\pi}{L_y}$$

$L_x$  és  $L_y$  a téglalap alakú membrán két oldalának hossza. Néhány lehetséges módusalak látható a 3.1.1. ábrán.

(3.1.1.2)-t összevetve a húr (F.1.8) szerinti megoldásával látszik, hogy a négyyszögletes membrán úgy viselkedik, mint egy „kétdimenziós húr”. A módusfrekvenciák a következőképpen alakulnak (ld. [Fletcher, 1991, 67.o.]):

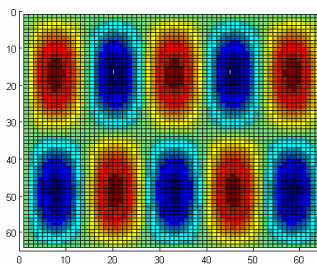
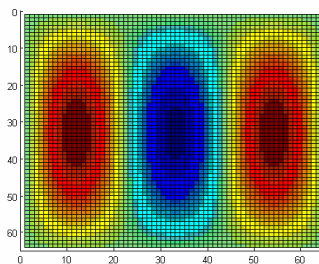
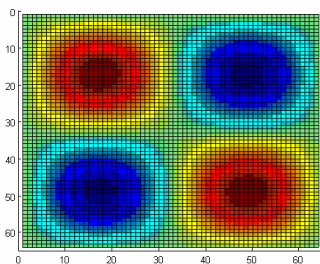
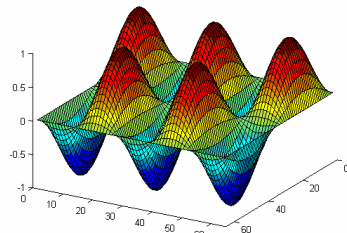
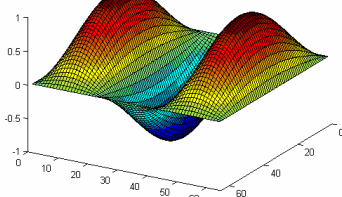
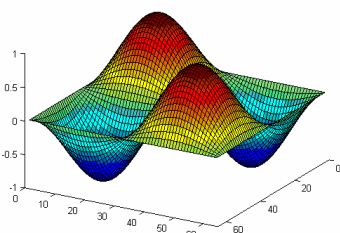
$$f_{m,n} = \frac{1}{2} c \cdot \sqrt{\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}} = \frac{c}{2\pi} \cdot \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad (3.1.1.3)$$



$m=1 \quad n=1$

$m=1 \quad n=2$

$m=2 \quad n=1$



$m=2 \quad n=2$

$m=3 \quad n=1$

$m=5 \quad n=2$

2.5.1. ábra. Négyzetleges membrán néhány módusa.

### 3.1.2. A PDE síkbeli polár-koordinátarendszerben

A membrán differenciálegyenletének polárkoordinátás alakja a (3.1.1.1) egyenletből az

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

koordinátatranszformációval származtatható. Mivel az irodalomban általában csak a végeredményt közlik, az F.3. függelékben a következő egyenlet teljes levezetése megtalálható.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} \right) \quad (3.1.2.1)$$

A megoldás ez esetben is felírható módusok összegeként, a módusokat egy csak  $r$ -től, egy csak  $\varphi$ -től és egy csak  $t$ -től függő tag szorzata adja. A módusok analitikusan Bessel-függvényekkel írhatók fel, így igen nehezen kezelhetők. Vizsgálódásainkhoz a továbbiakban csak a módusok frekvenciáinak ismerete szükséges. A (0,1) módus frekvenciája a következő összefüggéssel számolható (ld. [Fletcher, 1991, 70.o.]):

$$f_{(0,1)} = \frac{2,405}{2\pi R} \cdot \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$$

ahol  $R$  a membrán sugara. A módusfrekvenciák [Fletcher, 1991]-ben is megtalálható relatív értékeit a 3.1.2.1. táblázatban foglaltuk össze.

módus	relatív frekvencia
0,1	1
1,1	1,594
2,1	2,136
0,2	2,296
3,1	2,653
1,2	2,918
4,1	3,156
2,2	3,501
0,3	3,6
5,1	3,652
3,2	4,06
6,1	4,154

3.1.2.1. táblázat. Kör alakú membrán relatív módusfrekvenciái

## 3.2. Membrán véges differencia modellje Descartes-koordinátarendszerben

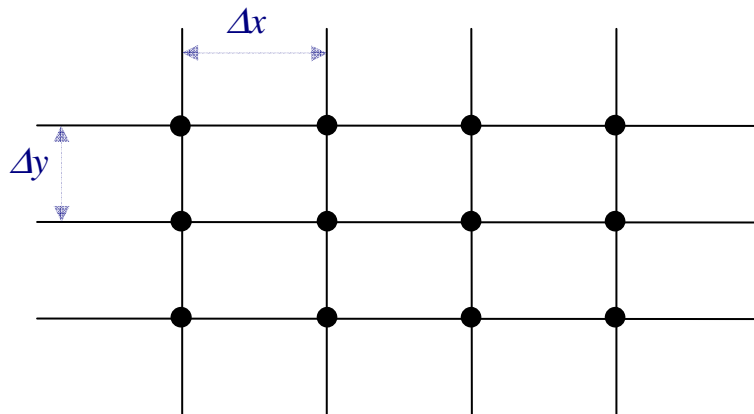
A 2.3. pontban elmondottakhoz hasonlóan, helyettesítsük a (3.1.1.1) egyenletben szereplő differenciálhányadosokat a következő kifejezésekkel:

$$z''_{xx}(i \cdot \Delta x, j \cdot \Delta y, n \cdot \Delta t) \cong \frac{z_{i+1,j,n} - 2z_{i,j,n} + z_{i-1,j,n}}{\Delta x^2}$$

$$z''_{yy}(i \cdot \Delta x, j \cdot \Delta y, n \cdot \Delta t) \cong \frac{z_{i,j+1,n} - 2z_{i,j,n} + z_{i,j-1,n}}{\Delta y^2}$$

$$z''_{tt}(i \cdot \Delta x, j \cdot \Delta y, n \cdot \Delta t) \cong \frac{z_{i,j,n+1} - 2z_{i,j,n} + z_{i,j,n-1}}{\Delta t^2}$$

A membrán kitérését  $z_{i,j,n} = z(i \cdot \Delta x, j \cdot \Delta y, n \cdot \Delta t)$  jelöli.



3.2.1. ábra. Membrán diszkrétizálása Descartes-koordinátarendszerben.

A fenti tagokat (3.1.1.1)-be helyettesítve, majd  $z_{i,j,n+1}$ -et kifejezve a következő összefüggést kapjuk:

$$z_{i,j,n+1} = A \cdot (z_{i+1,j,n} - 2z_{i,j,n} + z_{i-1,j,n}) + B \cdot (z_{i,j+1,n} - 2z_{i,j,n} + z_{i,j-1,n}) + 2z_{i,j,n} - z_{i,j,n-1} \quad (3.2.1)$$

Az egyenletben szereplő két konstans:

$$A = \left( c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \quad B = \left( c \frac{\Delta t}{\Delta y} \right)^2$$

Ebben az esetben a membrán kitérését csak a 3.2.1. ábrán látható rácspontokban határozzuk meg.

### Stabilitás:

Vizsgáljuk meg a (3.2.1) szerinti modell stabilitását a 2.5. pontban leírtak szerint! Ez esetben a Fourier-transzformációt  $x$  és  $y$  irányban is el kell végeznünk.

$$Z_{n+1}(k_x, k_y) = Z_n(k_x, k_y) \cdot (A \cdot (e^{k_x \Delta x} - 2 + e^{-k_x \Delta x}) + B \cdot (e^{k_y \Delta y} - 2 + e^{-k_y \Delta y}) + 2) - Z_{n-1}(k_x, k_y)$$

$$Z_{n+1}(k_x, k_y) - 2Z_n(k_x, k_y) \cdot (A \cdot (\cos k_x \Delta x - 1) + B \cdot (\cos k_y \Delta y - 1) + 1) + Z_{n-1}(k_x, k_y) = 0$$

ahol  $Z_n(k_x, k_y)$  a kitérés térbeli Fourier-transzformáltja az  $n$ -edik mintavételi időpontban. A kapott egyenletet  $z$ -transzformálva a pólusokra a következő egyenletet kapjuk:

$$p^2 - 2C \cdot p + 1 = 0 \quad (3.2.2)$$

ahol

$$C = A \cdot (\cos k_x \Delta x - 1) + B \cdot (\cos k_y \Delta y - 1) + 1$$

(3.2.2) gyökei:

$$p_{1,2} = C \pm \sqrt{C^2 - 1} \quad (3.2.3)$$



A modell  $|p_{1,2}| \leq 1$  esetén stabil. Ez csak  $C^2 - 1 \leq 0$  esetén teljesülhet, mivel ellenkező esetben  $|C| > 1$ , ami azt jelenti, hogy a (3.2.3) szerinti megoldások közül legalább az egyik az egységkörön kívül lesz. A stabilitás szükséges feltétele tehát  $|C| \leq 1$ , amely a következőket jelenti:

$$A \cdot (\cos k_x \Delta x - 1) + B \cdot (\cos k_y \Delta y - 1) + 1 \leq 1 \quad (3.2.4)$$

$$A \cdot (\cos k_x \Delta x - 1) + B \cdot (\cos k_y \Delta y - 1) + 1 \geq -1 \quad (3.2.5)$$

(3.2.4) mindig teljesül, mivel  $A$  és  $B$  pozitív számok, és a koszinusz függvény nem vehet fel egynél nagyobb értékeket. (3.2.5) szerint:

$$A \cdot (\cos k_x \Delta x - 1) + B \cdot (\cos k_y \Delta y - 1) \geq -2$$

amely a legkedvezőtlenebb esetben

$$A \cdot (-1 - 1) + B \cdot (-1 - 1) \geq -2$$

$$-2A - 2B \geq -2$$

A stabilitás elégséges feltétele tehát:

$$A + B \leq 1 \quad (3.2.6)$$

Egyszerűbb modellhez jutunk, ha a rácspontok  $x$  ill.  $y$  irányú távolságát azonosra választjuk, tehát ha  $\Delta x = \Delta y$ . Ez esetben  $A=B$ , így (3.2.1) és (3.2.6) helyett a következő összefüggéseket kapjuk:

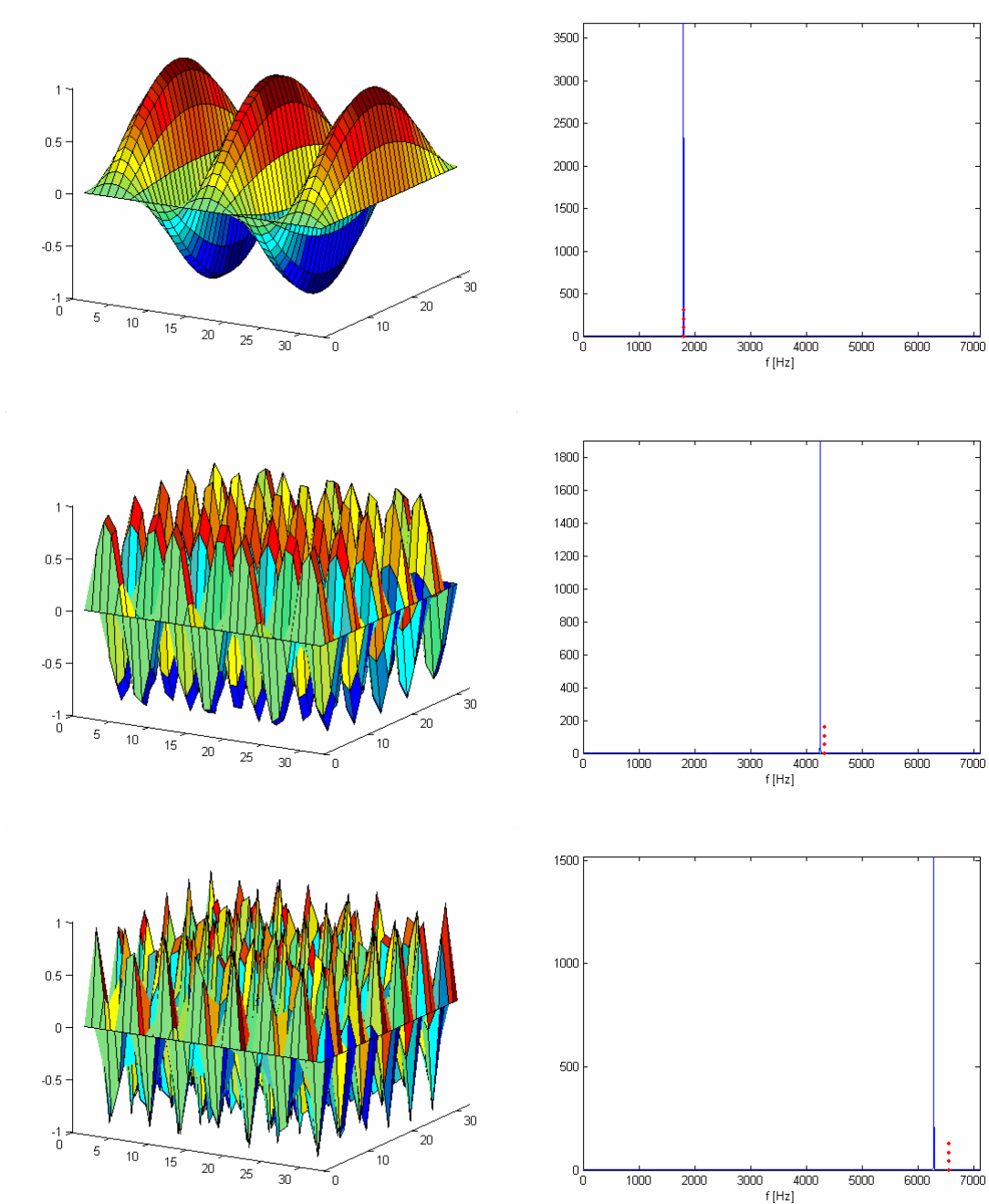
$$z_{i,j,n+1} = \left( c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (z_{i+1,j,n} + z_{i-1,j,n} + z_{i,j+1,n} + z_{i,j-1,n} - 4z_{i,j,n}) + 2z_{i,j,n} - z_{i,j,n-1} \quad (3.2.7)$$

$$\left( c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \leq \frac{1}{2}$$

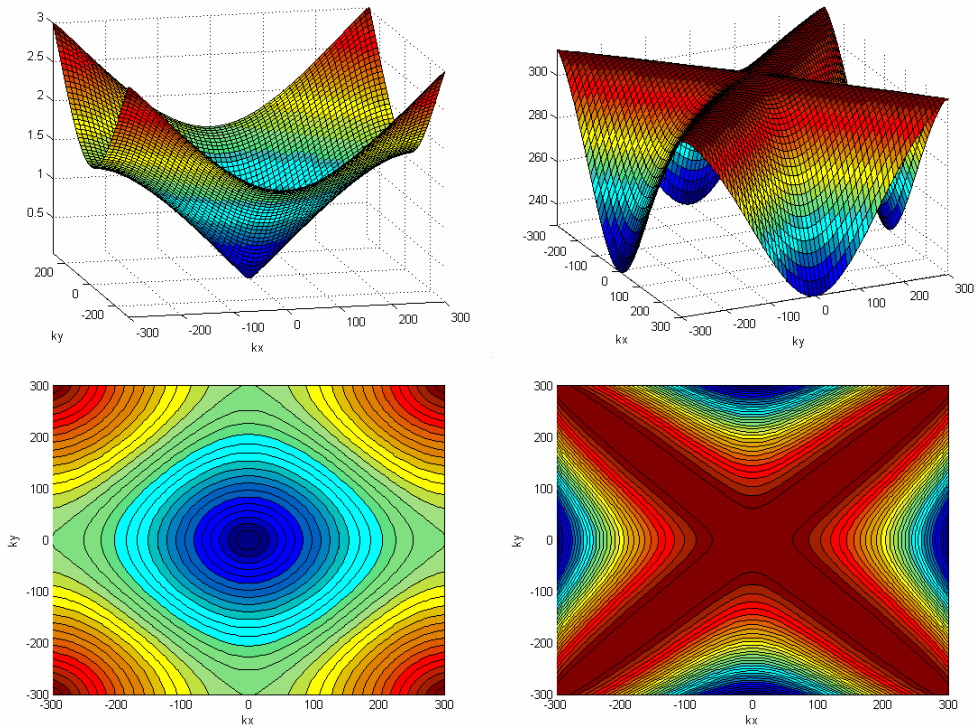
A (3.2.7) szerinti modell MATLAB megvalósítását az M.2. melléklet tartalmazza.

## Numerikus diszperzió:

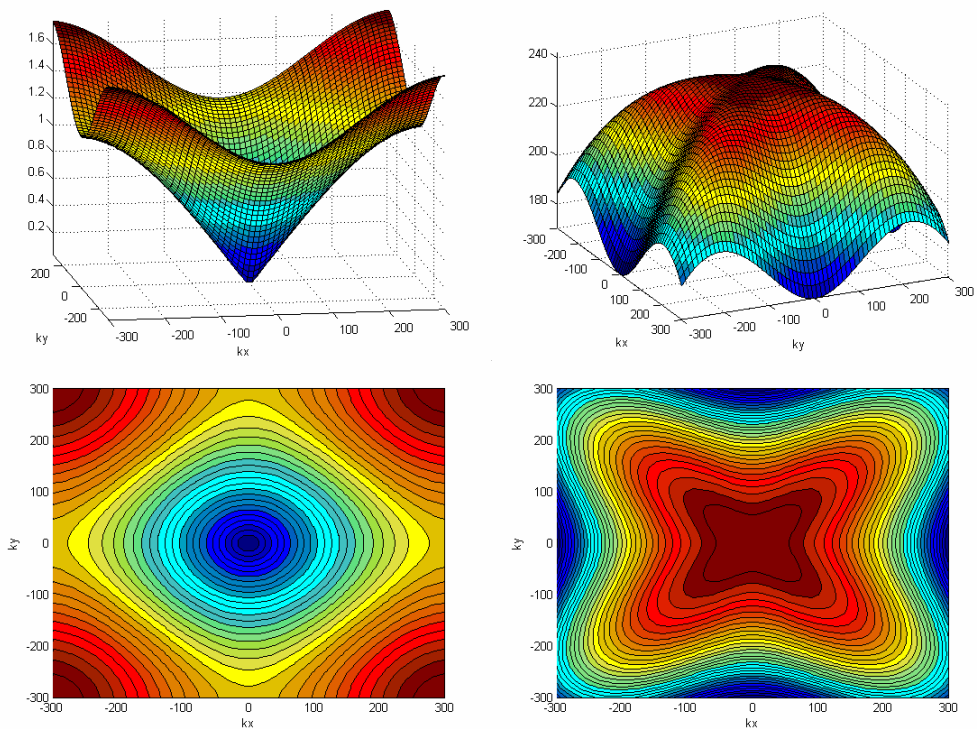
Mivel a membrán modelljét a húrrel analóg módon építettük meg, arra számítunk, hogy a numerikus diszperzió miatt a módusfrekvenciák ezúttal is kisebbek lesznek a vártnál. A kezdeti értékek megfelelő megválasztásával elérhető, hogy csak az általunk választott módusokat gerjesszük. Néhány kiválasztott módus, valamint a membrán egy pontjához tartozó kitérés időfüggvényének spektruma látható a 3.2.2. ábrán. A spektrumon ezúttal is bejelöltük a módusfrekvenciák elméleti értékét.



3.2.2. ábra. Numerikus diszperzió hatása az (1,5), a (10,7) és a (12,14) módusokra



$A=0,5$



$A=0,3$

3.2.3. ábra. Az iránymenti numerikus diszperzió szemléltetése. A bal oldalon a spektrális erősítési tényező fázisa, a jobb oldalon a terjedési sebesség látható. A felső ill. alsó ábra esetén az elméleti terjedési sebesség  $c=311.8341$ , ill.  $c=241.5456$  m/sec.

A numerikus diszperzió részletesebb vizsgálatára ezúttal is a 2.6. pontban bevezetett spektrális erősítési tényezőt fogjuk alkalmazni, azzal a különbséggel, hogy  $G$  most kétváltozós függvény.

$$Z_{n+1}(k_x, k_y) = G(k_x, k_y) \cdot Z_n(k_x, k_y)$$

Induljunk ki a membránt leíró (3.2.7) egyenletből! A 2.6. pontban leírt lépéseket elvégezve a spektrális erősítési tényezőre a következő egyenletet kapjuk:

$$G^2(k_x, k_y) - 2G(k_x, k_y) \cdot (A \cos k_x \Delta x + A \cos k_y \Delta x - 2A + 1) + 1 = 0$$

Az  $A$  paraméter két értéke mellett, a numerikus kiértékelés eredménye a 3.2.3. ábrán látható. A bal oldali ábrákon  $G(k_x, k_y)$  szögét (fázisát), a jobb oldalon pedig a

$$c(k_x, k_y) = \frac{\text{arc}G(k_x, k_y)}{\Delta t \cdot \sqrt{k_x^2 + k_y^2}}$$

kifejezéssel értelmezett terjedési sebességet ábrázoltuk.

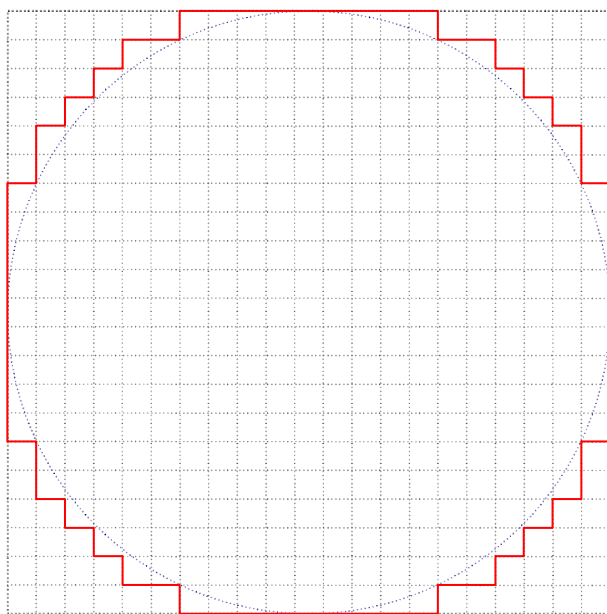
Az ábrák jól mutatják, hogy a terjedési sebesség irányfüggő. Ez az *iránymenti numerikus diszperzió* jelensége. A húrmodellt vizsgálva megfigyeltük, hogy a stabilitás határhelyzetében nem lép fel numerikus diszperzió. A membránnál ez csak átlós irányban érvényes, tehát azoknál.

## Kör alakú membrán:

A membrán Descartes-koordinátás modelljét úgy használhatjuk fel kör alakú membránmodell megvalósítására, hogy a következő peremfeltételt alkalmazzuk:

$$z_{i,j,n} \equiv 0 \quad , \text{ ha } \quad \sqrt{(i \cdot \Delta x)^2 + (j \cdot \Delta y)^2} \geq R$$

ahol  $R$  a membrán sugara. Tehát a középponttól  $R$ -nél távolabb lévő pontok kitérése mindig zérus. Ez azt jelenti, hogy a membrán szélét a 3.2.4. ábra szerint, „cikk-cakkosan” közelítjük.  $\Delta x$  csökkentésével egyre jobban megközelítjük a kör alakú membránt.

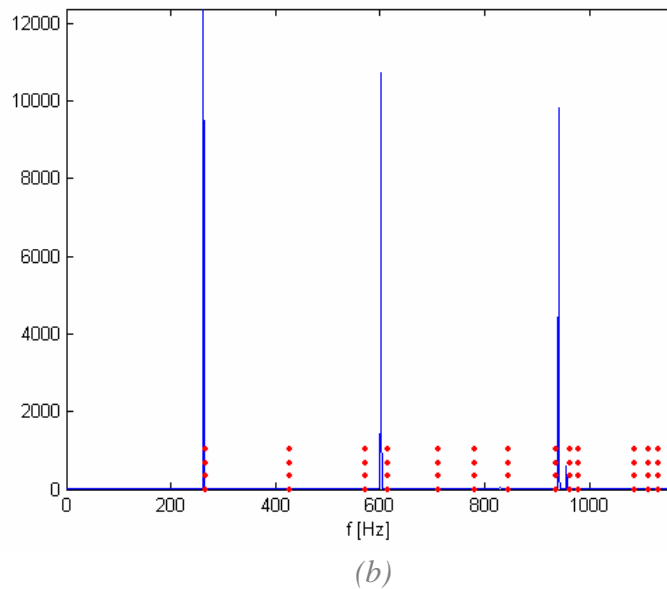
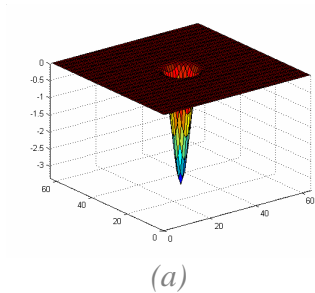


3.2.4. ábra. A kör alakú membrán közelítése Descartes-koordinátarendszerben.

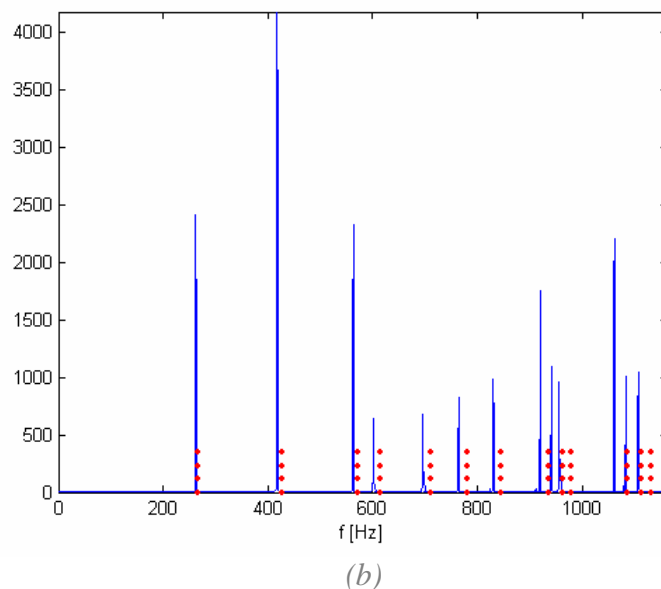
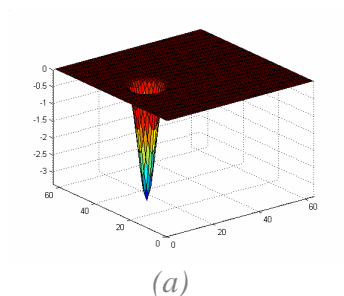
Vizsgáljuk meg az így kapott kör alakú membrán módusfrekvenciáit! A modellt középen impulzusszerűen gerjesztve, a gerjesztési pont kitérése időfüggvényének spektruma (ill. annak részlete) látható a 3.2.5. ábrán. A „hiányos” spektrumot az okozza, hogy a módusoknak bizonyos pontokban zérushelye van, tehát ott a spektrumban nem jelennek meg. A vizsgált pontban (a membrán középpontjában) pl. az (1,1), (2,1), (3,1) stb. módusok nem okoznak kitérést ill. nem gerjeszthetők. Vizsgáljuk meg, hogyan alakul a spektrum, ha a membránt a középponttól távolabb gerjesztjük! A 3.2.6. ábrán látható, hogy a numerikus diszperzió miatt a módusfrekvenciák ugyan kisebbek a vártnál, de modellünk közelítőleg helyesen írja le egy kör alakú membrán viselkedését.

### 3.3. A membránmodell bővítése

Az eddigiekben tárgyalt modell alkalmas az ideális membrán közelítő leírására. A valódi dobokban használt membránok ugyanakkor nem írhatók le az ideális membrán (3.1.1.1) vagy (3.1.2.1) egyenletével. Ennek többek között az az oka, hogy az eddig tárgyalt modell veszteségmentes, így a generált hang nem cseng le. Ezen kívül a dob hangját jelentősen befolyásolják olyan jelenségek, mint a membrán merevsége, vagy nemlineáris viselkedése. Ebben a pontban az eddig tárgyalt véges differencia modellt úgy bővítjük, hogy alkalmas legyen a fent említett fizikai hatások leírására.



3.2.5. ábra. A membránmodell térbeli alakja a gerjesztés pillanatában (a) és a középpont kitérésének spektruma (b). A membrán középpontját gerjesztjük és vizsgáljuk: „hiányos” spektrum ( $f_s = 44,1$  kHz,  $64 \times 64$  pont).



3.2.6. ábra. A membránmodell térbeli alakja a gerjesztés pillanatában (a) és a gerjesztett pont kitérésének spektruma (b). A membránt a középponttól távolabb gerjesztjük és vizsgáljuk: a spektrum (a numerikus diszperziótól eltekintve) elvárásainknak megfelelően alakul.

### 3.3.1. Frekvenciafüggetlen veszteség

A legalapvetőbb jelenség, amelyet eddig figyelmen kívül hagytunk, a rezgés amplitúdójának időbeli csökkenése. Ennek leírására bővítsük az ideális membrán differenciálegyenletét egy olyan taggal, amely a sebességgel ellentétes irányú gyorsulást okoz:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \cdot \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) - R \frac{\partial z}{\partial t} \quad (3.3.1.1)$$

A deriváltakat differenciahányadossal közelítve,  $\Delta x = \Delta y$  mellett, a következő egyenletet kapjuk:

$$z_{i,j,n+1} = \left( c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (z_{i+1,j,n} + z_{i-1,j,n} + z_{i,j+1,n} + z_{i,j-1,n} - 4z_{i,j,n}) - R \cdot \Delta t \cdot (z_{i,j,n} - z_{i,j,n-1}) + 2z_{i,j,n} - z_{i,j,n-1} \quad (3.3.1.2)$$

Vezessük be az  $A$ ,  $B$ ,  $C$  konstansokat:

$$A = \left( c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2$$

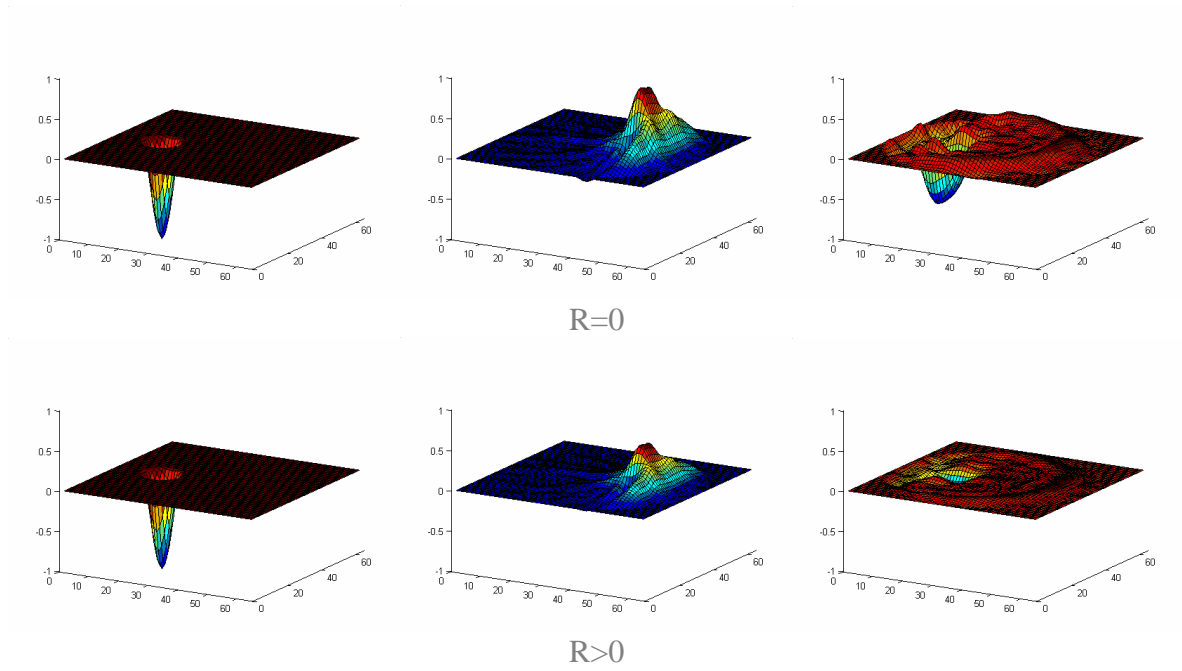
$$B = 2 - 4A - R \cdot \Delta t$$

$$C = R \cdot \Delta t - 1$$

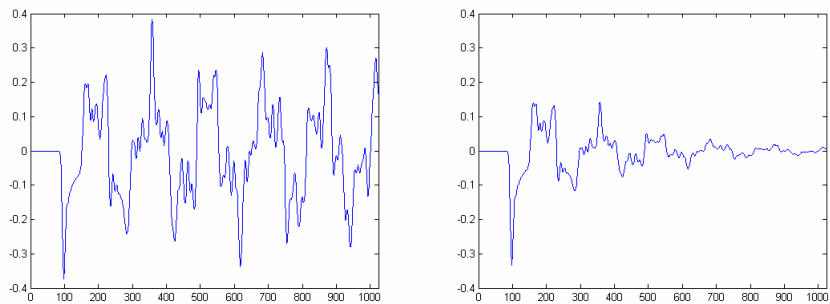
(3.3.1.2) így a következő, egyszerűbb alakra hozható:

$$z_{i,j,n+1} = A \cdot (z_{i+1,j,n} + z_{i-1,j,n} + z_{i,j+1,n} + z_{i,j-1,n}) + B \cdot z_{i,j,n} + C \cdot z_{i,j,n-1} \quad (3.3.1.3)$$

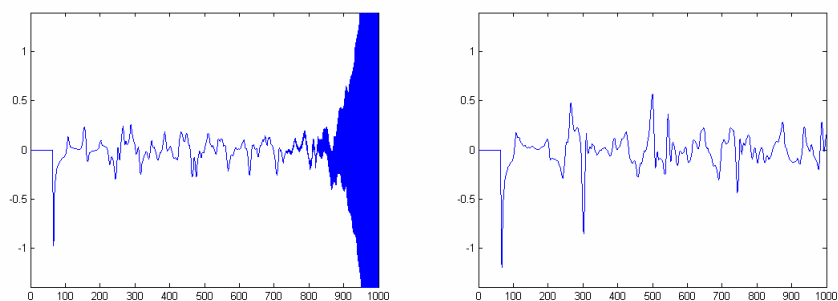
A 3.3.1.1. és 3.3.1.2. ábrán látható, hogy a rezgés amplitúdója,  $R > 0$  esetén, időben csökken.



3.3.1.1. ábra. A frekvenciafüggetlen veszteség hatása: a membrán kitérésének amplitúdója időben csökken



3.3.1.2. ábra. A veszteségmentes és a veszteséges membránmodell egy pontjának kitérése az idő (mintaszám) függvényében. Veszteséges esetben az amplitúdó időben csökken.



3.3.1.3. ábra. A veszteséges membrán egy pontjának kitérése a (3.3.1.2) ill. a (3.3.1.4) közelítés alkalmazásával.



A veszteséges modelltől azt várjuk, hogy a membrán stabilitását nem rontja, inkább javítja. Ezzel szemben a szimuláció azt mutatja, hogy  $A = 0,5$  esetén, ahol a veszteségmentes membrán még éppen stabil, a veszteséges membrán elszáll. Azt tapasztaljuk, hogy a csillapítás növelése mellett a modell stabilitása csak az  $A$  paraméter csökkentése mellett őrizhető meg. Ezt a kedvezőtlen hatást úgy küszöbölhetjük ki, ha a (3.3.1.1) egyenletben szereplő új tagot az eddigiektől eltérő módon a következő szimmetrikus taggal közelítjük:

$$z'_t(i \cdot \Delta x, j \cdot \Delta y, n \cdot \Delta t) \cong \frac{z_{i,j,n+1} - z_{i,j,n-1}}{2\Delta t} \quad (3.3.1.4)$$

A (3.3.1.1) egyenlet továbbra is érvényes marad, csak a konstansok értéke változik:

$$A = 2 \cdot \left( c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \cdot \frac{1}{2 + R \cdot \Delta t}$$

$$B = 4 \cdot \left( \frac{1}{2 + R \cdot \Delta t} - A \right)$$

$$C = \frac{R \cdot \Delta t - 2}{R \cdot \Delta t + 2}$$

Az így kapott modell  $\left( c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 = 0,5$  mellett tetszőleges  $R$  érték esetén stabil, így a továbbiakban a (3.3.1.4) közelítést fogjuk használni. A 3.3.1.3. ábra azonos paraméterértékek mellett szemlélteti a két modell stabilitását.

### 3.3.2. Frekvenciafüggő veszteség

A valódi doboknál gyakran megfigyelhető, hogy a spektrum nagyfrekvenciás komponensei gyorsabban lecsengenek, mint a kisfrekvenciás összetevők, tehát a csillapítás frekvenciafüggő. Ezt a jelenséget [Rossing, 1995] alapján úgy modellezhetjük, hogy a membrán differenciálegyenletét a következőképpen bővítjük:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \cdot \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) - R_1 \frac{\partial z}{\partial t} + R_2 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$$

Az új tag diszkrétizációja nem triviális. Az előző pontban azt tapasztaltuk, hogy a modell stabilitását javítja, ha az idő szerinti első deriváltakat (3.3.1.4) szerint helyettesítjük. A

frekvenciafüggő veszteséget leíró tagnál azonban ebben az esetben  $z_{i,j,n+1}$  nem fejezhető ki explicit módon. Az ilyen, implicit modellek megvalósítása jóval nehezebb, számításigényük nagyobb, mint az eddig tárgyalt modellek esetében, ezért a számításigényes fizikai modelleknél, amennyiben ez lehetséges, explicit modellekkel dolgozunk.  $z_{i,j,n+1}$  kifejezhetőségét szem előtt tartva, az új tagot a következőképpen közelítjük:

$$R_2 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$$

↓

$$\frac{R_2}{\Delta x^2 \Delta t} \left[ \left( z_{i+1,j,n} + z_{i-1,j,n} + z_{i,j+1,n} + z_{i,j-1,n} - 4z_{i,j,n} \right) - \left( z_{i+1,j,n-1} + z_{i-1,j,n-1} + z_{i,j+1,n-1} + z_{i,j-1,n-1} - 4z_{i,j,n-1} \right) \right] \quad (3.3.2.1)$$

Az egyes tagokat a már megszokott módon közelítve  $z_{i,j,n+1}$ -re a következő egyenletet kapjuk:

$$\begin{aligned} z_{i,j,n+1} = & \\ & A \cdot (z_{i+1,j,n} + z_{i-1,j,n} + z_{i,j+1,n} + z_{i,j-1,n}) + \\ & + B \cdot z_{i,j,n} + \\ & + C \cdot z_{i,j,n-1} - \\ & - D \cdot (z_{i+1,j,n-1} + z_{i-1,j,n-1} + z_{i,j+1,n-1} + z_{i,j-1,n-1}) \end{aligned}$$

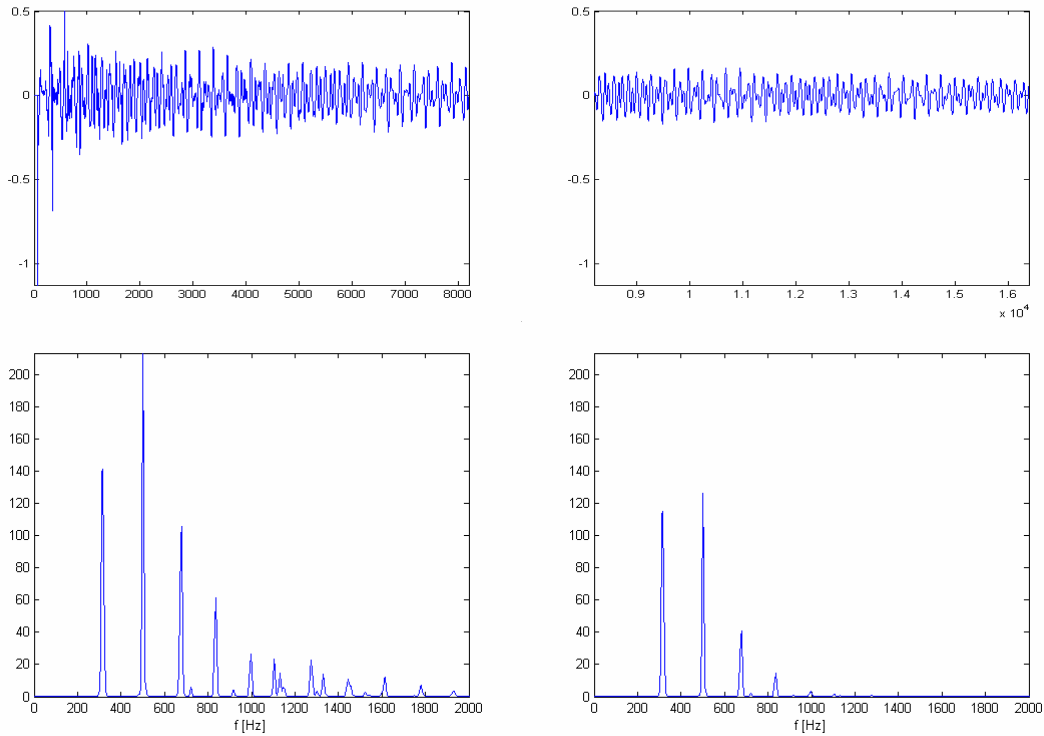
Az egyenletben szereplő konstansok:

$$A = \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} \cdot \frac{c^2 \Delta t + R_2}{2 + R_1 \Delta t} \quad (3.3.2.2)$$

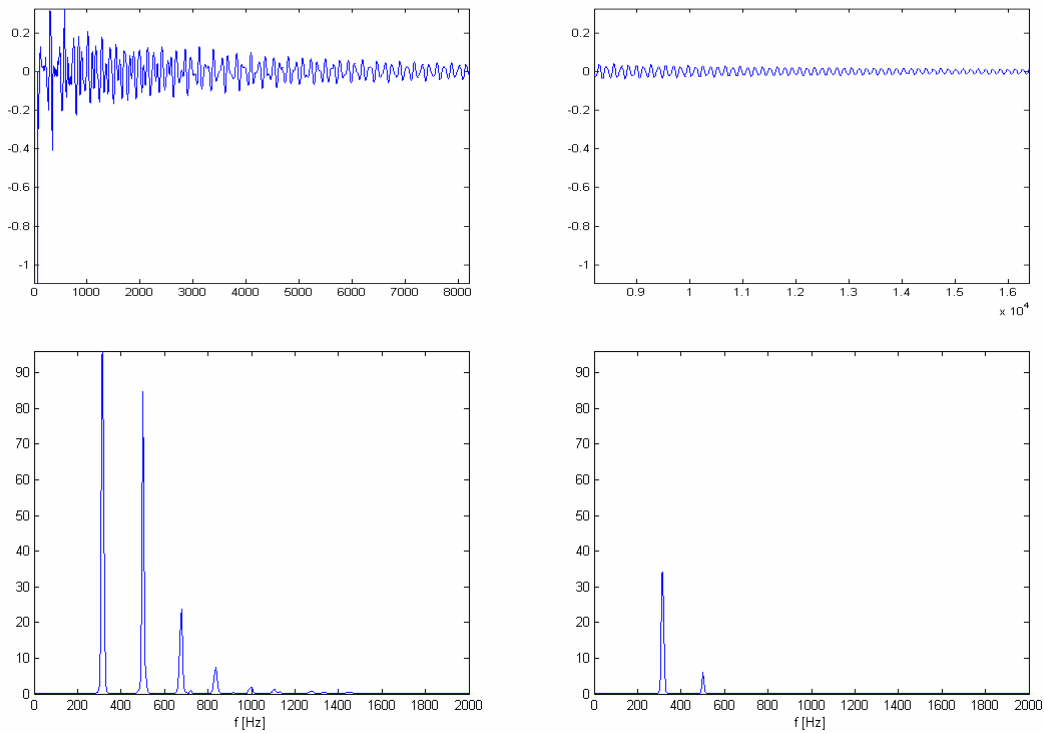
$$B = \frac{4}{\Delta x^2} \cdot \frac{\Delta x^2 - 2c^2 \Delta t^2 - 2R_2 \Delta t}{2 + R_1 \Delta t} \quad (3.3.2.3)$$

$$C = \frac{1}{\Delta x^2} \cdot \frac{R_1 \Delta t \Delta x^2 + 8R_2 \Delta t - 2\Delta x^2}{2 + R_1 \Delta t} \quad (3.3.2.4)$$

$$D = \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} \cdot \frac{R_2}{2 + R_1 \Delta t} \quad (3.3.2.5)$$



$R_2 = 0,1$



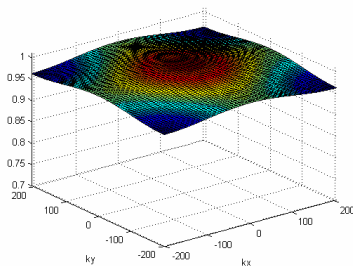
$R_2 = 0,5$

3.3.2.1. ábra. A frekvenciafüggő veszteség hatása: a magasabb frekvenciájú komponensek gyorsabban lecsengenek.

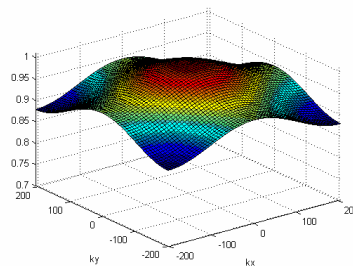
A 3.3.2.1. ábra szemlélteti a frekvenciafüggő veszteség hatását: egy pont kitérésének időfüggvényét kétfelé vágva a két rész spektrumát külön vizsgáljuk. Az ábrán látható, hogy a spektrum nagyfrekvenciás komponensei gyorsabban lecsengenek, mint az alacsonyabb frekvenciájúak, és ez a hatás  $R_2$  növelésével egyre erősebben jelenik meg.

A Von Neumann-analízis eddigiekben részletesen tárgyalt módszere természetesen itt is alkalmazható. A részletek közlése nélkül csak a spektrális erősítési tényezőre felírt egyenlet numerikus megoldását közöljük. A 3.3.2.2. ábrán a spektrális erősítési tényező abszolútértékét<sup>4</sup> ábrázoltuk az  $x$ - és  $y$  irányú hullámszám függvényében. Az ábrán jól látható, hogy  $k_x$  ill.  $k_y$  abszolútértékének növelésével a csillapítás egyre jelentősebb. (3.1.1.3) szerint a módusfrekvenciák értéke a  $\sqrt{k_x^2 + k_y^2}$  mennyiséggel, tehát a  $k_x$ -  $k_y$  koordinátarendszerben az origótól való távolsággal egyenesen arányos. Ezek szerint a 3.3.2.2. ábra, tapasztalatainkkal összhangban, azt mutatja, hogy a nagyfrekvenciás komponenseket a rendszer jobban csillapítja, és ez a hatás nagyobb  $R_2$  értékekre jelentősebb.

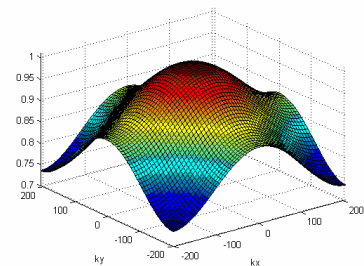
A (3.3.2.1) szerinti közelítés miatt a modell  $R_2$  növelése mellett csak  $\left(c \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2$  csökkentése mellett stabil.



$R_2 = 0,1$



$R_2 = 0,3$



$R_2 = 0,6$

3.3.2.2. ábra. A frekvenciafüggő veszteség szemléltetése a térbeli frekvenciatartományban: a spektrális erősítés abszolútértékben kisebb hullámszámokra 1-hez közeli, a hullámszámok abszolútértékét növelve csökken.

<sup>4</sup> Stabil esetben a spektrális erősítési tényezőre felírt másodfokú egyenlet két megoldása egy komplex konjugált gyökpár, így abszolútértékük megegyezik.

### 3.3.3. Merev membrán

Egy valódi membránban kialakuló rezgést az anyag merevsége is befolyásolja, mégpedig úgy, hogy a módusfrekvenciák értékét kis mértékben növeli. [Fletcher, 1991, 86.o.] szerint a frekvenciaváltozás tipikusan 1%-nál kisebb, így a merevség modellezése, valóságghú dohang előállításának szempontjából, másodlagos jelentőségű, ezért az alábbiakban csak nagy vonalakban tárgyaljuk. A merev membrán differenciálegyenlete a következőképpen alakul (ld. [Trautmann, 2001]):

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \cdot \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) - R_1 \frac{\partial z}{\partial t} + R_2 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) - S \cdot \left( \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} \right)$$

Az tér szerinti negyedik deriváltakkal arányos új tagot úgy vehetjük figyelembe, hogy eddigi modellünket az  $A$ ,  $B$ ,  $C$  és  $D$  konstansok változtatása nélkül a következő additív kifejezéssel bővítjük:

$$K_S \cdot (z_{i+2,j,n} - 4z_{i+1,j,n} + 6z_{i,j,n} - 4z_{i-1,j,n} + z_{i-2,j,n} + z_{i,j+2,n} - 4z_{i,j+1,n} + 6z_{i,j,n} - 4z_{i,j-1,n} + z_{i,j-2,n})$$

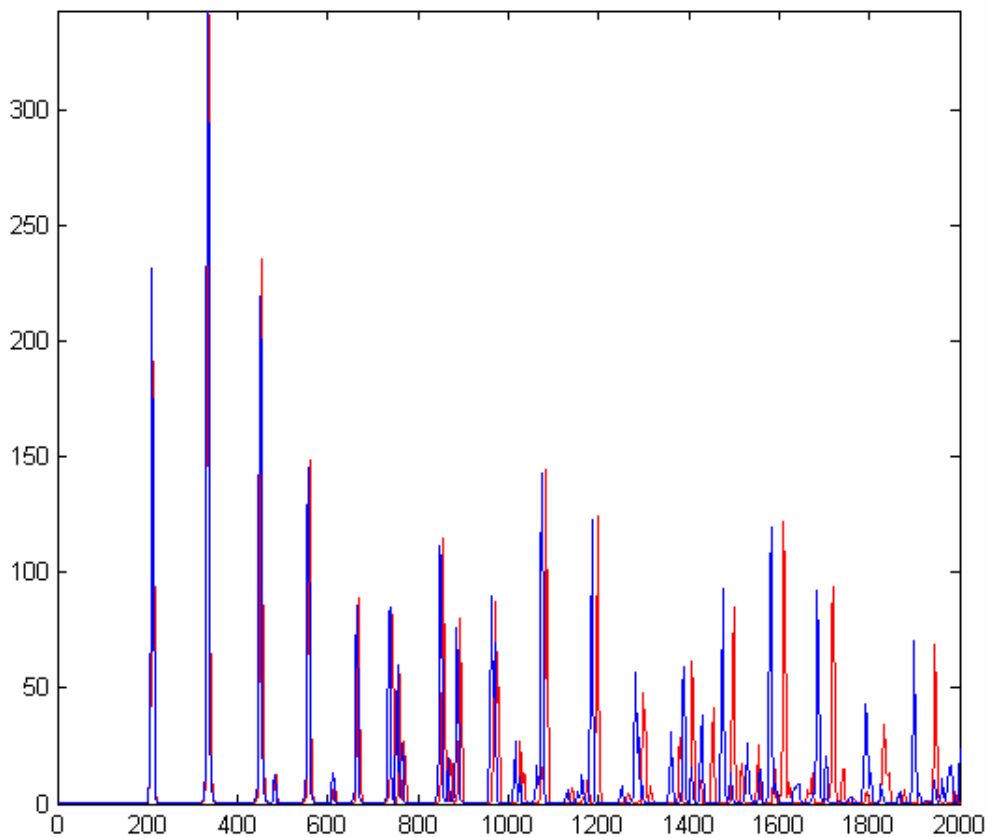
ahol

$$K_S = -S \cdot \frac{2\Delta t^2}{\Delta x^2} \cdot \frac{1}{2 + R_1 \Delta t}$$

$$S = \frac{Eh^2}{12\rho(1-\nu^2)}$$

$\rho$  a sűrűsége,  $\nu$  az ún Poisson-arány,  $E$  a Young-modulus,  $h$  pedig a membrán vastagsága.

A 3.3.1.1. ábrán látható a szimuláció eredménye. A merev membrán (piros színnel jelölt) spektrumának komponensei a magasabb frekvenciák felé tolódtak el.



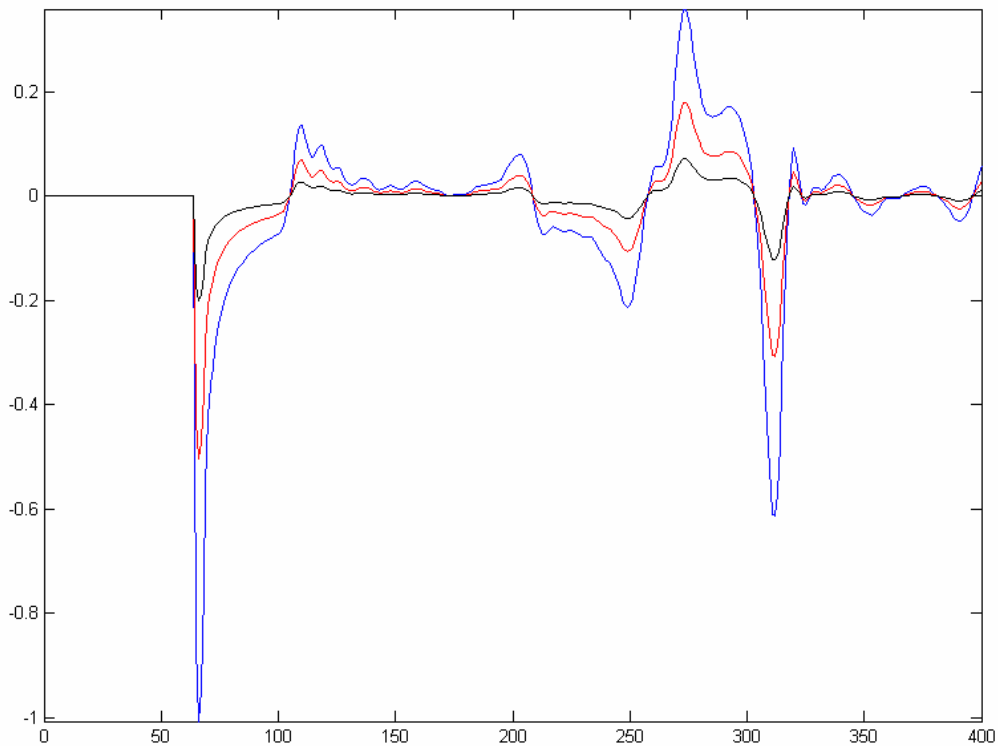
3.3.3.1. ábra. A tökéletesen rugalmas (kék színnel) és a merevséget is tartalmazó (piros színnel) spektruma ( $f_s = 16$  kHz).

### 3.3.4. Nemlineáris viselkedés

Az eddigiekben tárgyalt húr- és membránmodelleknél feltételeztük, hogy a kitérés a húr ill. membrán méreteihez képest elhanyagolható. Egy ilyen membrán gerjesztés-válasz kapcsolata lineáris: ha a gerjesztés amplitúdóját kétszeresére növeljük, a válasz amplitúdója is kétszeresére nő, de a jelalak nem változik, ez látható a 3.3.4.1. ábrán.

A valódi dobok gerjesztés-válasz kapcsolata nemlineáris: egy erősen megütött tam hangja egészen máshogy szól, mint amikor alig ütjük meg. A nemlineáris<sup>5</sup> viselkedés általában abban nyilvánul meg, hogy az erősen megütött dob hangmagassága időben csökken. Ennek oka éppen az, hogy a kitérés nem elhanyagolható a membrán méreteihez képest, emiatt a membrán feszítettsége és így a benne ébredő erő a kitéréstől függ. A (3.1.1.3) egyenlet szerint a módusfrekvenciák a  $c$  terjedési sebességgel egyenesen arányosak. A terjedési sebesség viszont a mechanikai feszültség gyökével egyenesen arányosan változik, ez megmagyarázza a hangmagasság változását (a jelenségről részletes, méréseken alapuló leírás található [Dahl, 1997]-ben).

<sup>5</sup> A jelenséget a probléma geometriájából fakad, magát az anyagot lineárisnak tekintjük, tehát érvényes rá a Hooke-törvény.



3.3.4.1. ábra. Lineáris membrán egy pontjához tartozó kitérés időfüggvénye, ha a gerjesztés amplitúdóját 2,5 ill. 5-szörösére növeljük

A feszültség kitérésfüggésének modellezése még meglehetősen új terület a hangszermodellezésben. Ez különösen igaz a kétdimenziós rendszerekre, amelyek esetében erről a jelenségről még az utóbbi években is alig jelent meg publikáció (a húrok nemlineáris rezgésekor fellépő jelenségek összefoglalása megtalálható [Bank, 2006] 5. fejezetében). Az alábbiakban a mechanikai feszültség frekvenciafüggésének levezetése következik. Az itt közölt levezetés [Petrausch, 2005] alapján készült, ahol a végeredményt a függvénytranszformációs módszerrel (ld. 1.2.4. pont) implementálták.

A jelenség viszonylag egyszerűen modellezhető, ha feltételezzük, hogy a membránban a longitudinális hullámok jóval gyorsabban terjednek, mint a transzverzálisak. Ekkor a mechanikai feszültség egy adott pillanatban a membrán minden pontjában azonosnak tekinthető. A későbbiekben látni fogjuk, hogy a membrán nemlineáris viselkedése ezzel a feltételezéssel is jól modellezhető. Kétdimenziós esetben a megnyúlást leíró Hooke-törvény a következő alakban írható fel:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l_x}{l_x} = \frac{\Delta T_x}{E} - p \frac{\Delta T_y}{E}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta l_y}{l_y} = \frac{\Delta T_y}{E} - p \frac{\Delta T_x}{E}$$

$\varepsilon_x$  és  $\varepsilon_y$  az  $x$ - és  $y$  irányú relatív megnyúlás,  $p$  az anyagra jellemző Poisson-arány,  $E$  a Young-modulus. Feltevésünk szerint a longitudinális hullámok a membránban igen gyorsan terjednek, így a membránt  $x$ - és  $y$  irányban azonos nagyságú erővel feszítve<sup>6</sup> a mechanikai feszültség  $x$ - és  $y$  irányú komponense minden pontban azonosnak tekinthető, tehát

$$T_x = T_y = T$$

Ezt felhasználva írjuk fel a Hooke-törvényt a membrán egy kis, téglalap alakú felületdarabra, amelynek oldalhosszúságai  $l_x^S$ , ill.  $l_y^S$ :

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l_x}{l_x^S} = \frac{T}{E} - p \frac{T}{E} = \frac{T}{E}(1-p)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta l_y}{l_y^S} = \frac{T}{E} - p \frac{T}{E} = \frac{T}{E}(1-p)$$

Ebből következik, hogy

$$l_x^S \Delta l_y = \Delta l_x l_y^S$$

így

$$T = \frac{\Delta l_1}{l_1^S} \frac{E}{(1-p)} \quad (3.3.4.1)$$

A felületdarab felszínének megváltozása a következőképpen írható fel:

$$\Delta A^S = A^S - A_0^S = (l_x^S + \Delta l_x)(l_y^S + \Delta l_y) - l_x^S l_y^S = l_x^S \Delta l_y + \Delta l_x l_y^S + \Delta l_x \Delta l_y$$

Ha feltesszük, hogy a felületdarab csak kis mértékben nyúlik meg ( $\Delta l_i \ll l_i^S$ ), akkor érvényes a következő közelítés:

$$\Delta A^S \cong 2\Delta l_x l_y^S$$

Ekkor a felületdarab oldalának relatív megnyúlására igaz, hogy

$$\frac{\Delta l_x}{l_x^S} = \frac{\Delta A^S}{2l_x^S l_y^S}$$

---

<sup>6</sup> A valódi dobokra érvényes feltevés.



(3.3.4.1)-be behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$T = \frac{\Delta A^S}{2l_x^S l_y^S} \frac{E}{(1-p)}$$

Feltevésünk szerint a longitudinális hullámok gyors terjedése miatt a feszültség a membrán teljes felületén pillanatszerűen kiegyenlítődik, így a felületdarabok megváltozása mindenhol azonos nagyságú, ezért a fenti kifejezés felírható a teljes membrán felszínváltozásával ( $\Delta A^M$ ) is:

$$T = \frac{\Delta A^M}{2L_x L_y} \frac{E}{(1-p)} = \frac{A^M - A_0^M}{2L_x L_y} \frac{E}{(1-p)} \quad (3.3.4.2)$$

A membrán felülete egy adott pillanatban a következő integrállal számítható:

$$A^M = \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

Kis  $a$  értékek esetén a  $\sqrt{1+a}$  kifejezést elsőrendű Taylor-polinomjával közelíthetjük:

$$\sqrt{1+a} \cong 1 + \frac{a}{2}$$

így a fenti integrál a következő kifejezéssel közelíthető:

$$\begin{aligned} A^M &= \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right) \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right) dx dy = \\ &= \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right) dx dy = \\ &= L_x L_y + \frac{1}{2} \cdot \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \left(\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right) dx dy \end{aligned}$$

Behelyettesítve a (3.3.4.2) kifejezésbe:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{A^M - L_x L_y}{2L_x L_y} \frac{E}{(1-p)} = \\
&= \frac{E}{(1-p)} \frac{L_x L_y + \frac{1}{2} \cdot \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \left( \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy - L_x L_y}{2L_x L_y} = \\
&= \frac{1}{4} \frac{E}{(1-p)} \frac{1}{L_x L_y} \cdot \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \left( \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy
\end{aligned}$$

A kitéréstől függő mechanikai feszültségre kapott összefüggés tehát:

$$T(z) = \frac{1}{4} \frac{E}{(1-p)} \frac{1}{L_x L_y} \cdot \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \left( \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy \quad (3.3.4.3)$$

Nemlineáris modellünk tehát a következőképpen működik: a membrán pontjainak kitérése megváltoztatja annak felületét, a felületváltozás miatt a membrán feszítettsége is megváltozik, a membránfeszültség pedig közvetlenül befolyásolja a módusfrekvenciákat (egy jobban megfeszített membrán hangja magasabb). A feszültség változása a  $c$  terjedési sebességet befolyásolja.  $c$  folyamatos változása miatt  $A$  és  $B$  a nemlineáris modellben nem konstans, értéküket minden mintavételi időpontban újra ki kell számolni. Az eddigiek alapján a nemlineáris membránmodellt az alább leírtak szerint implementálhatjuk.

(3.3.4.3)-ben a deriváltakat az alábbi kifejezésekkel közelítjük:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cong \frac{z_{i+1,j,n} - z_{i-1,j,n}}{2\Delta x} = D_1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} \cong \frac{z_{i,j+1,n} - z_{i,j-1,n}}{2\Delta y} = D_2$$

A továbbiakban téglalap- helyett négyzet alakú membránnal számolunk, tehát  $L_x = L_y = L$ . Az integrálást összegzéssel közelítve minden mintavételi időpontban kiszámoljuk  $T(z)$  értékét:

$$T(z) = \frac{1}{4} \frac{E}{(1-p)} \frac{1}{L^2} \cdot \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left( D_1^2 + D_2^2 + \frac{1}{2} D_1^2 D_2^2 \right)$$

$T(z)$  értékének ismeretében kiszámolhatjuk a membrán mechanikai feszültségének értékét:

$$T_{NL} = T_0 + Q \cdot T(z)$$

A  $Q$  skálázó tényező értéke jelentősen befolyásolja a membrán stabilitását és a hang jellegét.  $Q$  növelésével a hangmagasság változása erőteljesebben jelentkezik, viszont a modell instabillá válhat.  $T_{NL}$  ismeretében kiszámolhatjuk  $A$  (3.3.2.2) és  $B$  (3.3.2.3) értékét. A számításigény csökkentésére a kifejezéseket bontsuk egy  $c$ -től függő és egy  $c$ -től független részre az alábbiak szerint:

$$A = \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} \cdot \frac{c^2 \Delta t + R_2}{2 + R_1 \Delta t} = \frac{2\Delta t \cdot R_2}{\Delta x^2 (2 + R_1 \Delta t)} + c^2 \frac{2\Delta t^2}{\Delta x^2 (2 + R_1 \Delta t)}$$

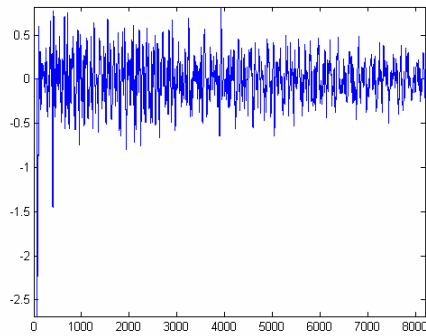
$c^2$  helyére  $\frac{T_{NL}}{\sigma}$ -t helyettesítve:

$$A = \frac{2\Delta t \cdot R_2}{\Delta x^2 (2 + R_1 \Delta t)} + T_{NL} \frac{2\Delta t^2}{\sigma \cdot \Delta x^2 (2 + R_1 \Delta t)} = A_1 + T_{NL} \cdot A_2$$

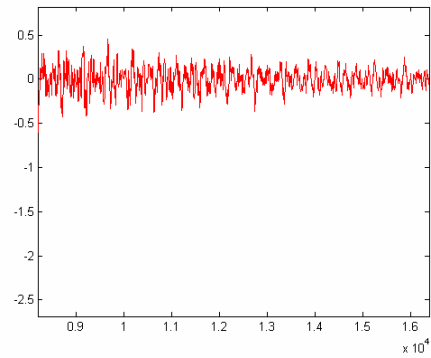
$A_1$  és  $A_2$  értékét csak egyszer kell kiszámolnunk, így a számításigényt jelentősen csökkentettük. Hasonlóan járunk el  $B$  kiszámításánál:

$$B = \frac{4\Delta x^2 - 8R_2 \Delta t}{\Delta x^2 (2 + R_1 \Delta t)} - T_{NL} \frac{8\Delta t^2}{\sigma \cdot \Delta x^2 (2 + R_1 \Delta t)} = B_1 - T_{NL} \cdot B_2$$

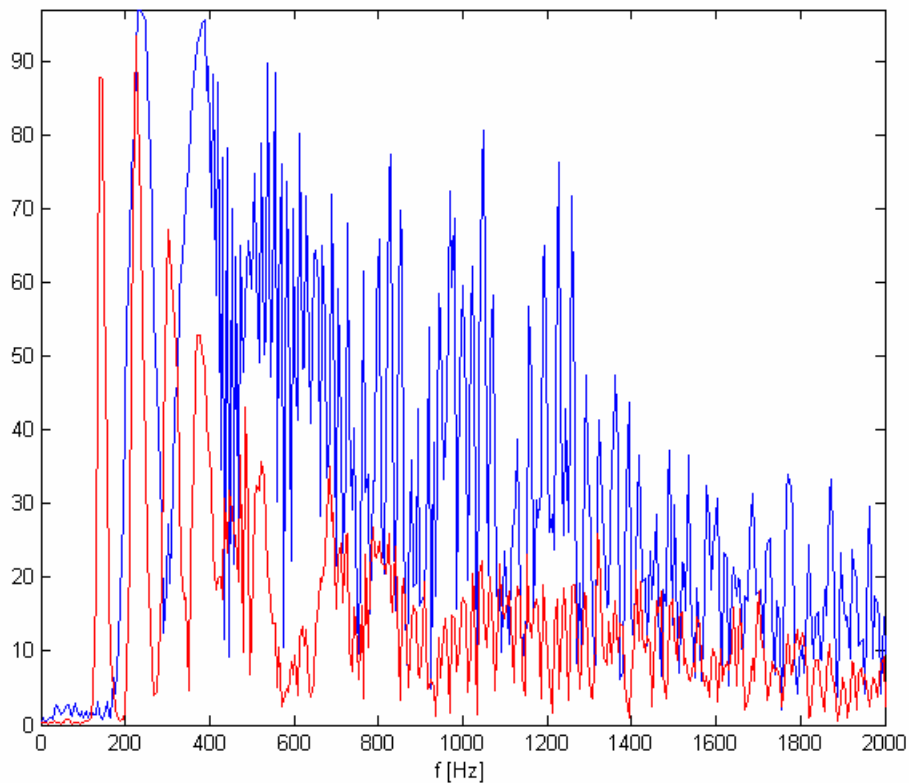
A program tehát csak annyiban változott, hogy  $A$  és  $B$  értékét minden ciklusban újra kell számolni, a kitérés kiszámítását végző programrész változatlan.



(a)



(b)



(c)

3.3.4.2. ábra. Az (a) ill. (b) ábrán a nemlineáris membránmodell egy pontjának kitérése látható az idő függvényében, a (c) ábrán pedig a hozzájuk tartozó spektrum (kékkel az időfüggvény elejéhez, pirossal a végéhez tartozó spektrum).

A 3.3.4.2. ábrán a nemlineáris modell által generált időfüggvény első ill. második felét, valamint spektrumaikat ábrázoltuk. A módusfrekvenciák változását egyrészt az jelzi, hogy a spektrum nem vonalas, másrészt pedig, hogy az időfüggvény második felének spektruma láthatóan az alacsonyabb frekvenciák felé tolódott el. A 3.3.4.3. ábra szemlélteti a gerjesztés-válasz kapcsolat nemlinearitását: erősebb gerjesztés esetén nem csak az amplitúdó, hanem a jelalak is erősen megváltozik.



3.3.4.3. ábra. Nemlineáris membrán kitérésének időfüggvénye, ha a gerjesztés amplitúdóját 2,5 ill. 5-szörösére növeljük

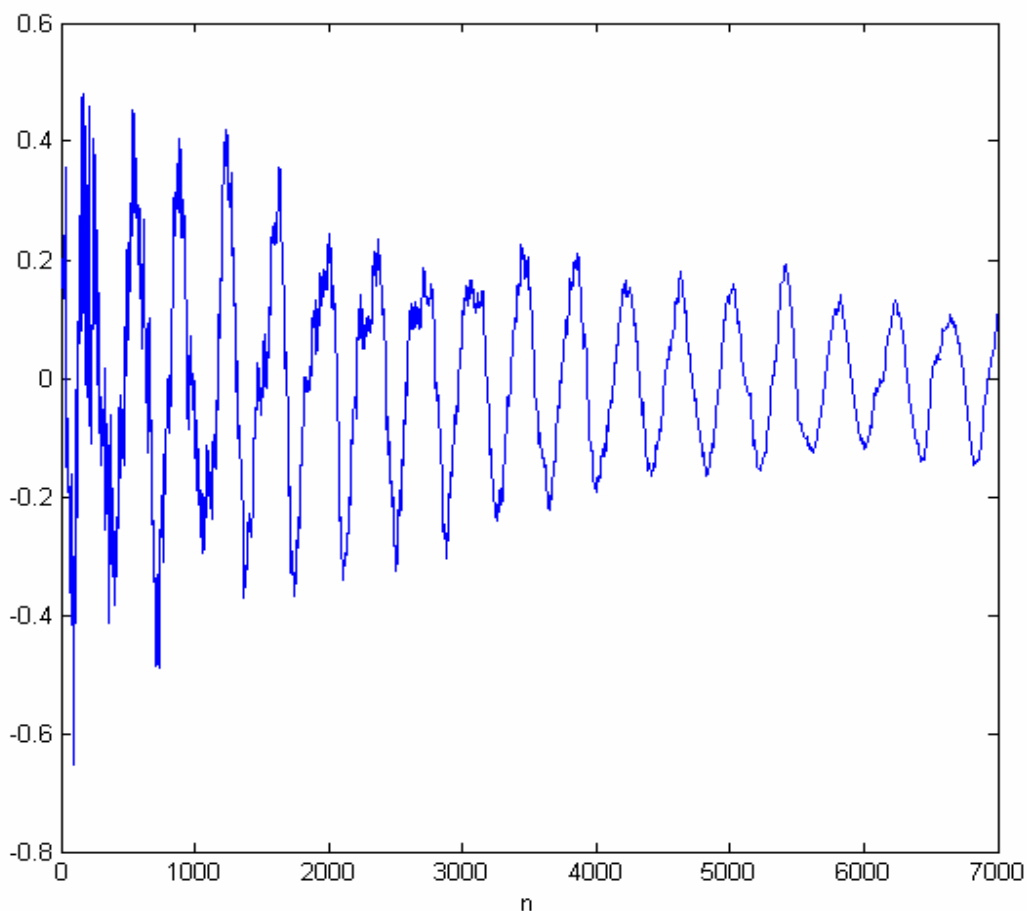
Veszteséges membrán esetén a rezgés amplitúdója, és így a membrán felülete időben csökken. Ez viszont a mechanikai feszültség és a módusfrekvenciák csökkenését vonja maga után, ezért a csillapítás megválasztása jelentősen befolyásolja a hangmagasság időbeli változását. Csillapítatlan esetben a terjedési sebesség monoton nő, így a modell előbb-utóbb biztosan elszáll. Ennek oka valószínűleg a nemlineáris viselkedés levezetésénél tárgyalt elhanyagolásokban keresendő. Ez a stabilitási probléma viszont a gyakorlatban nem okoz gondot, mivel a modell már a csillapítás egészen kis (a valóságú dobhanghoz szükségesnél jóval kisebb) értéke esetén is stabil.

A gerjesztés-válasz kapcsolat nemlinearitásának modellezése lehetővé teszi a számos valódi dobokrara jellemző hang reprodukálását, így a modell valósághűségét nagymértékben növeli. A nemlineáris modell, megfelelő paraméterértékek esetén, ugyanakkor egészen egyedi hangzások előállítására is alkalmas.



## 4. A dobverő modellezése

Az eddigiekben tárgyalt membránmodellt úgy hoztuk rezgésbe, hogy bizonyos pontjainak valamilyen kezdeti sebességet adtunk, tehát a gerjesztés pillanatszerű volt. Egy dobverővel megütött dob hangjával összehasonlítva hallható, hogy a dobverővel történő gerjesztés során sokkal több a nagyfrekvenciás komponens és így a hang élesebb. A felvett hang időfüggvényét (ld. 4.1. ábra) vizsgálva észrevehetjük, hogy a megütés pillanatában jelenlévő nagyfrekvenciás komponensek igen hamar eltűnnek. Ez arra utal, hogy a dobverő és a membrán rövid ideig együtt mozog. Az elmondottak azt mutatják, hogy a dobverővel történő gerjesztés nem tekinthető pillanatszerűnek, és jelentősen befolyásolja a hangszer hangját. A gerjesztő eszköz modellezésével már korábban is foglalkoztak (ld. pl. [Boutillon, 1988]). Bizonyos esetekben (pl. zongorahúr kalapáccsal történő gerjesztése) az egy tömegből és egy rugóból álló rendszer is alkalmas lehet a gerjesztés modellezésére. Vizsgálataink szerint azonban a dob esetében az élethű hanghoz a teljes dobverő modellezése szükséges, ezért ebben a fejezetben a véges differencia módszer apparátusát felhasználva felépítjük, majd dobmodellünkbe integráljuk a dobverő fizikai alapú modelljét.



4.1. ábra. Egy valódi, dobverővel megütött dob hangjának mikrofonnal történő rögzítésével kapott időfüggvény.

## 4.1. A dobverő véges differencia modellje

A dobverő véges differencia modelljének felépítésekor a húrnál és a membránál leírtak szerint fogunk eljárni: a rezgő rendszert leíró differenciálegyenletet időben és térben diszkretizáljuk, majd a kitérés következő mintavételi időpontbeli értékét kifejezve egy explicit differenciaegyenlethez jutunk, amely egyszerűen megvalósítható. A dobverő modellezéséhez induljunk ki a henger alakú, merev rúd [Fletcher, 1991] 56. oldalán is közölt differenciálegyenletéből.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -\frac{E \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2}{\rho} \cdot \frac{\partial^4 z}{\partial x^4}$$

ahol  $z$  a rúd kitérése,  $E$  az anyagra jellemző Young-modulus,  $\rho$  a sűrűség,  $r$  pedig a henger sugara. Gyorsulásmérővel megvizsgáltuk hogyan rezeg egy valódi dobverő, ha hozzáütjük egy kemény tárgyhoz. A 4.1.1. ábrán látható a gyorsulás lecsengő időfüggvénye. Látható, hogy a nagyfrekvenciás komponensek nagyon gyorsan eltűnnek a jelből, tehát a csillapítás frekvenciafüggő. A veszteséget a membránál leírtakkal analóg módon, a differenciálegyenlet bővítésével írjuk le.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -\frac{E \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2}{\rho} \cdot \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} - R_1 \cdot \frac{\partial z}{\partial t} + R_2 \cdot \frac{\partial^3 z}{\partial t \partial x^2} \quad (4.1.1)$$

A deriváltakat közelítsük a következő kifejezésekkel:

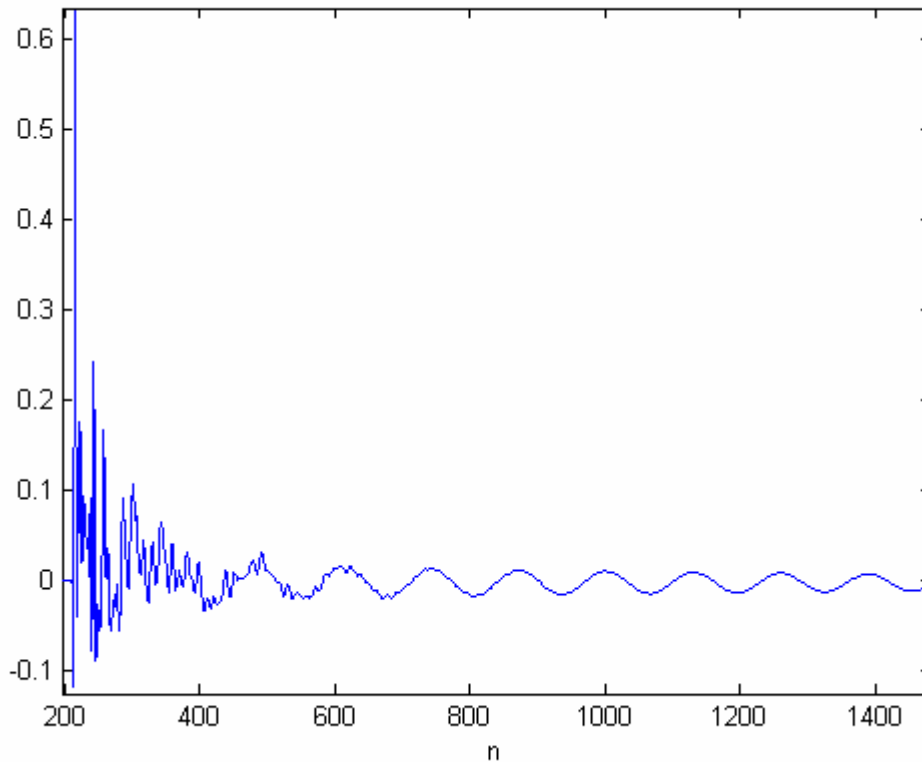
$$z'_t(i \cdot \Delta x, n \cdot \Delta t) \cong \frac{z_{i,n+1} - z_{i,n-1}}{2\Delta t}$$

$$z''_{tt}(i \cdot \Delta x, n \cdot \Delta t) \cong \frac{z_{i,n+1} - 2z_{i,n} + z_{i,n-1}}{\Delta t^2}$$

$$z^{(4)}_x(i \cdot \Delta x, n \cdot \Delta t) \cong \frac{z_{i+2,n} - 4z_{i+1,n} + 6z_{i,n} - 4z_{i-1,n} + z_{i-2,n}}{\Delta x^4}$$

$$z'''_{txx}(i \cdot \Delta x, n \cdot \Delta t) \cong \frac{1}{\Delta t \Delta x^2} \left[ (z_{i+1,n} - 2z_{i,n} + z_{i-1,n}) - (z_{i+1,n-1} - 2z_{i,n-1} + z_{i-1,n-1}) \right]$$





4.1.1. ábra. Dobverő gyorsulásának időfüggvénye (a mérés nem kalibrált, így a függőleges tengely értékei a gyorsulással arányos mennyiségek).

A kifejezéseket (4.1.1)-be behelyettesítve a következő differenciaegyenletet kapjuk:

$$\begin{aligned} & \frac{z_{i,n+1} - 2z_{i,n} + z_{i,n-1}}{\Delta t^2} = \\ & - \frac{E \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2}{\rho} \cdot \frac{z_{i+2,n} - 4z_{i+1,n} + 6z_{i,n} - 4z_{i-1,n} + z_{i-2,n}}{\Delta x^4} - \\ & - R_1 \cdot \frac{z_{i,n+1} - z_{i,n-1}}{2\Delta t} + \\ & + \frac{R_2}{\Delta t \Delta x^2} \left[ (z_{i+1,n} - 2z_{i,n} + z_{i-1,n}) - (z_{i+1,n-1} - 2z_{i,n-1} + z_{i-1,n-1}) \right] \end{aligned}$$

$z_{i,n+1}$ -et kifejezve:

$$z_{i,n+1} = A \cdot (z_{i+2,n} + z_{i-2,n}) + B(z_{i+1,n} + z_{i-1,n}) + C \cdot z_{i,n} + D \cdot z_{i,n-1} + M \cdot (z_{i+1,n-1} + z_{i-1,n-1}) \quad (4.1.2)$$

ahol a konstansok értékei:

$$A = -\frac{E \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2}{\rho \cdot \Delta x^4} \cdot \frac{2\Delta t^2}{2 + R_1\Delta t}$$

$$B = -M - 4A$$

$$C = 6A + \frac{4}{2 + R_1\Delta t} + 2M$$

$$D = \frac{R_1\Delta t - 2}{R_1\Delta t + 2} - 2M$$

$$M = -\frac{2\Delta t}{\Delta x^2} \frac{R_2}{2 + R_1\Delta t}$$

Vizsgáljuk meg a modell stabilitását! A (4.1.2) egyenleten végrehajtva a tér szerinti Fourier-transzformációt:

$$Z_{n+1}(k) = Z_n(k) \cdot [2A \cdot \cos(k \cdot 2\Delta x) + 2B \cdot \cos(k \cdot \Delta x) + C] + Z_{n-1}(k) \cdot [D + 2M \cdot \cos(k \cdot \Delta x)]$$

A z-transzformáció elvégzése után a pólusokra a következő egyenletet kapjuk:

$$p^2 - [2A \cdot \cos(k \cdot 2\Delta x) + 2B \cdot \cos(k \cdot \Delta x) + C] \cdot p - [D + 2M \cdot \cos(k \cdot \Delta x)] = 0$$

A paraméterek adott értéke mellett a modell stabilitását a kapott egyenlet numerikus megoldásával határozhatjuk meg. Az egyes paraméterek értékét változtatva azt tapasztaljuk, hogy a stabil modell akkor válhat instabillá, ha

- a henger sugarát növeljük
- adott pontszám mellett a rúd hosszát csökkentjük ( $\Delta x$  csökken)
- a Young-modulus értékét növeljük
- a sűrűséget csökkentjük
- adott hossz mellett a pontszámot növeljük ( $\Delta x$  csökken)
- a mintavételi frekvenciát növeljük

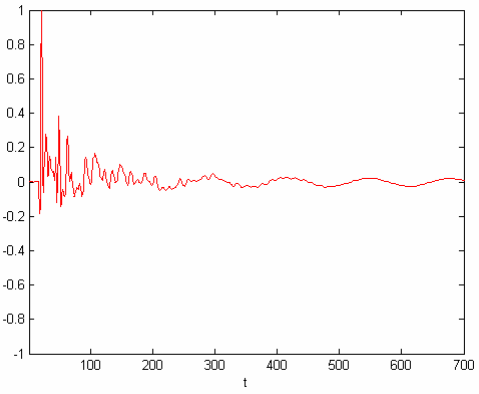
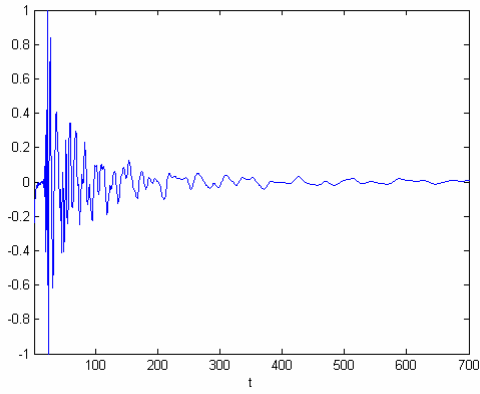
[Fletcher, 1991, 58-60.o.] szerint a henger alakú rúd módusfrekvenciáit az első négy felsorolt módosítás növeli. Ebből az következik, hogy  $\Delta t$  és  $\Delta x$  megválasztása meghatározza a módusfrekvenciák felső korlátját. A húr és a membrán esetében is ugyanez a helyzet, viszont a dobverővel megütött dob hangjában jelenlévő nagyfrekvenciás komponensek alapján azt

várjuk, hogy a dobverő módusfrekvenciái várhatóan jóval nagyobbak, mint a membránra jellemző értékek. Azt tapasztaljuk, hogy 44,1 kHz-es mintavételi frekvencia esetén a 16 pontból álló modell a paraméterek alábbi értékei mellett igen jól közelíti egy dobverő viselkedését.

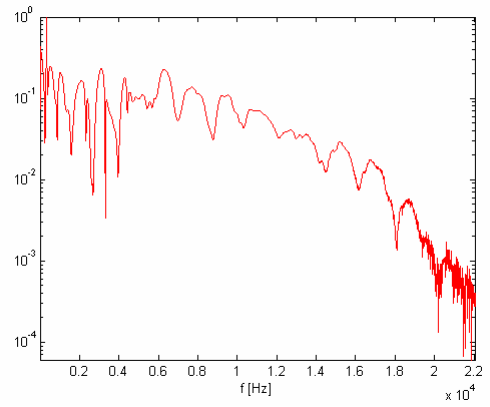
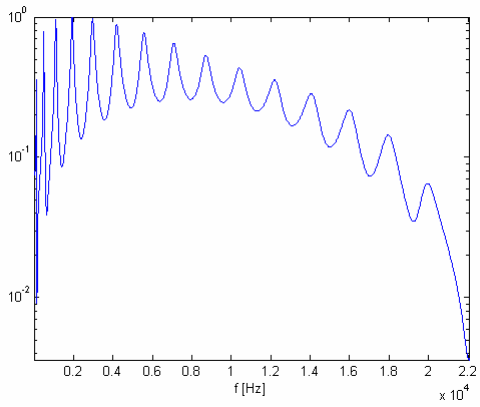
$$\begin{aligned}r &= 1 \text{ cm} \\L &= 30 \text{ cm} \\E &= 1,9 * 10^9 \text{ N/m}^2 \\ \rho &= 650 \text{ kg/m}^3 \\R_1 &= 20 \text{ s}^{-1} \\R_2 &= 0,5 \text{ m}^2/\text{s}\end{aligned}$$

A modellt úgy gerjesztjük, hogy egyik végpontjának valamilyen kezdeti sebességet adunk. A gerjesztési pont gyorsulás-idő függvénye illetve a méréssel kapott függvény látható a 4.1.2. ábrán. A hasonlóság a frekvenciatartományban is megmutatkozik, ezt szemlélteti a 4.1.3. ábra. A 4.1.4. ábrán a modell által generált és a mért jel első 400 mintájának elhagyásával kapott időfüggvények spektruma látható, amely a frekvenciafüggő lecsengés hasonlóságát szemlélteti.

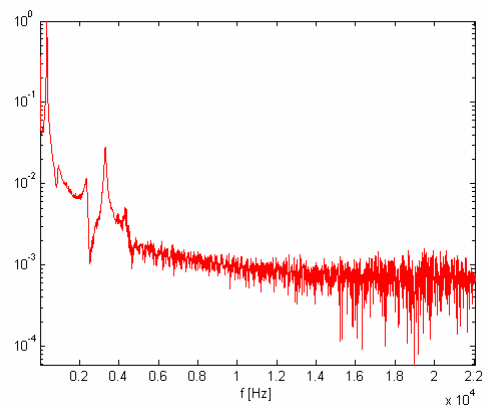
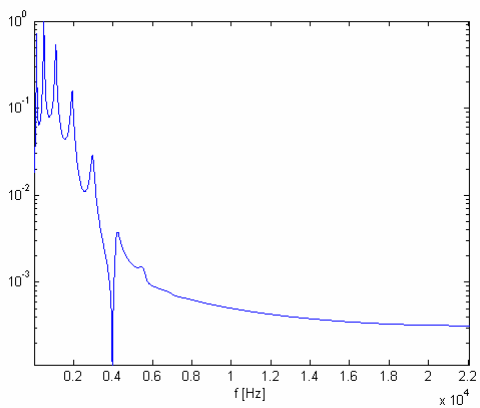
A mérés eredményeivel összevetve tehát azt kaptuk, hogy a merev rúd véges differencia modellje, a paraméterek megfelelő megválasztása mellett, igen jól képes leírni a dobverő viselkedését. A valós idejű megvalósításnál problémát jelenthet, hogy ezen paraméterértékek mellett a modell igen közel van a stabilitás határhelyzetéhez, és a mintavételi frekvencia kis mértékű csökkentése is instabillá teheti. Az  $f_s$  csökkentéséből adódó instabilitás természetesen kompenzálható egyéb paraméterek egyidejű módosításával (pl. pontszám csökkentése), de ez esetben a modell minősége romlik, egyre kevésbé alkalmas egy valódi dobverő viselkedésének leírására.



4.1.2. ábra. A modell által generált és a mért gyorsulás-idő függvény.



4.1.3. ábra. A modell által generált és a mért jel spektruma.



4.1.4. ábra. A modell által generált és a mért jel spektruma az időfüggvények első 400 mintájának elhagyása után.

## 4.2. A membrán és a dobverő közötti kölcsönhatás modellezése<sup>7</sup>

Rendelkezésünkre áll tehát a kör alakú membrán és a dobverő fizikai modellje. Célunk egy olyan modell létrehozása, amelyben a dobverő valamilyen gerjesztés hatására mozgásba jön, a membránnal ütközve rezgésbe hozza, majd elhagyja azt (visszapattan). Felmerül a kérdés, hogy mi történik a membrán és a dobverő ütközésekor. A dob megütésekor hallható nagyfrekvenciás tranziensek létrejöttét a következő két módon próbáltuk megmagyarázni:

1. Az első ütközés és a membrán és a dobverő végleges szétválása között a dobverő „pattog” a membránon, tehát újra meg újra elhagyja a membránt, majd ismét nekiütközik
2. Az ütközés után a membrán és a dobverő „összetapad”, együtt mozognak, az ütközési pont rezgését a dobverő rezgése határozza meg.

Az első lehetőség jellegében inkább rugalmas, míg a második rugalmatlan ütközésre utal. A felvett dobhangból felüláteresztő szűrővel az alacsonyfrekvenciás komponenseket eltávolítva azt tapasztaljuk, hogy a kapott hang összeütött dobverők hangjára hasonlít, tehát a dobverő módusfrekvenciái megjelennek a dobhang spektrumában. Ebből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a ütközést a fent leírt lehetőségek közül a második írja le jobban. Természetesen nem zárhatjuk ki, hogy az első ütközés és a végleges szétválás között a membrán és a dobverő végig együtt mozog, de a továbbiakban feltételezzük, hogy az ütközés jellegében rugalmatlan<sup>8</sup>.

Az ütközést a dobverő végpontja, és a membrán egy tetszőleges, de kezdeti feltételként meghatározott pontja (a gerjesztési pont) között vizsgáljuk. A dobverő csak egy, a membrán síkjára merőleges síkban mozoghat. Az ütközés pillanatáig a membrán nyugalomban van, kitérése minden pontban nulla. A dobverő kezdeti kitérése minden pontban nullánál nagyobb, és egy vagy több pontja adott kezdeti sebességgel rendelkezik. A fölfelé mutató sebességvektort tekintve pozitívnak, a dobverő pontjainak kezdeti sebessége negatív. Mozgását a 4.1. pontban tárgyalt modell írja le, ugyanakkor az élethű gerjesztéshez szükséges, hogy bizonyos pontjainak kitérését a szimuláció során folyamatosan felülírva, a dobverőt valamilyen pályára kényszerítsük. Ez gyakorlatilag a „dobos modellezésének” tekinthető. Ütközés akkor következik be, ha a dobverő végpontjának kitérése kisebb, mint a membrán gerjesztési pontjának kitérése. Az első ütközésnél ez azt jelenti, hogy a dobverő végpontjának kitérése negatív lesz, de mivel nem feltételezzük, hogy csak egyszer következik be ütközés, mindig a dobverő és a membrán kitérésének viszonyát kell vizsgálnunk. Ütközéskor a dobverő végpontja és a gerjesztési pont közös sebességét a lendületmegmaradás törvénye határozza meg. Ezután a szétválásig a két pont egyetlen tömegpontnak tekinthető,

<sup>7</sup> Méréseken alapuló leírás található a [Wagner, 2006] írásban.

<sup>8</sup> Távollabbról szemlélve a dobverő és a membrán közötti kölcsönhatás természetesen közelebb áll a rugalmas ütközéshez, de a rugalmasságot a membrán tömegpontjai közötti erőhatások (ld. tömeg-rugó modell) okozzák, nem a tömegpontok rugalmassága. Amennyiben a tömegpontok ütközése rugalmas lenne, a kölcsönhatás pillanatszerűen menne végbe (a dobverő azonnal visszapattanna).

amelyre mind a membrán, mind a dobverő többi pontja erőt fejt ki. A szétválás akkor következik be, amikor a dobverő végpontjának előjeles sebessége meghaladja a gerjesztési pont sebességét. Ez azt jelenti, hogy mialatt a két pont együtt mozog, a közös sebességen kívül minden időpillanatban ki kell számolnunk, hogy külön-külön a mekkora lenne a gerjesztési pont és a dobverő végpontjának sebessége, ha nem együtt mozognának, tehát ha a gerjesztési pontra csak a membrán, a dobverő végpontjára pedig csak a dobverő hatna. Az alábbiakban a vázolt eljárás részletes leírása következik.

A rendszer  $(n-1)$ -edik és  $n$ -edik mintavételi időpontbeli állapota szerint a következő négy eset lehetséges:

- a) A membrán és a dobverő mozgása egymástól független mind az  $(n-1)$ -edik, mind az  $n$ -edik időpillanatban.
- b) A membrán és a dobverő mozgása egymástól független az  $(n-1)$ -edik időpillanatban, de az  $n$ -edikben már együtt mozognak
- c) A membrán és a dobverő együtt mozog mind az  $(n-1)$ -edik, mind az  $n$ -edik időpillanatban.
- d) A membrán és a dobverő együtt mozog az  $(n-1)$ -edik időpillanatban, de az  $n$ -edikben mozgásuk már egymástól független.

Az a) esetben a két véges differencia modell egyidejűleg, de egymástól függetlenül fut.

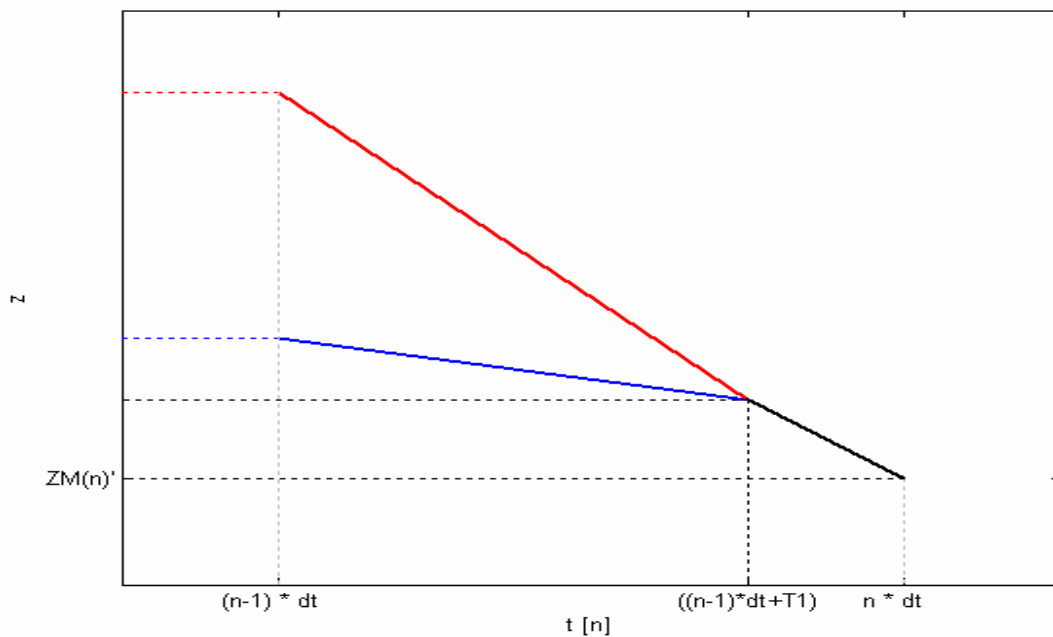
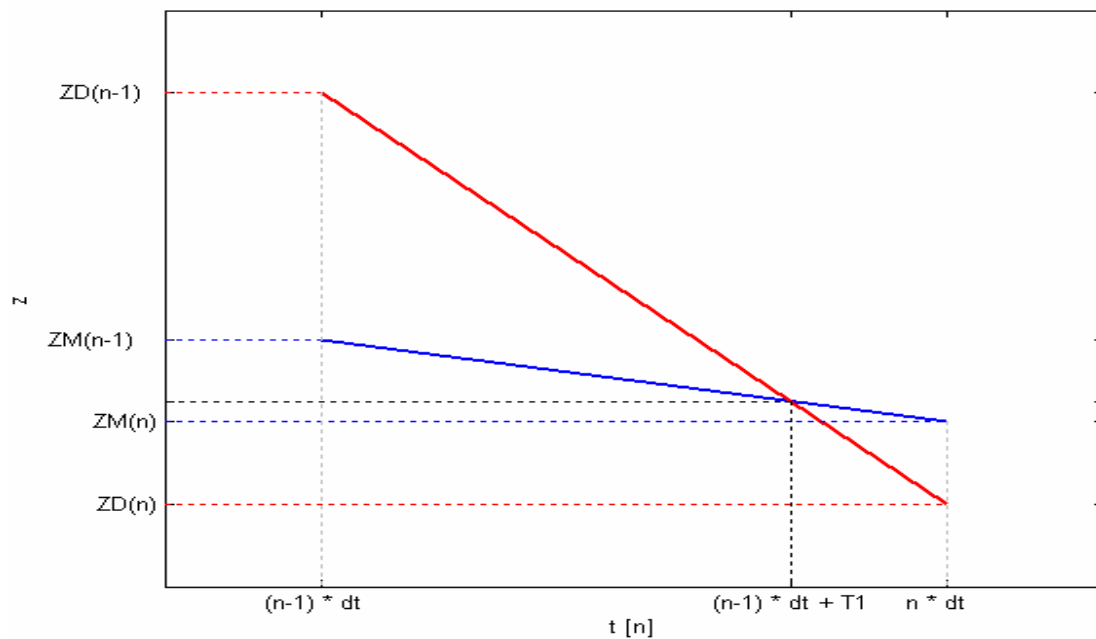
A b) eset azt jelenti, hogy a két vizsgált mintavételi időpont között, az  $(n-1) \cdot \Delta t + T_1$ , ( $T_1 < \Delta t$ ) időpontban ütközés történt, tehát

$$z_n^{\text{dobverő}} < z_n^{\text{membrán}}$$

$z_n^{\text{membrán}}$  jelöli a gerjesztési pont,  $z_n^{\text{dobverő}}$  pedig a dobverő végpontjának kitérését az  $n \cdot \Delta t$  időpontban. Az ütközés miatt az  $n \cdot \Delta t$  időpontbeli kitérések értéke természetesen módosul, a fenti értékeket ez esetben csak ütközésvizsgálatra, valamint a pillanatnyi sebességek kiszámítására használjuk, értéküket később felülírjuk (ld. 4.2.1. ábra).

Először vizsgáljuk meg, hogy pontosan mikor történt az ütközés! A membrán és a dobverő vizsgált pontjának kitérése az ütközés pillanatában azonos, így felírhatjuk a következő egyenletet:

$$z^{\text{közös}}((n-1) \cdot \Delta t + T_1) = z_{n-1}^{\text{membrán}} + v_n^{\text{membrán}} \cdot T_1 = z_{n-1}^{\text{dobverő}} + v_n^{\text{dobverő}} \cdot T_1 \quad (4.2.1)$$



4.2.1. ábra. A rugalmatlan ütközés szemléltetése. A felső ábra azt szemlélteti, mi történne, ha az ütközést nem modelleznénk. Először mindig e szerint kell eljárunk, hogy az ütközés tényét meg tudjuk állapítani. Az ábrán pirossal jelöltük a dobverő, késsel a membrán kitérésének időfüggvényét két szomszédos mintavételi időpont között. Ütközés esetén az  $((n-1) \cdot \Delta t + T_1)$  időpontban találkoznak, onnantól a lendületmegmaradás törvénye által meghatározott közös sebességgel haladnak az  $(n \cdot \Delta t)$  időpontig (az ábrán  $z^{dobverő}$ -t ZD-vel,  $z^{membrán}$ -t ZM-mel jelöltük).

A kitérések ismeretében a sebességeket a következőképpen számolhatjuk:

$$v_n^{\text{membrán}} = \frac{z_n^{\text{membrán}} - z_{n-1}^{\text{membrán}}}{\Delta t} \quad (4.2.2)$$

$$v_n^{\text{dobverő}} = \frac{z_n^{\text{dobverő}} - z_{n-1}^{\text{dobverő}}}{\Delta t} \quad (4.2.3)$$

(4.2.1)-ből  $T_1$ -et kifejezve:

$$T_1 = \frac{z_{n-1}^{\text{membrán}} - z_{n-1}^{\text{dobverő}}}{v_n^{\text{dobverő}} - v_n^{\text{membrán}}}$$

Most tehát pontosan tudjuk, mikor történt az ütközés. A dobverő és a membrán az  $(n-1) \cdot \Delta t + T_1$  időpontig egymástól függetlenül, az ütközéstől az  $n \cdot \Delta t$  időpontig pedig  $v^{\text{közös}}$  sebességgel együtt mozog. A közös sebességre felírhatjuk a lendületmegmaradás törvényét:

$$m^{\text{membrán}} \cdot v^{\text{membrán}} + m^{\text{dobverő}} \cdot v^{\text{dobverő}} = (m^{\text{membrán}} + m^{\text{dobverő}}) \cdot v^{\text{közös}} \quad (4.2.4)$$

$m^{\text{membrán}}$  ill.  $m^{\text{dobverő}}$  a membrán ill. a dobverő egy pontjának tömegét jelöli, amelyet úgy számíthatunk ki, hogy a teljes membrán ill. dobverő tömegét elosztjuk a tömegpontok számával. (4.2.4)-ből a közös sebességre azt kapjuk, hogy

$$v^{\text{közös}} = \frac{m^{\text{membrán}} \cdot v^{\text{membrán}} + m^{\text{dobverő}} \cdot v^{\text{dobverő}}}{m^{\text{membrán}} + m^{\text{dobverő}}}$$

Most már meg tudjuk határozni a dobverő és a membrán  $n \cdot \Delta t$  időpontbeli közös kitérését:

$$z_n^{\text{membrán}} = z_{n-1}^{\text{membrán}} + v_n^{\text{membrán}} \cdot T_1 + v^{\text{közös}} \cdot (\Delta t - T_1)$$

$$z_n^{\text{dobverő}} = z_{n-1}^{\text{dobverő}} + v_n^{\text{dobverő}} \cdot T_1 + v^{\text{közös}} \cdot (\Delta t - T_1)$$

A két egyenlet természetesen ugyanazt az eredményt adja. A fenti számítások mellett egy *flag* változó értékének 1-re állításával jelezniük kell, hogy ütközés történt.



A c) eset a ( $flag == 1$ ) és a ( $v_n^{membrán} > v_n^{dobverő}$ ) feltételek egyidejű fennállását jelenti. Ekkor a dobverő végpontja, és a gerjesztési pont együtt mozog, rá mind a membrán, mind a dobverő többi pontja hatást gyakorol, így erre pontra a következő differenciálegyenlet érvényes:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \cdot \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) - (R_1^m + R_1^d) \frac{\partial z}{\partial t} + R_2^m \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) - \frac{E_d \cdot \left( \frac{r_d}{2} \right)^2}{\rho_d} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + R_2^d \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2}$$

Az egyenletben  $w$ -vel jelöltük a dobverő,  $z$ -vel a membrán kitérését,  $m$  index-szel a membránra,  $d$ -vel a dobverőre jellemző mennyiségeket. A diszkretizációt elvégezve:

$$\begin{aligned} \frac{Y_{n+1} - 2Y_n + Y_{n-1}}{\Delta t^2} = & \left( \frac{c^2}{\Delta m^2} \right) \cdot (z_{i+1,j,n} + z_{i-1,j,n} + z_{i,j+1,n} + z_{i,j-1,n} - 4Y_n) - \\ & - \left( \frac{R_1^m + R_1^d}{2\Delta t} \right) \cdot (Y_{n+1} - Y_{n-1}) - \\ & + \left( \frac{R_2^m}{\Delta m^2 \Delta t} \right) \cdot \left[ (z_{i+1,j,n} + z_{i-1,j,n} + z_{i,j+1,n} + z_{i,j-1,n} - 4Y_n) - (z_{i+1,j,n-1} + z_{i-1,j,n-1} + z_{i,j+1,n-1} + z_{i,j-1,n-1} - 4Y_{n-1}) \right] - \\ & - \frac{K}{\Delta d^4} \cdot (w_{k+2,n} - 4w_{k+1,n} + 6Y_n - 4w_{k-1,n} + w_{k-2,n}) + \\ & + \frac{R_2^d}{\Delta t \Delta d^2} \cdot \left[ (w_{k+1,n} - 2Y_n + w_{k-1,n}) - (w_{k+1,n-1} - 2Y_{n-1} + w_{k-1,n-1}) \right] \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

$Y$  az együtt mozgó két tömegpont kitérésére bevezetett jelölés, amelyre igaz, hogy  $Y_n = z_{i,j,n} = w_{i,n}$  és  $Y_{n-1} = z_{i,j,n-1} = w_{i,n-1}$ . (4.2.5)-ből  $Y_{n+1}$  a következőképpen fejezhető ki:

$$\begin{aligned} Y_{n+1} = & (T_{NL} \cdot AC_1 + AC_2) \cdot (z_{i+1,j,n} + z_{i-1,j,n} + z_{i,j+1,n} + z_{i,j-1,n}) - \\ & - AC_2 \cdot (z_{i+1,j,n-1} + z_{i-1,j,n-1} + z_{i,j+1,n-1} + z_{i,j-1,n-1}) - \\ & - BC \cdot (w_{k+2,n} + w_{k-2,n} - 4w_{k+1,n} - 4w_{k-1,n}) + \\ & + CC \cdot (w_{k+1,n} + w_{k-1,n} - w_{k+1,n-1} - w_{k-1,n-1}) + \\ & + Y_n \cdot (T_{NL} \cdot DC_1 + DC_2) + \\ & + Y_{n-1} \cdot EC \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

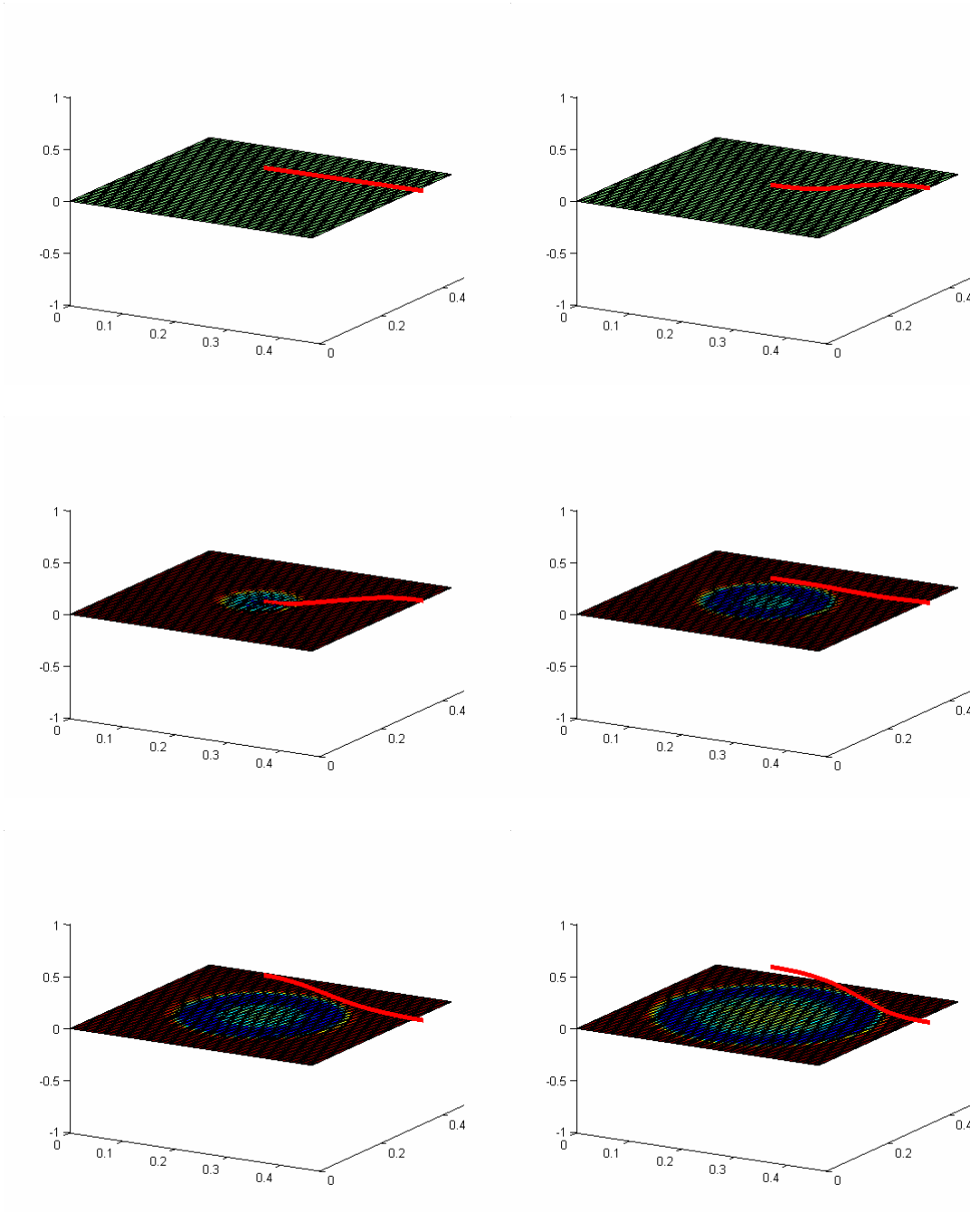
A konstansok az F.4. függelékben megtalálhatóak. A bonyolult egyenlet viszonylag egyszerűen implementálható, mivel csak egyetlen pontra kell kiértékelni.

A **d**) eset azt jelenti, hogy  $(v_n^{membrán} < v_n^{dobverő})$ , így a dobverő elhagyja a membránt, mozgásuk az esetleges következő ütközésig egymástól független. Ekkor csak annyi a dolgunk, hogy a *flag* változót 0-ba állítjuk.

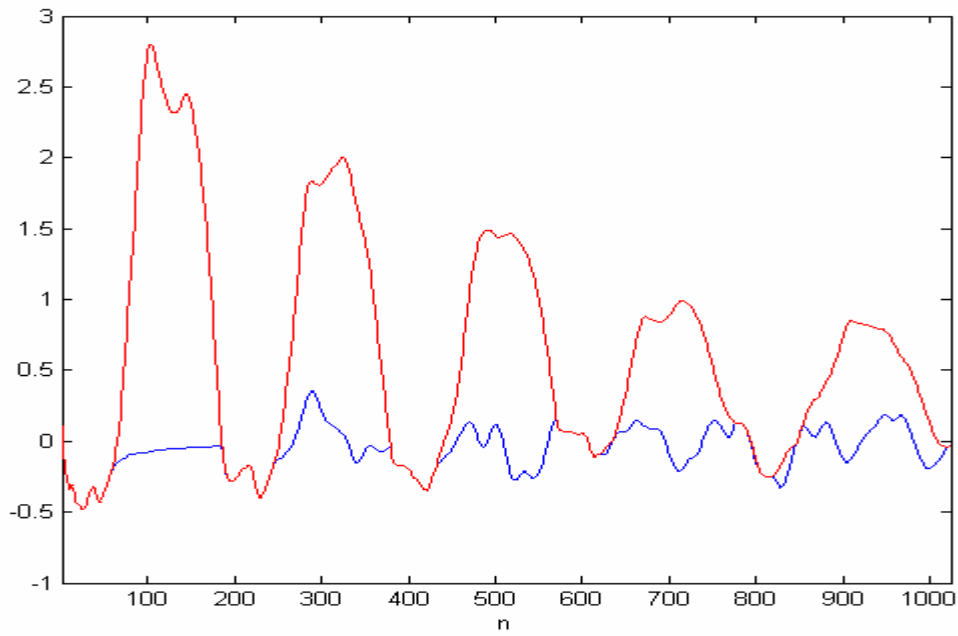
A modellt megvalósító program főciklusát leíró pszeudokód-részlet tehát a következő:

```
LOOP{  
  
  Membrán pontjai kitérésének kiszámítása  
  Dobverő pontjai kitérésének kiszámítása      (*)  
  
  Gerjesztési pont sebességének kiszámítása  
  Dobverő végpontja sebességének kiszámítása  
  
  if ((flag == 0) ÉS (dobverő kitérése < membrán kitérése))  
    flag = 1;  
    Ütközés időpontjának meghatározása;  
    Közös sebesség kiszámítása;  
    Közös kitérés kiszámítása;  
  elseif((flag == 1) ÉS (dobverő sebessége < membrán sebessége))  
    Közös kitérés kiszámítása;  
  elseif((flag == 1) ÉS (dobverő sebessége > membrán sebessége))  
    flag = 0;  
  endif  
  
}ENDLOOP
```

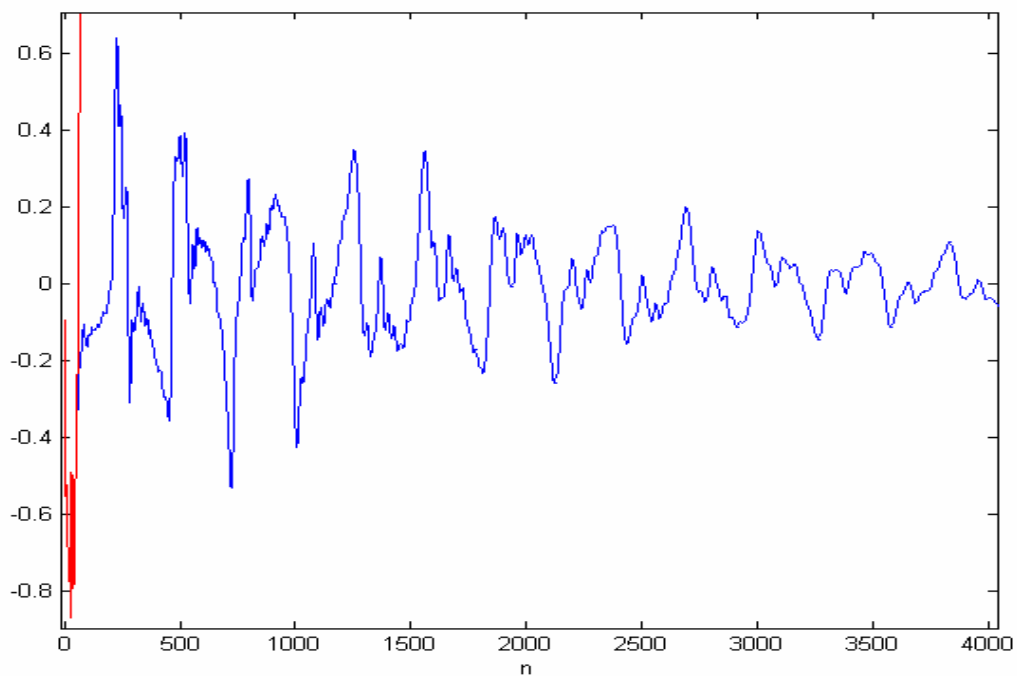
A (\*)-gal jelölt programrész a dobverő egyes pontjainak kényszerpályára állítását is magában foglalja. Ez a legegyszerűbb esetben azt jelenti, hogy a dobverő valamely pontjának kitérését egy meghatározott értéken tartjuk. Ezt szemlélteti a 4.2.2. ábra. A 4.2.3. ábrán látható, hogy a modell a membrán és a dobverő sorozatos ütközéseit is képes kezelni. Egyszeri ütközés esetén a membrán kitérésének időfüggvénye várakozásaink szerint alakul: az ütközés miatt nagyfrekvenciás komponensek jelennek meg a jelben, amelyek aztán a frekvenciafüggő veszteség miatt fokozatosan eltűnnek. Ez látható a 4.2.4. ábrán.



4.2.2. ábra. A dobverő és a membrán ütközése különböző időpontokban 64\*64 pontból álló membrán- és 16 pontból álló dobverőmodell esetén. A dobverőt hosszának  $\frac{3}{4}$ -énél „megfogjuk”, tehát a 12-es sorszámú pont kitérését egy konstans értékkel minden ciklusban felülírjuk



4.2.3. ábra. Sorozatos ütközések szemléltetése. Pirossal jelöltük a dobverő végpontjának, késsel a membrán gerjesztési pontjának kitérését az idő (mintaszám) függvényében.



4.2.4. ábra. A membrán kitérés-idő függvénye várakozásainknak megfelelően alakul

# Értékelés

A dolgozatban a véges differencia módszer apparátusát felhasználva felépítettük majd a dobmodellbe integráltuk a membrán és a dobverő egy lehetséges modelljét. Az ideális membránt fokozatosan bővítve jutottunk el egy összetett dobmodellig. Az egyes fokozatokat implementálva lehetőség nyílt a generált hangot leginkább befolyásoló tényezők részletes vizsgálatára. Az eredmények értékeléséhez az általunk elvégzett mérések eredményeit is felhasználtuk. Véleményünk szerint, annak ellenére, hogy a modell még korántsem teljes, az eredmények igen biztatóak: a generált és a felvett dobhangok hasonlósága szembeötlő.

A dolgozat elején bemutattuk a húr véges differenciás modelljét. Részletesen foglalkoztunk a módszer sajátosságaival, különös tekintettel a felmerülő stabilitási problémákra. A Von Neumann-analízis jól használható módszernek bizonyult mind a numerikus stabilitás, mind a numerikus diszperzió vizsgálatára. A diszkretizált modell mellett részletesen foglalkoztunk a húr differenciálegyenletének analitikus megoldásával, így a modell módusfrekvenciáit a várt eredményekkel összehasonlítva lehetőség nyílt a modell értékelésére.

A membrán tárgyalásánál bemutattuk, hogy a húrra alkalmazott módszerek hogyan általánosíthatók kétdimenziós rendszerekre. A Von Neumann-analízis segítségével meghatároztuk az ideális membrán stabilitásának feltételét, majd megmutattuk, hogy kétdimenziós rendszerek véges differencia modelljében a numerikus diszperzió irányfüggő. A membrán differenciálegyenletét additív tagokkal bővítve bemutattuk, hogy a véges differencia módszer segítségével hogyan vehetjük figyelembe a modell hangját nagymértékben befolyásoló tényezőket. A frekvenciafüggetlen veszteség tárgyalásánál láthattuk, hogy a differenciálegyenletben a deriváltakat többféleképpen is közelíthetjük, és a közelítés módja alapvetően befolyásolja a modell stabilitását. A következő lépés a csillapítás frekvenciafüggésének figyelembe vétele volt. E jelenség modellezése azért lényeges, mert a valódi hangszerek hangját jelentősen befolyásolja az a tény, hogy a nagyfrekvenciás komponensek lecsengése gyorsabb. Ezt követően röviden megvizsgáltuk, hogy a merevség okozta diszperzió mennyiben befolyásolja a módusfrekvenciákat. Arra a megállapításra jutottunk, hogy ez a jelenség igen kis mértékben van hatással a spektrumra, és így a létrehozott hangra, ezért modellezése nem feltétlenül szükséges. A nemlineáris viselkedés ezzel ellentétben alapvetően befolyásolja a dob hangját, ezért részletesen foglalkoztunk modellezésének elméleti hátterével, és a membrán véges differencia modelljébe történő integrálásának kérdéseivel.

A kutatás során elért legjelentősebb új eredménynek azt tartjuk, hogy felismertük azt, hogy az élethű hangzás eléréséhez a dobverő rezgését is figyelembe kell vennünk. A merev rúd differenciálegyenletéből kiindulva, a frekvenciafüggő veszteséget is figyelembe véve, sikeresen felépítettük a dobverő igen élethű modelljét. A dobverő és a membrán találkozásának modellezésével, tudomásunk szerint eddig egyedülálló módon, egy olyan modellt hoztunk létre, amely nem csak a hangszer, hanem a dobverő rezgését is modellezi, nagymértékben növelve a dobhang valóságosságát. A felépített és implementált hangszermodell már jelenlegi formájában is alkalmas lehet a gyakorlatban történő felhasználásra, mivel alkalmas jó minőségű és változatos hangminták készítésére. A valóságos dobok hangjának reprodukálása mellett különleges, eddig nem hallott hangok létrehozására is lehetőség nyílik.

Ahogy korábban már említettük, az eddig felépített modell nem teljes: a dobttest és a hangterjedés vizsgálata és a megfelelő modell felépítése későbbi kutatások tárgyát képezi. A

valós idejű megvalósításhoz elengedhetetlenül szükséges a számításigény csökkentése, így hosszú távú terveink között szerepel az első fejezetben röviden bemutatott fizikai alapú modellezési módszerek részletes vizsgálata, ill. összehasonlítása. A számításigény csökkentése mellett a valós idejű megvalósításhoz a paraméterter stabilitási tartományának pontos felmérése is szükséges. A teljes dobmodell felépítésekor véleményünk szerint mind a számításigény, mind a hangminőség szempontjából előnyös lehet a komponensek eltérő módszerrel történő modellezése, így a különböző módszerekkel felépített modellek csatlakozásának vizsgálata is célkitűzéseink között szerepel. A felsoroltakon kívül a jövőbeli kutatások tárgyát képezheti a membrán fizikai alapú modelljének további vizsgálata ill. fejlesztése (pl. a diszkretizáció különböző, itt nem tárgyalt lehetőségeinek részletes elemzése, megvalósítása).

Az e területen eddig elért eredmények, az ilyen témájú munkáknál megszokotthoz képest, részletes ismertetése és értékelése miatt a dolgozat jó kiindulási pont ill. referencia lehet a véges differencia módszer ill. a hangszintézis iránt érdeklődők számára.

# Függelék

## F.1. A húr differenciálegyenletének analitikus megoldása

Az alábbiakban a teljesség kedvéért levezetjük a húr 2.2. pontban közölt megoldását. A levezetés [Fletcher, 1991] alapján készült.

Az egyenlet megoldását keressük a következő alakban:

$$y(x,t) = f_1(ct - x) + f_2(ct + x) \quad (F.1.1)$$

Ez az egyenlet azt fejezi ki, hogy a differenciálegyenlet megoldását két egymással ellentétes irányba haladó hullám összegeként keressük<sup>9</sup>. Először írjuk fel a megoldást szinuszos haladó hullámok esetén.

$$f_1(ct - x) = A \cdot \sin \frac{\omega}{c}(ct - x) + B \cdot \cos \frac{\omega}{c}(ct - x) = A \cdot \sin(\omega t - kx) + B \cdot \cos(\omega t - kx) \quad (F.1.2)$$

$$f_2(ct + x) = C \cdot \sin \frac{\omega}{c}(ct + x) + D \cdot \cos \frac{\omega}{c}(ct + x) = C \cdot \sin(\omega t + kx) + D \cdot \cos(\omega t + kx) \quad (F.1.3.)$$

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

A  $k$  mennyiség neve hullámszám. Felhasználjuk azt a peremfeltételt, hogy a két végén befogott húr kitérése a végeinél zérus.

$$y(0,t) = 0 \quad (F.1.4)$$

$$y(L,t) = 0 \quad (F.1.5)$$

---

<sup>9</sup> Ez a megoldás Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) nevéhez fűződik.

ahol  $L$  a húr hossza. (F.1.4)-et (F.1.2)-be és (F.1.3)-ba behelyettesítve majd a kapott egyenleteket összeadva:

$$A \sin \omega t + B \cos \omega t + C \sin \omega t + D \cos \omega t = 0$$

Az egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha

$$A = -C$$

$$B = -D$$

Visszahelyettesítve (F.1.2)-be és (F.1.3)-ba, majd (F.1.1)-et kifejezve a következő egyenlethez jutunk:

$$y(x, t) = 2 \cdot (B \sin \omega t - A \cos \omega t) \cdot \sin kx$$

A (F.1.5) szerinti peremfeltételt behelyettesítve:

$$\sin kL = 0$$

$$k_n = \frac{n\pi}{L} = \frac{\omega_n}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_n} \quad (F.1.6)$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

Arra az ismert tényre jutottunk, hogy a két végén befogott húr csak meghatározott hullámhosszú szinuszos jel alakját veheti fel. A különböző hullámhosszú megengedett szinuszhullámok neve *módus*. A módusfrekvenciák (F.1.6) alapján:

$$\omega_n = 2\pi f_n = \frac{cn\pi}{L}$$

$$f_1 = \frac{c}{2L}$$

$$f_n = n \cdot f_1 \quad (F.1.7)$$

Tehát az  $n$ -edik módus frekvenciája az  $f_1$  frekvencia  $n$ -szerese. A megoldás általános alakja:



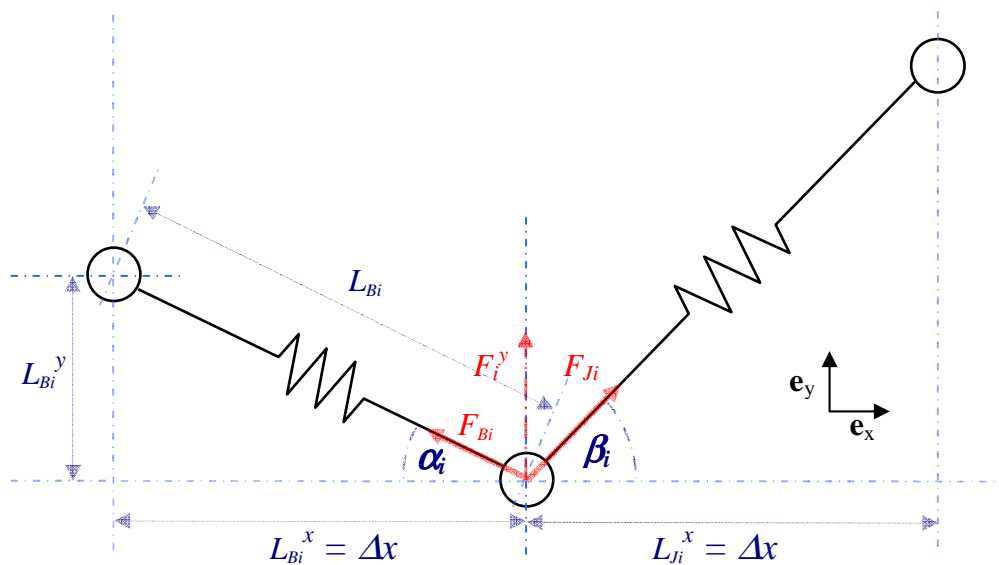
$$y(x,t) = \sum_n (A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t) \cdot \sin k_n x \quad (F.1.8)$$

Tehát tetszőleges (F.1.1) szerinti megoldás felírható a módusok súlyozott összegeként.

## F.2. A húr differenciálegyenletének levezetése a tömeg-rugó modellből

Az alábbiakban levezetjük az ideális húr véges differencia- és tömeg-rugó modelljének ekvivalenciáját.

Az  $i$ -edik tömegpontra ható erő felbontható egy  $x$  és egy  $y$  irányú összetevőre, ezeket rendre  $F_i^x$ -szel és  $F_i^y$ -nal jelöljük. Vezessük be a következő jelöléseket:



F.2.1. ábra. A tömeg-rugó modellben használt mennyiségek szemléltetése

$\mathbf{F}_{B_i}$ :	az $i$ -edik tömegpontra a tőle balra lévő rugó által kifejtett erő
$\mathbf{F}_{B_i}^x, \mathbf{F}_{B_i}^y$ :	$\mathbf{F}_{B_i}$ $x$ , ill. $y$ irányú komponensének nagysága
$L_{B_i}$ :	az $i$ -edik tömegponttól balra lévő rugó hossza
$L_{B_i}^x, L_{B_i}^y$ :	$\mathbf{F}_{B_i}$ $x$ , ill. $y$ irányú komponensének nagysága
$\mathbf{F}_{J_i}$ :	az $i$ -edik tömegpontra a tőle jobbra lévő rugó által kifejtett erő
$\mathbf{F}_{J_i}^x, \mathbf{F}_{J_i}^y$ :	$\mathbf{F}_{J_i}$ $x$ , ill. $y$ irányú komponensének nagysága
$L_{J_i}$ :	az $i$ -edik tömegponttól jobbra lévő rugó hossza
$L_{J_i}^x, L_{J_i}^y$ :	$\mathbf{F}_{J_i}$ $x$ , ill. $y$ irányú komponensének nagysága

$\mathbf{F}_{B_i}$  a következő alakban írható fel (F.2.1. ábra):

$$\mathbf{F}_{B_i} = (L_{B_i} - L^0) \cdot K \cdot \frac{L_{B_i} \cos \alpha_i \cdot (-\mathbf{e}_x) + L_{B_i} \sin \alpha_i \cdot \mathbf{e}_y}{L_{B_i}} \quad (F.2.1)$$

$\mathbf{e}_x$  és  $\mathbf{e}_y$  az  $x$  és  $y$  irányú egységvektorok Descartes-koordinátarendszerben. A tört adja meg  $\mathbf{F}_{B_i}$  irányát. (F.2.1) az alábbi egyszerűbb alakra hozható:

$$\mathbf{F}_{B_i} = (L_{B_i} - L^0) \cdot K \cdot [\cos \alpha_i \cdot (-\mathbf{e}_x) + \sin \alpha_i \cdot \mathbf{e}_y] \quad (F.2.2)$$

(F.2.1) és (F.2.2) mintájára felírható  $\mathbf{F}_{J_i}$  is:

$$\mathbf{F}_{J_i} = (L_{J_i} - L^0) \cdot K \cdot [\cos \beta_i \cdot \mathbf{e}_x + \sin \beta_i \cdot \mathbf{e}_y]$$

Az  $i$ -edik tömegpontra ható  $x$  irányú erők eredője:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i^x &= \mathbf{F}_{B_i}^x + \mathbf{F}_{J_i}^x = (L_{B_i} - L^0) \cdot K \cdot \cos \alpha_i \cdot (-\mathbf{e}_x) + (L_{J_i} - L^0) \cdot K \cdot \cos \beta_i \cdot \mathbf{e}_x \\ \mathbf{F}_i^x &= \mathbf{e}_x \cdot K \cdot [(L^0 - L_{B_i}) \cdot \cos \alpha_i + (L_{J_i} - L^0) \cdot \cos \beta_i] \end{aligned}$$

$\alpha_i$  és  $\beta_i$  igen kicsi szögek, így  $\cos \alpha_i \cong \cos \beta_i \cong 1$ .

$$\mathbf{F}_i^x = \mathbf{e}_x \cdot K \cdot [L^0 - L_{B_i} + L_{J_i} - L^0] = \mathbf{e}_x \cdot K \cdot \left[ \sqrt{(L_{J_i}^x)^2 + (L_{J_i}^y)^2} - \sqrt{(L_{B_i}^x)^2 + (L_{B_i}^y)^2} \right] \quad (F.2.3)$$

Mivel  $L_{J_i}^y \ll L_{J_i}^x$  és  $L_{B_i}^y \ll L_{B_i}^x$ ,  $(L_{B_i}^y)^2 \cong (L_{J_i}^y)^2 \cong 0$ . Behelyettesítve (F.2.3)-ba:

$$\mathbf{F}_i^x = \mathbf{e}_x \cdot K \cdot (L_{J_i}^x - L_{B_i}^x) \cong 0$$

mivel  $L_{J_i}^x \cong L_{B_i}^x \cong \Delta x$ . A fentiek szerint a tömegpontok  $x$  irányú kitérése elhanyagolható. Írjuk fel most az  $i$ -edik tömegpontra ható  $y$  irányú erők eredőjét:

$$\mathbf{F}_i^y = \mathbf{F}_{B_i}^y + \mathbf{F}_{J_i}^y = (L_{B_i} - L^0) \cdot K \cdot \sin \alpha_i \cdot \mathbf{e}_y + (L_{J_i} - L^0) \cdot K \cdot \sin \beta_i \cdot \mathbf{e}_y \quad (F.2.4)$$

Kis  $\alpha_i$ , ill.  $\beta_i$  szögekre igaz, hogy

$$\sin \alpha_i \cong \tan \alpha_i = \frac{L_{B_i}^y}{L_{B_i}^x} \cong \frac{L_{B_i}^y}{\Delta x}$$

illetve

$$\sin \beta_i \cong \tan \beta_i = \frac{L_{J_i}^y}{L_{J_i}^x} \cong \frac{L_{J_i}^y}{\Delta x}$$

(F.2.4)-be behelyettesítve:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i^y &= \mathbf{e}_y \cdot K \cdot \left[ (L_{B_i} - L^0) \cdot \frac{L_{B_i}^y}{\Delta x} + (L_{J_i} - L^0) \cdot \frac{L_{J_i}^y}{\Delta x} \right] = \\ &= \mathbf{e}_y \cdot K \cdot \left[ (\Delta x - L^0) \cdot \frac{L_{B_i}^y}{\Delta x} + (\Delta x - L^0) \cdot \frac{L_{J_i}^y}{\Delta x} \right] \end{aligned} \quad (F.2.4)$$

$L_{B_i}^y$  és  $L_{J_i}^y$  felírható a következő alakban:

$$L_{B_i}^y = y_{i-1} - y_i \quad (F.2.4)$$

$$L_{J_i}^y = y_{i+1} - y_i \quad (F.2.5)$$

Ahol  $y_i$  az  $i$ -edik tömegpont  $y$  irányú kitérése. (F.2.4)-et, (F.2.5)-öt és (2.4.2)-t (F.2.4)-be behelyettesítve:

$$\mathbf{F}_i^y = \mathbf{e}_y \cdot \frac{T}{\Delta x} \cdot (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1})$$

Mivel  $\mathbf{F}_i^y$  iránya egyértelmű, a továbbiakban elegendő a vektorok nagyságával számolnunk:

$$F_i^y = \frac{T}{\Delta x} \cdot (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1})$$

$F_i^y$  helyére behelyettesítve (2.4.1)-et, és felhasználva, hogy

$$a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

a következő egyenletet kapjuk:

$$m \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\Delta x} \cdot (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1})$$

Ez az egyenlet, az időbeli diszkretizáció elvégzése után, a 2.4. pontban leírtak szerint a VDM-mel történő diszkretizációval azonos eredményre vezet.

### ***F.3. A membránt leíró PDE polárkoordinátás alakjának levezetése***

Mivel az irodalomban általában csak a végeredményt közlik, az alábbiakban levezetjük a membrán differenciálegyenletének polárkoordinátás alakját.

A (3.1.1.1) egyenlet polárkoordinátás alakját keressük, ehhez az  $x$  ill.  $y$  szerinti deriváltakat  $r$  és  $\varphi$  szerinti deriváltakkal kell kifejeznünk. A koordináták között a következő összefüggések érvényesek:

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x}$$

A többváltozós függvényekre érvényes láncszabály szerint

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (F.3.1)$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (F.3.2)$$

Először határozzuk meg  $\frac{\partial r}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial r}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$  és  $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$  értékét  $r$  és  $\varphi$  függvényében:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{r \cos \varphi}{r} = \cos \varphi$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r \sin \varphi}{\sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{r \sin \varphi}{r} = \sin \varphi$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{r \sin \varphi}{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} = -\frac{r \sin \varphi}{r^2} = -\frac{\sin \varphi}{r}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x + \frac{y^2}{x}} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{r \cos \varphi}{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} = \frac{r \cos \varphi}{r^2} = \frac{\cos \varphi}{r}$$

(F.3.1)-be ill. (F.3.2)-be behelyettesítve:

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r} \quad (F.3.3)$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r} \quad (F.3.4)$$

A (3.1.1.1)-ben szereplő  $x$  és  $y$  szerinti másodrendű deriváltak meghatározásához a kapott kifejezésekre ismételen alkalmaznunk kell a láncszabályt.

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial r} (z'_x) \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi} (z'_x) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (F.3.5)$$

$$z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial r} (z'_y) \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \varphi} (z'_y) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (F.3.6)$$

A kifejezések tagjait külön-külön írjuk fel:

$$\frac{\partial}{\partial r} (z'_x) = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} \cos \varphi - \left( \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r} - \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r^2} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (z'_x) = \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \varphi} \cos \varphi - \frac{\partial z}{\partial r} \sin \varphi - \left( \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} \frac{\sin \varphi}{r} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (z'_y) = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} \sin \varphi + \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r} - \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (z'_y) = \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \varphi} \sin \varphi + \frac{\partial z}{\partial r} \cos \varphi + \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} \frac{\cos \varphi}{r} - \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r}$$

(F.3.5)-be és (F.3.6)-ba behelyettesítve:

$$\begin{aligned}
z''_{xx} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial r} (z'_x) \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi} (z'_x) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \\
&= \left( \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} \cos \varphi - \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r^2} \right) \cdot \cos \varphi + \\
&+ \left( \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \varphi} \cos \varphi - \frac{\partial z}{\partial r} \sin \varphi - \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} \frac{\sin \varphi}{r} - \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r} \right) \cdot \left( -\frac{\sin \varphi}{r} \right) = \\
&= \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} \cos^2 \varphi - \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \varphi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \varphi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} + \\
&+ \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\sin^2 \varphi}{r} + \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} = \\
&= \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} \cos^2 \varphi + \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} + \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\sin^2 \varphi}{r} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{2 \cdot \sin \varphi \cos \varphi}{r^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \varphi} \frac{2 \cdot \sin \varphi \cos \varphi}{r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z''_{yy} &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial r} (z'_y) \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \varphi} (z'_y) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \\
&= \left( \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} \sin \varphi + \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r} - \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r^2} \right) \cdot \sin \varphi + \\
&+ \left( \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \varphi} \sin \varphi + \frac{\partial z}{\partial r} \cos \varphi + \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} \frac{\cos \varphi}{r} - \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r} \right) \cdot \frac{\cos \varphi}{r} = \\
&= \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} \sin^2 \varphi + \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \varphi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} - \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \varphi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} + \\
&+ \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\cos^2 \varphi}{r} + \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} \frac{\cos^2 \varphi}{r^2} - \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} = \\
&= \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} \sin^2 \varphi + \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} \frac{\cos^2 \varphi}{r^2} + \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\cos^2 \varphi}{r} - \frac{\partial z}{\partial \varphi} \left( \frac{2 \cdot \sin \varphi \cos \varphi}{r^2} \right) + \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \varphi} \frac{2 \cdot \sin \varphi \cos \varphi}{r}
\end{aligned}$$

A (3.1.1.1) egyenletben az  $x$  és  $y$  szerinti másodrendű deriváltak összege szerepel:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} \left( \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{r^2} \right) + \frac{\partial z}{\partial r} \left( \frac{\sin^2 \varphi}{r} + \frac{\cos^2 \varphi}{r} \right) + \\ &+ \frac{\partial z}{\partial \varphi} \left( \frac{2 \cdot \sin \varphi \cos \varphi}{r^2} - \frac{2 \cdot \sin \varphi \cos \varphi}{r^2} \right) + \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \varphi} \left( \frac{2 \cdot \sin \varphi \cos \varphi}{r} - \frac{2 \cdot \sin \varphi \cos \varphi}{r} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} \end{aligned}$$

Behelyettesítve megkapjuk a végeredményt:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} \right)$$

#### F.4. Az ütközésnél használt konstansok kiszámítása

Az alábbiakban közöljük a dobverő és a membrán ütközésének implementálásához szükséges konstansok kiszámítási módját.

$$QC = \frac{2\Delta t^2}{2 + \Delta t \cdot (R_1^m + R_1^d)}$$

$$AC_1 = \frac{QC}{\sigma_m \cdot \Delta m^2}$$

$$AC_2 = \frac{QC \cdot R_2^m}{\Delta m^2 \Delta t}$$



$$BC = \frac{QC}{\Delta d^4} \cdot \frac{E_d \cdot \left(\frac{r_d}{2}\right)^2}{\rho_d}$$

$$CC = \frac{QC \cdot R_2^d}{\Delta t \Delta d^2}$$

$$DC_1 = \frac{-4 \cdot QC}{\sigma_m \cdot \Delta m^2}$$

$$DC_2 = QC \cdot \left( \frac{2}{\Delta t^2} - 4 \frac{R_2^m}{\Delta m^2 \Delta t} - \frac{6}{\Delta d^4} \cdot \frac{E_d \cdot \left(\frac{r_d}{2}\right)^2}{\rho_d} - 2 \frac{R_2^d}{\Delta t \Delta d^2} \right)$$

$$EC = QC \cdot \left( \frac{R_1^m + R_1^d}{2\Delta t} - \frac{1}{\Delta t^2} + 4 \frac{R_2^m}{\Delta m^2 \Delta t} + 2 \frac{R_2^d}{\Delta t \Delta d^2} \right)$$

$\Delta m$  a membrán,  $\Delta d$  pedig a dobverő pontjai közötti távolságot jelöli.



# MATLAB programok

## *M.1. Az ideális húr (2.3.8) szerinti modelljének MATLAB megvalósítása*

```
clear all;

N = 64;           % tömegpontok száma
count = 200;     % a szimuláció hossza

y1 = zeros(1, N); % kitérés az előző mintavételi időpontban
y2 = zeros(1, N); % kitérés most
y3 = zeros(1, N); % kitérés a következő mintavételi időpontban

y2(3:8) = 0.2 * hanning(6); % gerjesztés

i = 0;
while (count > i)
    i = i + 1;

    y3 = [y2(2 : N), 0] + [0, y2(1 : N-1)] - y1;
    y3(1) = 0;
    y3(N) = 0;      % a szélső pontok lefogása

    plot(y3);      % ábrázolás
    axis([0 N+1 -1 1]);
    F(1) = getframe;

    y1 = y2;
    y2 = y3;
end
```

## M.2. Az ideális, négyzet alakú membrán MATLAB megvalósítása

```
clear all;

count = 200; % a szimuláció hossza

L = 1; % a membrán oldalának hossza
N = 64; % a pontok számának négyzetgyöke
dx = L/(N-1); % a membrán két pontjának távolsága

fs = 44100; % mintavételi frekvencia
dt = 1/fs; % mintavételi idő
c = 0.5 * dx / dt; % terjedési sebesség
A = (c * dt / dx) ^ 2; % konstans

z1 = zeros(N, N); % kitérés az előző időpillanatban
z2 = z1; % kitérés most % inicializálás
z3 = z1; % kitérés a következő időpillanatban

radius = 5; % gerjesztés
z1((N/2-radius):(N/2+radius),(N/2-radius):(N/2+radius)) = hanning(2*radius+1) *
hanning(2*radius+1)';
z2=z1;

zeroh = zeros(1,N); % segédváltozók
zerov = zeros(N,1);

i = 0;
while (count>i)
    i = i + 1;

    z3 = (A * ([z2(1:N, 2:N), zerov] + [zerov, z2(1:N, 1:N-1)] + [z2(2:N, 1:N); zeroh] +
[zzeroh; z2(1:N-1, 1:N)] - 4 * z2) + 2 * z2 - z1 );

    z3(1,1:N) = 0;
    z3(N,1:N) = 0;
    z3(1:N,1) = 0;
    z3(1:N,N) = 0;

    surf(1:N,1:N,z1); % ábrázolás
    axis([0 N+1 0 N+1 -1 1]);
    grid off;
    view(30,20);
    F(1) = getframe;

    z1 = z2;
    z2 = z3;
end
```

# Hivatkozások

- [Aird, 2000] M. Aird, J. Laird and J. ffitch: *Modelling a Drum by Interfacing 2-D and 3-D Waveguide Meshes*, International Computer Music Conference, University of Michigan, 2000.
- [Aird, 2002] M. Aird: *Musical Instrument Modelling Using Digital Waveguides*. University of Bath.
- [Bank, 2006] Balázs Bank: *Physics-based Sound Synthesis of String Instruments Including Geometric Nonlinearities*, Ph.D. thesis, Budapest University of Technology and Economics Department of Measurement and Information Systems.
- [Boutillon, 1988] X. Boutillon: Model for piano hammers: *Experimental determination and digital simulation*, J. Acoust. Soc. Am. 83(2): 746–754.
- [Chowning, 1973] J. M. Chowning: *The Synthesis of Complex Audio Spectra by Means of Frequency Modulation*, Journal of the Audio Engineering Society 21(7).
- [Dahl, 1997] S. Dahl: *Spectral changes in the tom-tom related to striking force*, Department of Speech, Music and Hearing, KTH, *TMH-QPSR 1/1997*.
- [Fletcher, 1991] N. H. Fletcher and T. D. Rossing: *The Physics of Musical Instruments*. Springer-Verlag, New York.
- [Fodor, 2002] Fodor György: *Hálózatok és rendszerek analízise 2. rész*, Műegyetem Kiadó, kilencedik utánnomás, 55014
- [Hiller, 1971a] L. Hiller and P. Ruiz: *Synthesizing Musical Sounds by Solving the Wave Equation for Vibrating Objects: Part 1*, J. Audio Eng. Soc. 19(6): 462–470.
- [Hiller, 1971b] L. Hiller and P. Ruiz: *Synthesizing Musical Sounds by Solving the Wave Equation for Vibrating Objects: Part 2*, J. Audio Eng. Soc. 19(7): 542–550.
- [Karjalainen, 2004] M. Karjalainen and C. Erkut: *Digital waveguides versus finite difference structures: Equivalence and mixed modeling*, EURASIP J. on Appl. Sign. Proc. 2004(7): 978–989.
- [Petrausch, 2005] S. Petrausch and R. Rabenstein: *Tension Modulated Nonlinear 2D Models for Digital Sound Synthesis with the Functional Transformation Method*, 13th European Signal Processing Conference (EUSIPCO 2005), Antalya, Turkey, Sep. 2005

- [Rabenstein, 1998] R. Rabenstein: *Discrete simulation models for multidimensional systems based on functional transformations*. In J. G. McWhirter, editor, *Mathematics in Signal Processing IV*. Oxford University Press.
- [Rossing, 1995] T. D. Rossing and N. H. Fletcher: *Principles of Vibration and Sound*, Springer, New York, 1995.
- [Smith, 1992] J. O. Smith: *Physical modeling using digital waveguides*, *Computer Music J.*16(4): 74–91. URL: <http://ccrma.stanford.edu/~jos/wg.html>
- [Smith, 2005] J. O. Smith: *Viewpoints on the History of Digital Synthesis*, Center for Computer Research in Music and Acoustics (CCRMA) Department of Music, Stanford University, Stanford, California 94305 USA. URL: <http://ccrma.stanford.edu/~jos/kna/kna.pdf>
- [Smith, 2006] J. O. Smith: *Physical Audio Signal Processing: for Virtual Musical Instruments and Digital Audio Effects*, online book at <http://ccrma.stanford.edu/~jos/pasp/>, Center for Computer Research in Music and Acoustics (CCRMA), Stanford University.
- [Tolonen, 1998] T. Tolonen, V. Välimäki and M. Karjalainen: *Evaluation of Modern Sound Synthesis Methods*, Technical Report 48, Helsinki University of Technology, Laboratory of Acoustics and Audio Signal Processing, Espoo, Finland. URL: [http://www.acoustics.hut.fi/publications/reports/sound\\_synth\\_report.pdf](http://www.acoustics.hut.fi/publications/reports/sound_synth_report.pdf)
- [Trautmann, 1999] L. Trautmann and R. Rabenstein: *Digital Sound Synthesis Based on Transfer Function Models*, Proc. 1999 IEEE Workshop on Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics, New Paltz, New York, Oct. 17-20, 1999
- [Trautmann, 2001] L. Trautmann, S. Petrusch and R. Rabenstein: *Physical Modeling of Drums by Transfer Function Methods*, Int. Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Proc. (ICASSP 2001), Salt Lake City, Utah, May 2001
- [Välimäki, 2006] V. Välimäki, J. Pakarinen, C. Erkut and M. Karjalainen: *Discrete-time modelling of musical instruments*, *Reports on Progress in Physics* 69(1): 1–78.
- [Van Duyne, 1993] S. A. Van Duyne and J. O. Smith: *Physical Modeling with the 2-D Digital Waveguide Mesh*, Center for Computer Research in Music and Acoustics (CCRMA), Stanford University, Stanford, CA 94305.
- [Wagner, 2006] A. Wagner: *Analysis of Drumbeats – Interaction between Drummer, Drumstick and Instrument*, Master’s Thesis at the Department of Speech, Music and Hearing (TMH) September 2005 – March 2006