



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Méréstechnika és Információs Rendszerek Tanszék

Németh Barnabás

AKUSZTIKUS GITÁR HANGJÁNAK FIZIKAI ALAPÚ SZINTÉZISE

KONZULENS

Dr. Bank Balázs

BUDAPEST, 2017

Tartalomjegyzék

Összefoglaló.....	5
Abstract	6
1 Bevezetés.....	7
2 Hangszintézis módszerei	9
2.1 Absztrakt algoritmusok.....	9
2.1.1 FM szintézis	9
2.1.2 Waveshaping szintézis.....	10
2.2 Minta alapú szintézis	11
2.3 Spektrum alapú modellek	12
2.3.1 Additív szintézis	12
2.3.2 Szubtraktív szintézis	13
2.4 Fizikai alapú szintézis.....	14
2.4.1 Digitális hullámvezető.....	14
2.4.2 Modális szintézis	15
2.4.3 Véges differencia módszer	16
3 A modell.....	18
3.1 Hullámegyenlet.....	18
3.1.1 Veszteségek és csillapítások.....	19
3.1.2 Gerjesztés	20
3.2 Diszkretizáció	21
3.2.1 A diszkrét hullámegyenlet és implementációja.....	23
3.2.2 A numerikus stabilitás vizsgálata	23
3.2.3 A gerjesztés implementálása	30
2.3 Húrfeszültség moduláció	32
4 Pengetett minták analízise	35
5 A test átvitele.....	40
5.1 Gerjesztés-válasz mérés.....	40
5.2 Feldolgozás.....	41
6 Paramétereizhetőség.....	45
6.1 A húr alap paraméterei	45
6.2 A veszteség és a diszperzió paraméterei.....	45
6.3 A gerjesztés paraméterei.....	46
6.4 Paraméter tábla	47

7 Összefoglalás	48
7.1 Eredmények	48
7.2 Továbbfejlesztési lehetőségek	48
7.2.1 A húr fizikai paraméterei	48
7.2.2 A húr dinamikája	49
7.2.3 A pengetés eszköze	49
7.2.4 A húrok csatolása	50
8 Irodalomjegyzék	51

HALLGATÓI NYILATKOZAT

Alulírott **Németh Barnabás**, szigorló hallgató kijelentem, hogy ezt a szakdolgozatot meg nem engedett segítség nélkül, saját magam készítettem, csak a megadott forrásokat (szakirodalom, eszközök stb.) használtam fel. Minden olyan részt, melyet szó szerint, vagy azonos értelemben, de átfogalmazva más forrásból átvettem, egyértelműen, a forrás megadásával megjelöltem.

Hozzájárulok, hogy a jelen munkám alapadatait (szerző(k), cím, angol és magyar nyelvű tartalmi kivonat, készítés éve, konzulens(ek) neve) a BME VIK nyilvánosan hozzáférhető elektronikus formában, a munka teljes szövegét pedig az egyetem belső hálózatán keresztül (vagy hitelesített felhasználók számára) közzé tegye. Kijelentem, hogy a benyújtott munka és annak elektronikus verziója megegyezik. Dékáni engedéllyel titkosított diplomatervek esetén a dolgozat szövege csak 3 év eltelte után válik hozzáférhetővé.

Kelt: Budapest, 2017. 12. 11.

.....
Németh Barnabás

Összefoglaló

Az elmúlt ötven évben a digitális technika ugrásszerűen fejlődött, ezáltal a zene világában is egyre szélesebb körben alkalmazzák. Az eddig analóg áramkörökkel megvalósított szűrőknek, effektpedáloknak, erősítőknek ma már létezik digitális áramkörökkel, mikrokontrollerekkel létrehozott megfelelője. Emellett a zenei hangok szintézise is egyre népszerűbbé vált, sok eddig elképzelhetetlennek tűnő lehetőséget teremtett új hangzások, vagy akár új műfajok megteremtésében. Legnagyobb fejlődést mind a mai napig a digitális eszközök memóriamérete és processzor órajele mutat, így azok már bonyolultabb matematikai műveleteket is el képesek végezni.

A hangszerek fizikai alapú hangszintézise nagyobb számítási időt vesz igénybe, mint a korábbi módszerek, ezért ezek az eljárások csak az elmúlt néhány évtizedben kezdtek jobban elterjedni. A többféle szintézistechnika közül én a dolgozatomban a véges differenciák módszerével modellezem az akusztikus gitár működését. Azért ezt választottam, mert ezzel a módszerrel egyszerűen modellezhető a húrfeszültség modulációja.

A modellt három részben valósítom meg. A gitáron pengetett hangok analízisével meghatározom a húrok csillapítását meghatározó paramétereket. A húrmodellt az egydimenziós hullámegyenlet diszkretizálásával hozom létre. Ez a modell figyelembe veszi a húr anyagának sűrűségét, geometriai paramétereit: átmérőjét, hosszát, és a girációs sugarát. Tartalmazza ezenfelül a veszteségért és a diszperzióért felelős paramétereket.

A gerjesztést a pengető fizikai modelljével valósítom meg, ami a pengető csúcsát és a pengetőt tartó kezet szimbolizáló két tömegpontból és a pengető anyagára jellemző rugóállandóból áll. A gitártesten erőmérő kalapáccsal végzett mérések alapján a test gerjesztés-válasz kapcsolatát is modellezem egy digitális szűrő segítségével. Végeredményben ez a szűrt jel lesz a szintetizált hang.

A dolgozat végén összefoglalom, milyen lépésekben valósítottam meg a modellt és felvázolom az eredményeket, ezután beszélek az elkészült modell paraméterezési lehetőségeiről. Végül kitérek a megvalósított modell azon részegységeire, melyek alkalmasak a továbbfejlesztésre.

Abstract

In the past fifty years the rapidly developing digital technologies have reached the world of music. The filters, effects and amplifiers which originally were designed with analog electronics, nowadays exist as algorithms implemented on microchips, or processors. Among them, synthesizing sounds of instruments has become more popular, as it gave opportunities creating new sounds, and musical genres. The memory size and clock frequency of microcontrollers show the greatest development. Therefore, more complex algorithms can be run in viable time.

Physics-based sound synthesis requires more time for calculus, than the prior methods, therefore these algorithms have started to spread only in the last few decades. From several techniques for synthesis I use the finite difference method to design a model of the acoustic guitar. I chose this technique, because the tension modulation can be simply modeled with it.

My model is made up of three sub-models. First, the parameters of losses are computed by analyzing plucked samples. The string model is based on the one-dimensional form of the wave equation. This model considers the density of the string's material and its geometrical parameters: diameter, length, radius of gyration. It also includes the parameters of losses and stiffness.

The excitation is given by the physical model of the pick, which consists of two mass points, representing the peak of the pick and the hand which holds the pick, and the spring constant of the pick's material. I have measured the force-pressure response of the guitar body with a force hammer, and designed a digital filter to model the body response. The output of the string model is filtered and thus the synthesized sound is achieved.

At the end of the thesis I summarize the steps of the model creation process, draft the results, and discuss the feasible options of the parameters in the complete model. Finally, I highlight those parts of the model which are suitable for future development.

1 Bevezetés

Gitárok nagyjából a tizenkettedik század óta léteznek. Eleinte belekből, később műanyagból készült húrokat feszítettek egy üreges fatestre. A húrok rezgő szakaszát változtatva szólaltathatunk meg különböző hangokat. A húr a testhez rögzített végén, rezgését átadva gerjeszti a testet, ami a benne levő levegőt megmozdítva hangosítja fel a hangot.

A gitár hangereje a test méretének és a húrfeszültségnek függvénye. A klasszikus zene idejében a gitár ritkábban szólalt meg, főleg kísérőhangszerként vett részt. A 20. században a technika előrehaladtával létrejöhettek az elektromos gitár. Itt a hangszertest szerepe redukálódott, főleg esztétikai célt szolgál, a mai gitártestek speciális, személyre szabott formája. Ezen hangszerek húrjai a testre helyezett ún. pickup-okat gerjesztik.

Két féle működési elven működhetnek a pickup-ok. Fémhúros hangszer esetén tekercses hangszedőket használnak, amelyek a mágneses indukció elvén működnek. A rezgő fémhúr megváltoztatja a tekercsben a mágneses teret. A másik típusú hangszedő a piezoelektromosság elve alapján működik; legtöbbször akusztikus és a műanyaghúros gitároknál használjuk őket.

Ezek a szenzorok elektromos jelként továbbítják a rezgéseket, amiket aztán erősítőkön át hangfalakból hallhatunk vissza. Az elektromos gitárok és hozzájuk kötődő effektpedálok, hangszínszabályzók, különböző teljesítményű erősítők térhódítása mind a mai napig középponti szerepet tölt be a könnyűzene világában.

A klasszikus gitár, avagy fémhúrokkal felszerelt testvére az akusztikus gitár is töretlenül egyaránt népszerű, legalább annyi zenében domináns, mint az elektromos verzió.

Egy ilyen gitár fizikai paraméterei közül a legfontosabbak a test faanyaga, (sűrűsége, rugalmassága, puhasága) húrjainak anyaga (műanyagok, bronz, acél, nikkel és sok más fémből ötvözött hűrt gyártanak napjainkban) és a gerjesztést végző test tulajdonságai, (pengető esetében a tömeg, rugóállandó).

A hangszeres zene mellett napjainkban sok ember szintetizátorokkal, számítógépes programokkal ír zenét. Így megnőtt az igény arra, hogy a szintetizátorok tisztább, élethűbb hangokat adjanak vissza. Számos zeneszerkesztő program rendelkezik szintézis plugin-okkal, ezek közül több program ingyenesen elérhető az interneten.

A dolgozat célja egy olyan algoritmus megírása, amely egy fémhúros gitár hangját szintetizálja a véges differencia módszer segítségével.

A következő fejezetekben először dióhéjban felvázolom a különböző szintézis módszereket. Ezt követve a harmadik fejezetben a hullámegyenletből kiindulva, azt felírva egy dimenzióra a húrnál jellemző tagokkal felírom a kellő differenciálegyenletet, ezt párhuzamosan vezetve az adott lépés diszkretizálásával. A negyedik fejezetben a pengetett hangokat vizsgálva számolom ki a differenciálegyenlet egyes tagjaihoz tartozó csillapítási együtthatókat. Majd végül a gitártesten végzett mérésekből meghatározom a test átvitelét. Ezt alkalmazva a szimulált pengetéssel megkapjuk a szintetizálni kívánt hangot.

2 Hangszíntézis módszerei

Ebben a fejezetben néhány napjainkban használt szintézismódszert, ismertetek.

2.1 Absztrakt algoritmusok

Ennek a módszernek igazából szinte semmilyen kapcsolata nincs a hangszerekkel, pusztán annyi a feladata, hogy egyszerű és kevés paraméterrel rendelkező matematikai algoritmusokkal hangot készítsünk. Az ilyen elvű eszközök különböző modulációkkal és nemlineáris szűrőkkel dolgoznak. Ennek a módszernek nem célja valós hangszerek hangját utánozni, nem is képesek erre, inkább új, sajátos felharmonikus együttesek teremtésére alkalmasak.

2.1.1 FM szintézis

Egy ismertebb speciális frekvenciamoduláció a Chowning [1973] féle FM szintézis, ahol a vivő és a modulálójel is a hallható frekvenciatartományban van. A vivő hullám frekvenciája a moduláló hullám szerint változik. Ennek sebességét a moduláló frekvenciája határozza meg. Egy szinuszos vivő és moduláló esetében az alábbi egyenlet írja le a vivő hullámot:

$$e = A \sin(\alpha t + I \sin \beta t) \quad (2.1)$$

ahol

e – a vivő kitérése

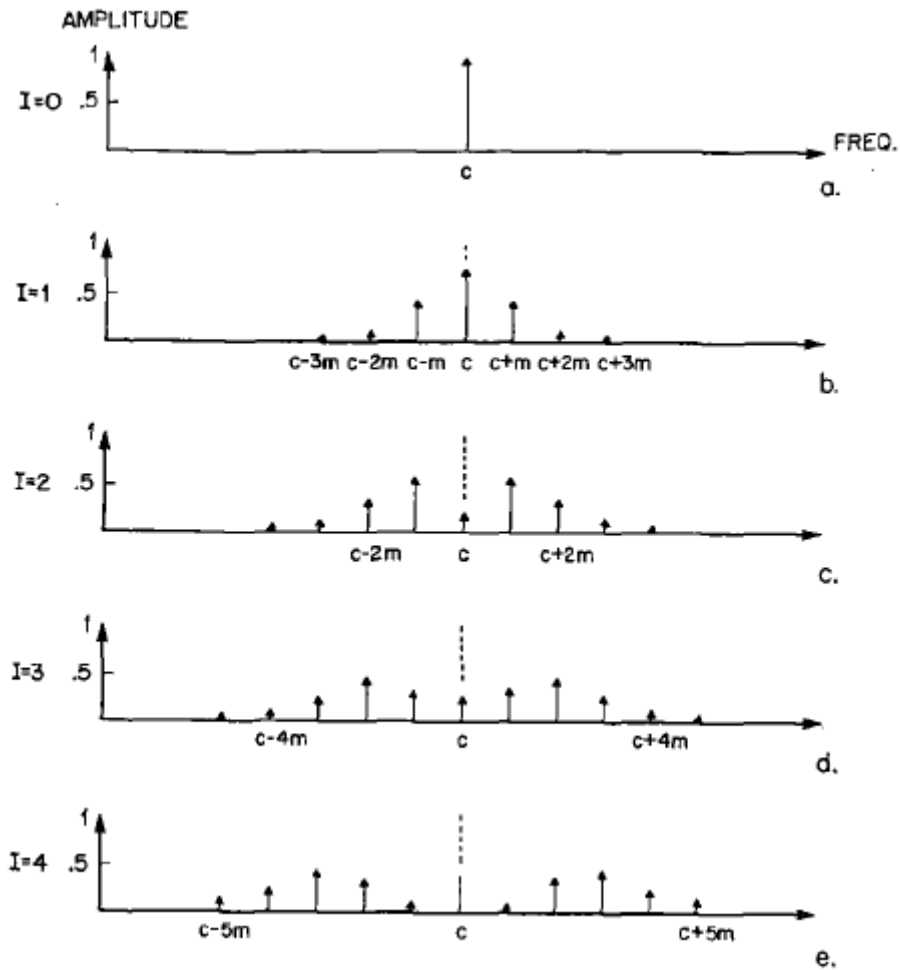
A – a vivő amplitúdója

α – a vivő frekvenciája

β – a moduláló frekvenciája

I – a modulációs index, értéke $(\alpha - \beta)/\beta$

A modulációs index nagysága határozza meg a moduláció oldalsávjainak számát. Minél nagyobb, annál több energiát vesznek el összesen az alapsávból. Chowning cikkéből az alábbi ábra jól mutatja ezt.

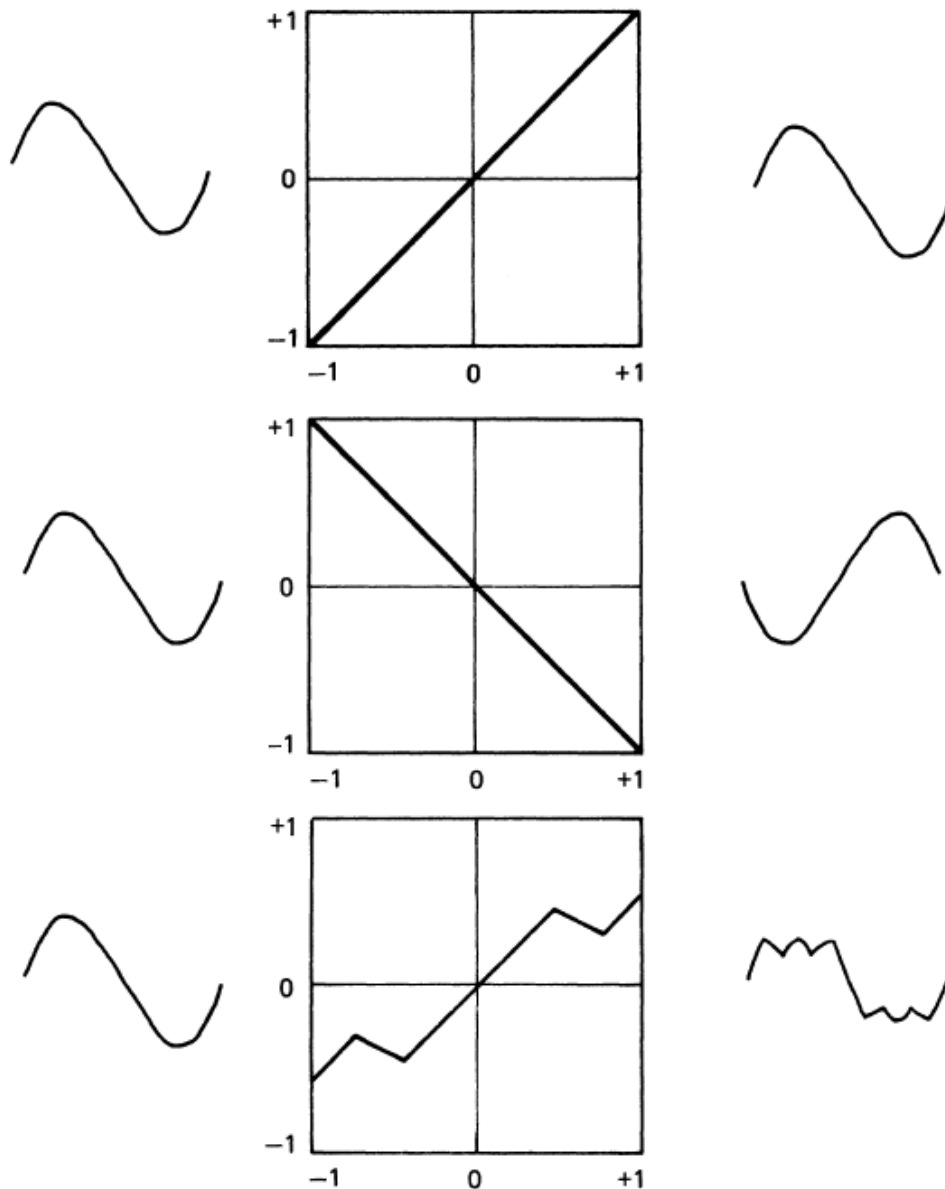


2.1 ábra: [Chowning 1973] FM szintézis spektruma, növekvő modulációs index mellett

2.1.2 Waveshaping szintézis

Roads [1979] jól összefoglalja a waveshaping szintézist, vagy másnéven a nemlineáris torzítást. Ennek az eljárásnak egy központi eleme van, ami megkap egy ismert amplitúdójú és frekvenciájú szinusz jelet. Ez lehet például egy műveleti erősítő, amit a jellel túlvezérelve torzítást hozhatunk létre. Egy szinuszból így egy négyszög jelig lehet deformálni a hullámot.

Digitális keverőpultokban vagy effektpedálokban megtalálható ez a torzítás, az erősítő átvitelét ábrázolva [2.2 ábra] szemléletes a hatás. Az x tengelyen a bemenő jel amplitúdója, az y tengely a kimenőé, mindkettő 1-re normalva a következő ábrákon látható.



2.2 ábra: [Roads 1979] Waveshaping szintézis, különböző torzító karakterisztikákkal

2.2 Minta alapú szintézis

A következő módszer esetében azt az utat választották, hogy egy adott hangszer hangját jó minőségben rögzítik. Egy gitár esetében itt volt lehetőség eltárolni minden húron minden lefogón a hangokat. Így az ezeket tároló szintetizátor ezeket a hangokat tökéletesen vissza tudta játszani. Eleinte, amikor még a memóriaméreték nem engedték meg a mai tetszőlegesen hosszú mintákat, akkor egy-egy hullámnyi felvételt ismételve érték el a tetszőlegesen hosszan kitarított hangokat, ezekre exponenciális burkolót illesztve szabályozták annak lecsengési idejét. Később

a valósabb lecsengést és a pontosabb visszajátszást hamar elősegítette a technikai fejlődés miatt növekvő mintavételi frekvencia és felbontás. Nagy előnye, hogy mivel előre feldolgozott adatokkal dolgozik, így nem igényel szignifikáns számítási időt. Viszont a hátránya is ebben rejlett, hiszen ezeken kívül semmi másra nem volt képes. A húr feszítettségével, a pengetés helyével a húron, a lefogóhoz való szorítás módjával, a pengető vastagságával és számos, a gitárjátékot színesítő paraméterrel való kombinálás lehetőségét nem tudja nyújtani.

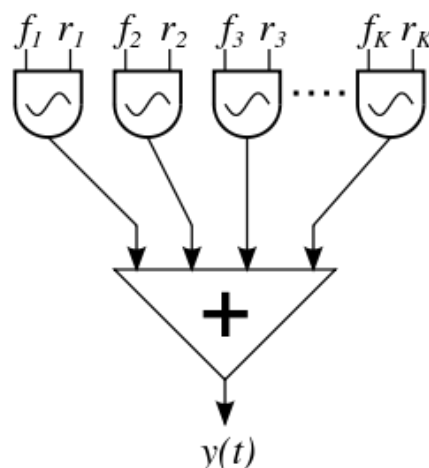
2.3 Spektrum alapú modellek

Ezen eljárás nem egy-egy megszólaltatott hangszer hangjára, annak időfüggvényére fókuszált, hanem sokkal inkább annak frekvencia eloszlására, spektrális jellemzőire. Két fő típusa van az additív és a szubtraktív szintézis.

2.3.1 Additív szintézis

Az első elektromos orgona, ami ezen az elven működött, Thaddeus Cahill [1897] fejlesztette ki, ez volt a Telharmonium. Smith [2016] összefoglalása szerint, az additív szintézisnél a modell úgy hozta létre a hangot, hogy többféle szinusz jelet generált, ezeket más-más burkoló görbével. Ezek szuperponálásával közelítette meg a kívánt hatást. A szintézist leíró összefüggés a következő:

$$y(t) = \sum_{(k=1)}^K r_k(t) \cos(2\pi f_k t + \phi_k). \quad (2.2)$$



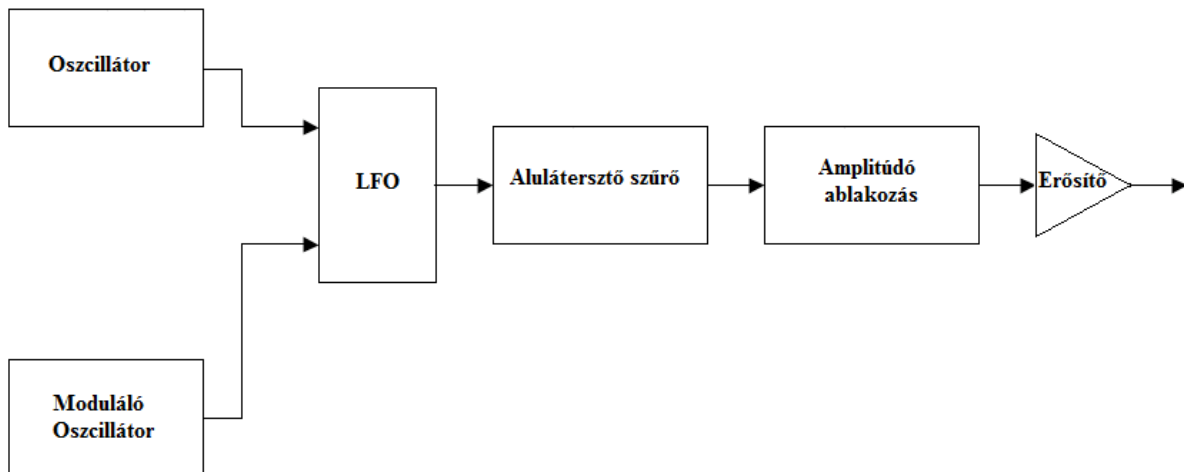
2.3 ábra: [Wikipédia] Az additív szintézis blokkvázlata

Ha 2.2-es egyenletben a súlyokat egész számnak adjuk meg akkor a természetes felharmonikusokat kapjuk, és nem egészszámú többszörösöket használva inharmonikus komponenseket is generálhatunk. Ezeket az együtthatókat időfüggővé téve szabályozhatjuk a harmonikusok lecsengését.

2.3.2 Szubtraktív szintézis

Buchanan [2011], cikkében összefoglalja a szubtraktív szintézist. Oszcillátorokkal könnyen előállítható négyszög-, háromszög-, fűrészfogjel. Ezek a jelek széles spektrummal rendelkeznek. Kis frekvenciájú oszcillátorokkal (LFO – low frequency oscillator), a 2.1.1-ben kifejtett módszerhez hasonlóan modulálhatjuk a jelet. Szűrőkkel formázható ez a spektrum, így alakítható a hang tónusa, karakterisztikája. Ablakozással az időfüggvényt módosítjuk, például annak fel- és lefutási idejét.

- 1 – oszcillátorral generált jel
- 2 – LFO a frekvenciamodulációhoz
- 3 – spektrum formálása szűrőkkel
- 4 – időfüggvény formálása ablakokkal
- 5 – erősítés



2.4 ábra: A szubtraktív szintézis blokkvázlata

2.4 Fizikai alapú szintézis

Ezek a módszerek nem a hangszerek által megszólaltatott jelekből, mintákból dolgoznak. A hangszerek, mint rendszernek a modellezése az elsődleges cél. Egy megfelelő elemekkel felépített jól paraméterezett modell szimulációja képes ugyancsak kielégítően szintetizált hangok megszólaltatására.

Egyik első lépés ezt a rendszert részegységekre osztani, amiket esetleg már egy-egy algoritmus képes egyben modellezni. Ennek a modellnek a precizitása főleg azon múlik, hogy mennyire pontosan állapítjuk meg a fizikai tulajdonságait, ezeket milyen összefüggésekkel implementáljuk. Hátránya viszont a nagy számítási idő a korábban említett módszerekhez képest. Ez napjainkra már nem jelent akkora problémát, hiszen a több GHz órajelű processzorok könnyedén megbirkóznak ezzel.

A fizikai alapú szintézisnek három elterjedt módja használatos. Ezek mindegyike adott szempontokat jobban kielégít, másokban kötöttebb.

2.4.1 Digitális hullámvezető

A digitális hullámvezetőt alkalmazó módszer a legelterjedtebb. [Smith 1983] A modell a hullámegyenlet általános megoldására épül:

$$c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \tag{2.3}$$

ahol az y a hullám transzverzális kitérése, c a terjedési sebesség.

A megoldás egy jobbra és balra haladó hullámból áll:

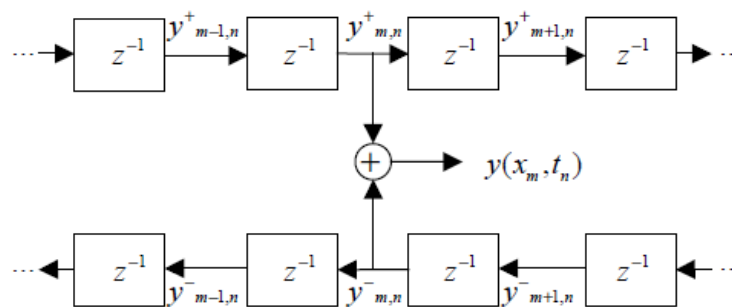
$$y(x, t) = y_1(x - ct) + y_2(x + ct). \tag{2.4}$$

A digitális alkalmazáshoz mintavételezni kell a fenti hullámokat. Egy CD minőségű hanganyag esetén a mintavételi frekvencia $f_s = 44.1 \text{ kHz}$, így egy minta időegysége $T = 1/f_s$. Ehhez adódik, hogy a térbeli mintahossz $X = cT$.

A hullám így egy időegység alatt egy hosszegységet halad valamelyik irányba. A megvalósításhoz két digitális késleltető vonal szükséges. Bármelyik időpillanatban

megkaphatjuk a tényleges hullám értékét, ha összegezzük a jobbra, illetve balra haladó kaszkád megfelelő értékeit. A veszteséget a késleltetők közé illesztett erősítőkkel lehet modellezni. Ezek értéke az egy mintaperiódusra jutó jelszint csökkenést tartalmazzák.

Ilyetén könnyen implementálhatunk olyan paramétert, mint például a különböző húrok csatolása, hiszen a gitáron egy megpendített húr nem elhanyagolható gerjesztésként szolgál a többi húrnak és vissza, ezáltal egy akkord megzendítése nem egyenlő azzal, hogy egymásmellé rakjuk a hat húron külön megszólaló hangokat.



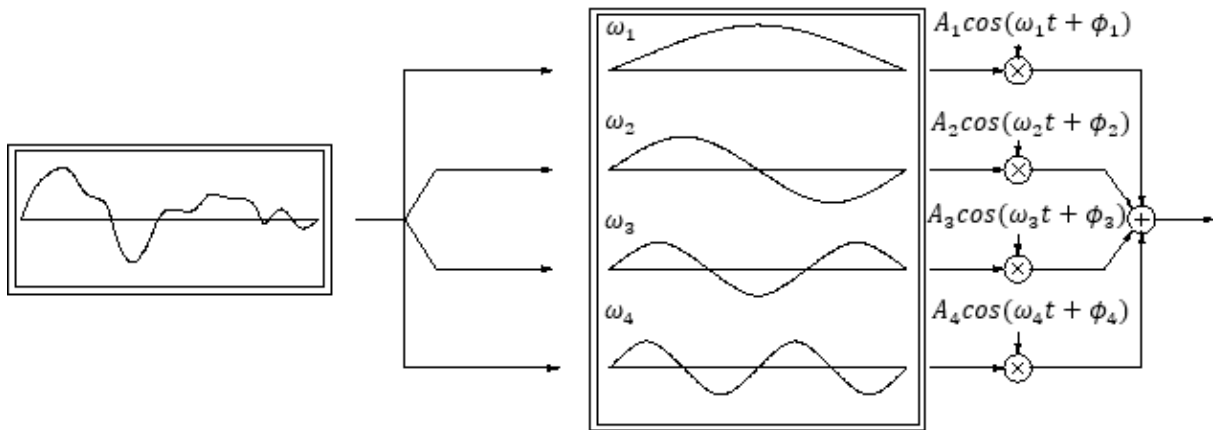
2.5 ábra: [Bank 2006] digitális hullámvezető blokkvázlata, ideális húrra

2.4.2 Modális szintézis

A modális szintézis esetlegesen összetettebb geometriájú rezgő objektumok spektrális viselkedését írja le. [Bilbao 2006] A dinamikus viselkedést modulusokra bontva kapunk önálló frekvencia komponenseket.

Egy hangszer fizikai modellje két adathalmazból áll. Egyrészt a rezgő testet leíró határfeltételekkel rendelkező parciális differenciálegyenletről, másrészt a gerjesztés függvényéből. Az első halmaz segítségével a rezgés frekvenciáit kapjuk meg. A gerjesztésből ezekhez a frekvenciákhoz súlyokat és fázistolásokat kapunk.

Ezzel az eljárással nem csak hangszereket, hanem különböző anyagú merev testek, fémlemezek hangját is gyakran modellezzük.



2.6 ábra: [Bilbao 2006] A modális szintézis blokkvázlata

2.4.3 Véges differencia módszer

A véges differencia módszer egy numerikus eljárás, amit differenciálegyenletek megoldására használhatunk. [Hoffman 1992]

A differenciálegyenletet differenciaegyenlettel közelítjük, ahol a deriváltakat véges differenciákkal becsüljük. Így ez egy diszkrétizáló módszer egyben. Leggyakrabban parciális differenciálegyenletek megoldására használjuk.

A derivált tagok diszkrétizálása a függvény Taylor polinomjából végezhető:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} h + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!} h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n + R_n(x), \quad (2.5)$$

ahol $R_n(x)$ a különbség a polinom és az eredeti függvény érték között. Ebből az egyenletből megközelíthető a függvény első deriváltja a polinom megcsonkításával.

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} h + R_n(x) \quad (2.6)$$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \frac{R_n(x)}{h} \quad (2.7)$$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{R_n(x)}{h} \quad (2.8)$$

Feltételezve, hogy $R_n(x)$ megfelelően kicsi, ezt a tagot elhagyva ez első derivált az alábbi alakban közelíthető:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{2.9}$$

Ezen az elven kifejezhetők a magasabb rendű deriváltak is.

A függvény értelmezési tartományát úgy diszkrétizáljuk, hogy felosztjuk véges számú egyenlő hosszú léptékekre. Így például $f(t) \rightarrow f(N\Delta t)$, ahol Δt a választott időegység, és a tartományunkat N részre osztottuk fel.

3 A modell



3.1 ábra: a szintézismodell blokkvázlata

A modell három különálló egységből épül fel. A gerjesztés és a húr kölcsönhatásban áll egymással, hiszen a pengetés során a pengető, mint tömeg-rugó struktúra erővel hat a húrra, amely erő ugyanúgy hatással van a pengetőre is. Egy gitár esetében a test és a hurok között is fennáll a kölcsönhatás, mivel a megpendített húr által rezgésbe hozott test gerjeszti a többi húrt is. Ebben a dolgozatban a hurok közötti csatolással nem foglalkozom.

3.1 Hullámeqyenlet

A hullámeqyenlet alábbi alakjából indulok ki:

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

(3.1)

ahol

μ – a húr anyagának vonalmenti sűrűsége

T – a húr feszítettsége

Ez egy veszteségmentes hullámterjedést leíró, egydimenziós hullámeqyenlet. Az előző fejezetben említett szintézismódszerek különböző úton használják fel ezt az összefüggést. A hullámvezetőnél a differenciálegyenlet általános megoldása szükséges. A véges differencia módszernél viszont a Taylor polinom segítségével kifejezett deriváltakra van szükség.

3.1.1 Veszteségek és csillapítások

A valódi veszteséges húr egyenlete két taggal gyarapszik: a húr keménységét, ridegségét leíró és a súrlódás ellenállást leíró tagokkal:

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - ES\kappa^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - 2R(\omega)\mu \frac{\partial y}{\partial t}, \quad (3.2)$$

ahol

κ – girációs sugár

E – Young modulus

S – keresztmetszet

R – frekvenciafüggő súrlódási ellenállás

A terjedési sebességgel kifejezve az egyenlet így írható fel:

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}. \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{ES\kappa^2}{\mu} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - 2R(\omega) \frac{\partial y}{\partial t} \quad (3.4)$$

3.1.2 Gerjesztés

A dolgozatban a pengetővel történő gerjesztést modellezem. A pengető valamilyen kezdősebességgel eléri a húr egy pontját. A pengető csúcsa saját lendülete miatt haladna tovább, viszont megakad a húrban, amit így elkezd maga előtt tolni. Emiatt a húr elkezd megnyúlni, ami a húrfeszültség növekedéséhez vezet. Ez az erő igyekszik a húrt visszaállítani nyugalmi egyensúlyába, így ez az erőhatás megjelenik a pengető csúcsán is. A pengető, mint rugalmas test ennek hatására elhajlik, így egy ellenkező irányú erőt ébreszt saját rugalmasságának köszönhetően.

Mivel a kezünk tömege nagyságrendekkel nagyobb, mint a húr vagy a pengető, így a haladó mozgást alig fékezi a fenti erő, és tovább növelve mind a húr mind a pengető megnyúlását elérünk egy olyan határhelyzetet, ahol a húr által kifejtett erőt a pengető felületén a súrlódás már nem képes ellensúlyozni, így a húr lecsúszik. Ezt követően elkezd szabadon rezegni, a megnyúlás miatt felhalmozódó rugalmas energiát felemészelve.

A fentiek miatt a gerjesztés, mint külső hatás nem egy külön tagként fog megjelenni a hullámeqyenletben hanem a derivált tagokban hiszen a pengető a kölcsönhatás alatt a húrmodellől függetlenül elmozdítja a húr egy pontját.

Bank [2006] szerint a húrban ébredő erő transzverzális komponense, ami a kölcsönhatás szempontjából releváns:

$$F_{string}(t) = -T(t) \left(\frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x_0-1} + \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x_0+1} \right), \quad (3.5)$$

ahol x_0 azon pontja a húrnak, ahol a pengetővel érintkeznek. A $T(t)$, a húrfeszültség, amit a 3.3-as fejezetben ismertettek.

A pengetés nagysága az erő függvénye. A valóságban ezt az erőt azzal szabályozzuk, hogy a mozdulat közben a pengetőt mennyire tartjuk a húron, engedve, hogy azok még jobban megnyújtsák egymást.

A 3.1-es ábrán látható gerjesztés-húr kapcsolatban így azaz az odahatás, hogy a pengető csúcsa magával rántja a húrt. A visszahatás pedig a megnyúlásból fakadó erő, ami a pengetőre hat.

3.2 Diszkretizáció

A parciális differenciálegyenletben a deriváltakat véges differenciákkal helyettesítjük. A tér és az időtengelyeket diszkrét egységekkel felírva: $x_m = M\Delta x$; $t_n = N\Delta t$

Ez az alábbi módosítást jelenti:

$$\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x_m, t_n} = \frac{y_{m,n} - y_{m-1,n}}{\Delta x} \quad (3.6)$$

$$\left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{x_m, t_n} = \frac{y_{m,n} - y_{m,n-1}}{\Delta t} \quad (3.7)$$

$$\left. \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right|_{x_m, t_n} = \frac{y_{m-1,n} - 2y_{m,n} + y_{m+1,n}}{\Delta x^2} \quad (3.8)$$

$$\left. \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right|_{x_m, t_n} = \frac{y_{m,n-1} - 2y_{m,n} + y_{m,n+1}}{\Delta t^2} \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial t} \Big|_{x_m, t_n} = \frac{(y_{m-1,n} - 2y_{m,n} + y_{m+1,n})}{\Delta x^2 \Delta t} - \frac{(y_{m-1,n-1} - 2y_{m,n-1} + y_{m+1,n-1})}{\Delta x^2 \Delta t}$$

(3.10)

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \Big|_{x_m, t_n} = \frac{y_{m-2,n} - 4y_{m-1,n} + 6y_{m,n} - 4y_{m+1,n} + y_{m+2,n}}{\Delta x^4}$$

(3.11)

A számításokhoz szükség lesz a kitérés értékeire jelenlegi, előző és következő időpontban. Egy-egy differencia értéke számítható az alábbi módon is:

$$\frac{y_{m,n+1} - y_{m,n}}{\Delta t}$$

(3.12)

A 3.5-höz képest lenne eltérés, viszont ez elhanyagolható minél kisebb Δt értéke. Ez ugyancsak igaz a térbeli differenciára is.

Mivel a húr végei a gitáron rögzítve vannak, így konstansként az $y(0)$ és az $y(M)$ pontokat nullának kell megadni. A precízebb számítás érdekében definiálni lehet az $y(-1)$ és az $y(M+1)$ pontokat melyek értéke a szélső pontokban számolt másodrendű térbeli deriváltak számításakor jön szóba. A szélső pontok második deriváltja nulla, ha $y(-1) = -y(1)$ és $y(M+1) = -y(M-1)$.

3.2.1 A diszkrét hullámegyenlet és implementációja

Az ideális húr diszkrét megfelelője a következő:

$$\frac{y_{m,n-1} - 2y_{m,n} + y_{m,n+1}}{\Delta t^2} = c^2 \frac{y_{m-1,n} - 2y_{m,n} + y_{m+1,n}}{\Delta x^2} \quad (3.13)$$

Az implementációhoz át kell rendezni a következő időpillanatban való kitérésre. Így ciklikusan kiszámítható a húr kitérése a következő időszakban.

$$y_{m,n+1} = c^2 \Delta t^2 \frac{y_{m-1,n} - 2y_{m,n} + y_{m+1,n}}{\Delta x^2} - y_{m,n-1} + 2y_{m,n} \quad (3.14)$$

$c = dx/dt$ választással egy egyszerűbb alakot kapunk:

$$y_{m,n+1} = y_{m+1,n} + y_{m-1,n} - y_{m,n-1} \quad (3.15)$$

Fontos megjegyezni, hogy a diszkrét modell megvalósításában felléphet instabilitás. Egyszerűsítve, a problémát az okozná, ha a terjedő hullám egy időszak alatt többet mozdul el, mint a modell hosszegysége.

3.2.2 A numerikus stabilitás vizsgálata

A Von Neumann analízissel szokás véges differenciás modellek stabilitását vizsgálni. [Garamvölgyi 2006] Ez a módszer a diszkrétizált differenciaegyenletet térkoordináta szerint Fourier-transzformálja, majd az így kapott diszkrét szűrő stabilitását vizsgálja, és ha ez minden frekvenciára stabil akkor kijelenthetjük, hogy a modell is stabil.

Ez a térbeli Fourier transzformáció az alábbi egyenlettel írható fel:

$$Y_n(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_{m,n} e^{-jk m \Delta x}. \quad (3.16)$$

A Fourier transzformáció azonosságából az eltolási tételt felhasználva az $y(x + \Delta x, n\Delta t)$ kifejezés, akárcsak az idő-frekvencia analógiában történő időbeli eltolás is egy fázistolást jelent a transzformáltban:

$$\mathcal{F}(y(x + \Delta x, n\Delta t)) = Y_n(k) e^{jk\Delta x}. \quad (3.17)$$

A 3.13-as egyenletre alkalmazva a transzformációt és az eltolási tételt a következőt kapjuk:

$$Y_{n+1}(k) = Y_n(k) \left[\left(c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (e^{jk\Delta x} + e^{-jk\Delta x}) \right] - Y_{n-1}(k) \quad (3.18)$$

A konjugált komplex exponenciális párt koszinusszá alakítva és nullára rendezve:

$$Y_{n+1}(k) - 2Y_n(k) \left[\left(c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (\cos(k\Delta x) - 1) + 1 \right] + Y_{n-1}(k) = 0 \quad (3.19)$$

Ezt az egyenletet z-transzformálva:

$$zY(k, z) - 2Y_n(k, z) \left[\left(c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (\cos(k\Delta x) - 1) + 1 \right] + z^{-1}Y(k) = 0 \quad (3.20)$$

Ezután ezt az egyenletet, mint egy digitális szűrőt vizsgáljuk stabilitási szempontból. A szűrő pólusai $\left[\left(c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (\cos(k\Delta x) - 1) + 1 \right] = C_k$ helyettesítéssel:

$$z^2 - 2C_k z + 1 = 0. \quad (3.18)$$

$$p_{1,2} = \frac{2C_k \pm \sqrt{4C_k^2 - 4}}{2} = C_k \pm \sqrt{C_k^2 - 1} \quad (3.19)$$

Ha $C_k^2 - 1 > 0$, akkor $C_k^2 > 1$, vagyis legalább az egyik gyök abszolút értéke nagyobb mint 1, így a rendszer instabil. $C_k^2 - 1 \leq 0$ esetén a két gyök komplex konjugált pár. Ekkor $|p_1| = |p_2| = \sqrt{C_k^2 + 1 - C_k^2} = 1$. Mindkettő pólus abszolútértéke 1, ezért a rendszer így stabil.

A $C_k^2 - 1 \leq 0$ kifejezésből tovább számolva.

$$\begin{aligned} -1 &\leq C_k \leq 1 \\ -1 &\leq \left(c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (\cos(k\Delta x) - 1) + 1 \leq 1 \end{aligned}$$

A jobboldali egyenlőtlenség mindig teljesül, mivel a koszinusz függvény maximális értéke 1.

$$-2 \leq \left(c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (\cos(k\Delta x) - 1)$$

ha a koszinusz értéke -1, abban az esetben a feltétel így néz ki:

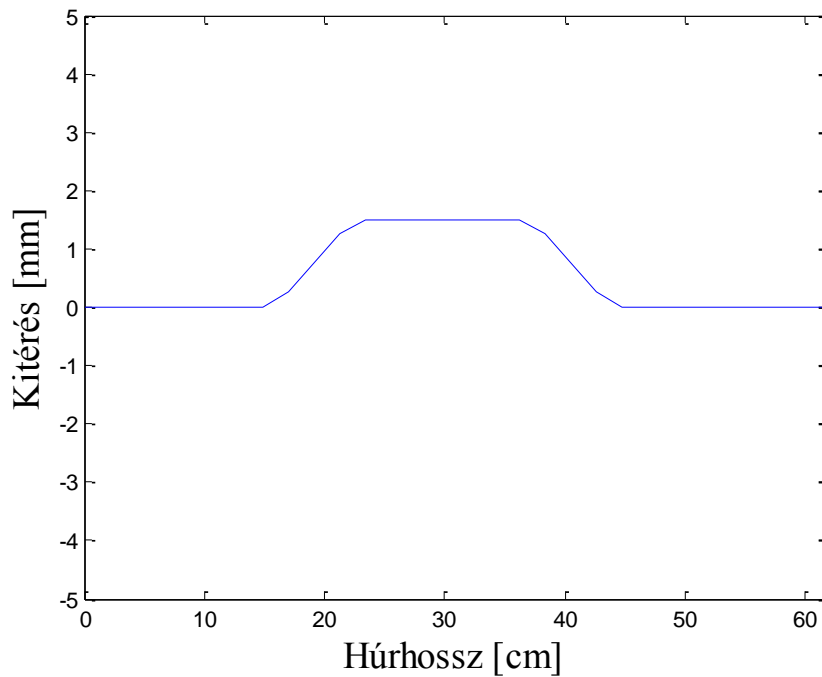
$$\left(c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \leq 1. \quad (3.20)$$

Így a modell stabilitásának feltétele:

$$c \Delta t \leq \Delta x.$$

(3.21)

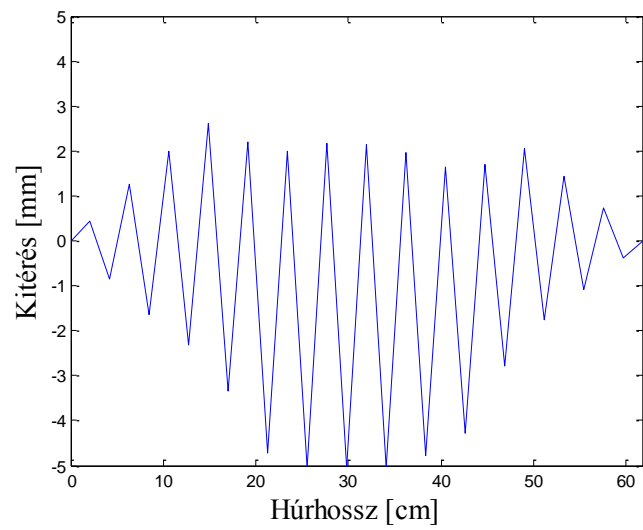
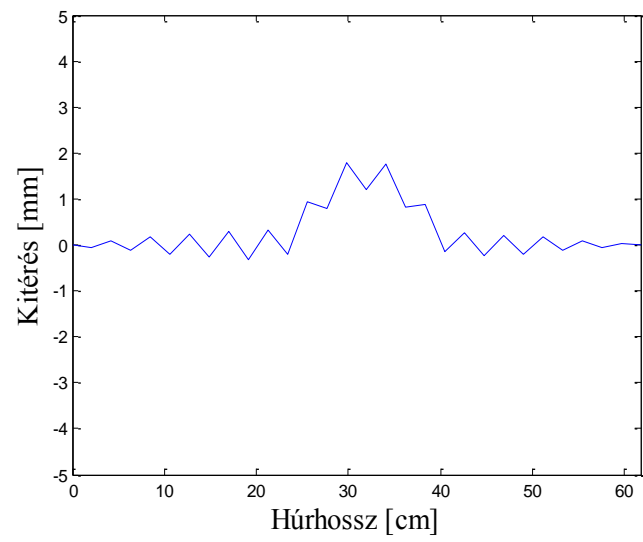
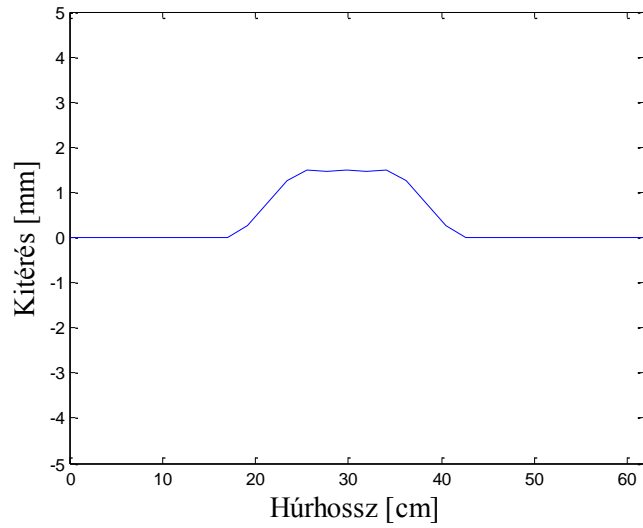
A gerjesztés egy Hanning ablak a kitérést leíró vektorban, mint kezdeti érték. A hullámforma így néz ki:



3.1 ábra: Hullámforma az ideális húron

A stabilitás határhelyzetében ($c = dx/dt$) a hullám változatlanul terjed a rögzítések között amíg le nem jár a ciklus. Ha a stabilitási feltételnek nem eleget tevő paraméterekkel futtatom a ciklust, a húr „elszáll”, már elhanyagolhatóan kis módosítás után is, szinte azonnal megugrik és a végtelenségig növekszik.

A 3.2-es ábrán ilyen paraméter beállításokkal fut le egy szimuláció. $c = 100$; $dt = 0.01$; $dx = 0.999$.



3.2 ábra: Instabil modell szimulációja – 3 ms, 25 ms, 33 ms

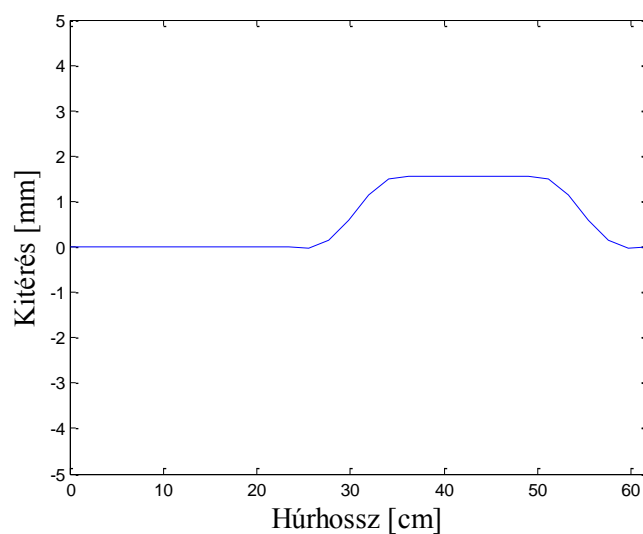
A modellt tovább bővítve a teljes hullámegyenlet következő tagjaival, már szükség van a csillapítást leíró ellenállás diszkrétizálására. Bensa [2003] szerint ez a bizonyos frekvenciafüggő tag felírható az alábbi formában:

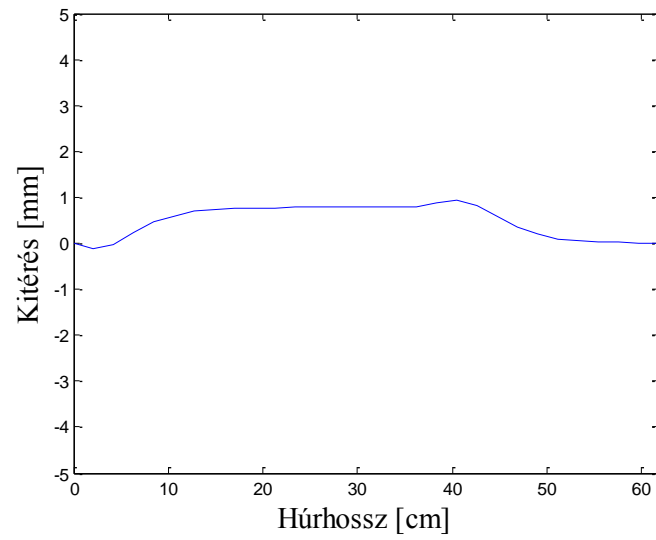
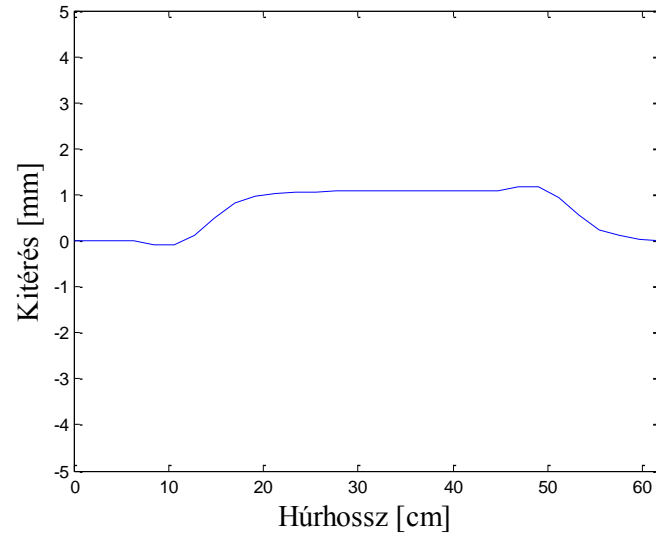
$$R(\omega) \frac{\partial y}{\partial t} \rightarrow b_1 \frac{\partial y}{\partial t} - b_2 \frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial t} \quad (3.13)$$

Ahol a b_1 és b_2 együtthatók összefüggésben állnak a hullám különböző modulusainak lecsengésével. [Bank 2006]

$$\tau_k = \frac{1}{b_1 + b_2 \left(\frac{k \pi}{L}\right)^2} \quad (3.14)$$

Ahol a τ_k a k -adik harmonikus lecsengési ideje, az L pedig a húr hossza. Ezen lecsengési idők és belőlük a csillapítási állandók számítását a negyedik fejezet tárgyalja. Használva a veszteségi és merevségi tagokat is, egyelőre nem valós értékekkel, a hullám az alábbi módon torzul:





3.3 ábra: Veszteséges húrmodell szimulációja – 4 ms, 60 ms, 110 ms

3.2.3 A gerjesztés implementálása

A pengető, mint gerjesztő eszköz modellezhető egy rugóval és két tömegponttal. Az egyik tömeg a pengető kezét szimbolizálja, míg a másik a pengető tömegét, ami kölcsönhatásba kerül a húrral. A 3.1.3 fejezetben kifejtettek szerint ez a kölcsönhatás a következő egyenletekkel írható fel:

$$F_{pick,n} = K(y_{hand,n} - y_{pick,n}) - F_{string}. \quad (3.15)$$

$$v_{pick,n+1} = v_{pick,n} + \frac{F_{pick,n}}{m_{pick}} \Delta t \quad (3.16)$$

$$n_{pick,n+1} = n_{pick,n} + v_{pick,n} \Delta t \quad (3.17)$$

$$F_{hand,n} = -F_{pick,n} \quad (3.18)$$

$$v_{hand,n+1} = v_{hand,n} + \frac{F_{hand,n}}{m_{hand}} \Delta t \quad (3.18)$$

$$n_{hand,n+1} = n_{hand,n} + v_{hand,n} \Delta t \quad (3.19)$$

A tömegek arányával szabályozható a lengés formája, az alkar és a pengető tömegének $m_{hand} = 3 \text{ kg}$ és $m_{pick} = 0.003 \text{ kg}$ megfelelő választás egy valóságos modellben.

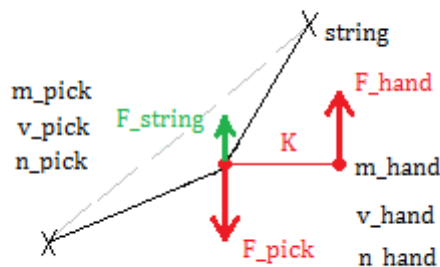
A 3.4-es ábrán a pengetés fentről lefelé történik.

```

%A pengetés logikája
% ameddig nem érte el az erőt amikor lecsúszik a húrról
if (T_next < 1 && pick == 0)
% ameddig a pengető nem érte el a húrt
    if(n_hand < 0)
        F_pick = -K*(n_hand - n_pick);
        F_hand = -F_pick;
        v_pick = v_pick + F_pick/m_pick*dt;
        v_hand = v_hand + F_hand/m_hand*dt;
        n_hand = n_hand + v_hand*dt;
        n_pick = n_pick + v_pick*dt;
% amikor kölcsönhatásban vannak
    elseif(n_hand>=0 && pick == 0)
        F_pick = K*(n_hand - n_pick) - F_string;
        F_hand = -F_pick;
        v_pick = v_pick + F_pick/m_pick*dt;
        v_hand = v_hand + F_hand/m_hand*dt;
        n_hand = n_hand + v_hand*dt;
        n_pick = n_pick + v_pick*dt;
        Y_now(15) = n_pick;
    end
% pick flag jelzi, hogy megtörtént a pengetés
% a húr már nem hat a pengetőre
% pengetés után a pengető megáll
else
pick = 1;
F_pick = K*(n_hand - n_pick);
v_pick = v_pick + (F_pick)/m_pick*dt;
n_pick = n_pick + v_pick*dt;
v_hand = v_hand/1.02;
n_hand = n_hand + v_hand*dt;
end

```

3.1 kódrészlet: A pengető implementációja

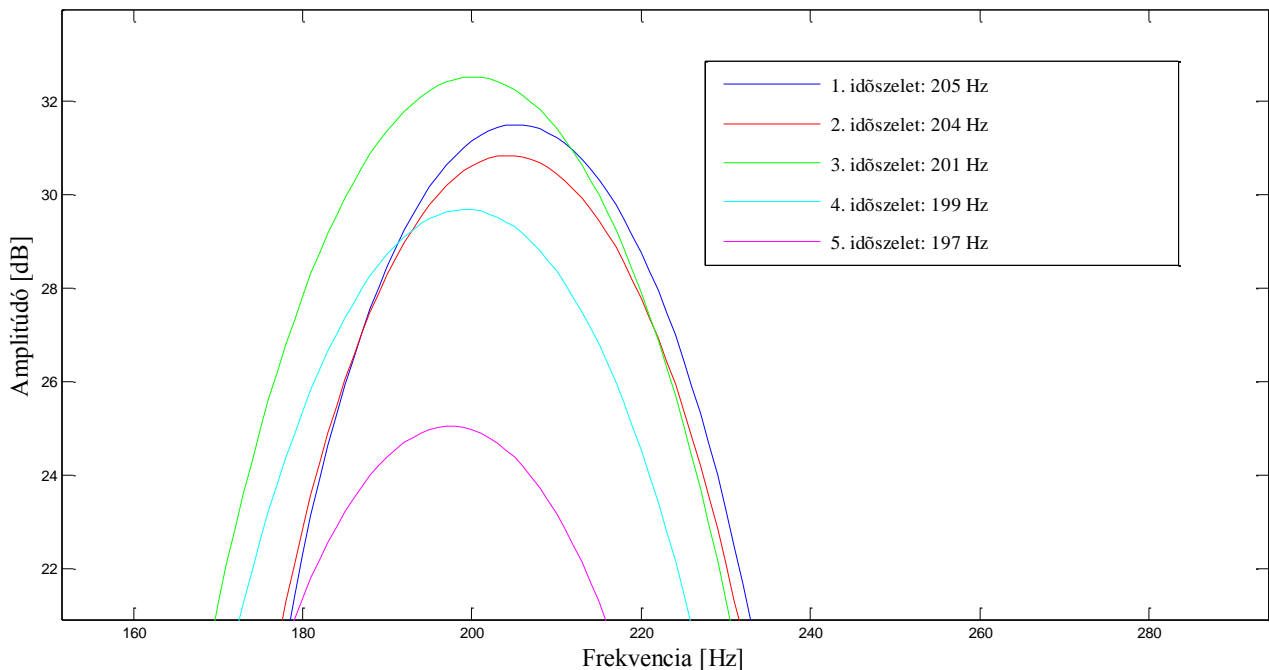


3.4 ábra: A pengető fizikai modellje

2.3 Húrfeszültség moduláció

Fémhúrok esetében nem elhanyagolható jelenség az alapharmonikus modulációja. Egy testre feszített húrnak van egy konstans feszültsége. Ezt a mennyiséget fel szokták tüntetni minden húrészlet csomagolásán, hogy például egy G4 húr, ha megfelelően van behangolva, akkor az mekkora erővel húzza a testet. A pendítés során a húr megnyúlik, így ideiglenesen a feszítettsége is megnő. Ez a jelenség természetesen bármilyen húrnál fellép, viszont csak a fémhúrok esetében lesz hallható hatása.

A 3.4-es ábrán egy erősen megpendített G4-es húr alapharmonikusának (196 Hz) modulációja látható. A felvétel 44.1 kHz-es mintavételi frekvenciával készült.



3.4 ábra: G4 húr alapharmonikus moduláció, a színek között 22.67 ms távolság van

A jelből huszonegyezer mintát öt darab, kétezer minta hosszú szeletre bontottam, köztük 1000 mintás átfedéssel, azonos hosszúságú Hanning-ablakozás segítségével. Az így kapott szeletek spektrumait ábrázolva látható, hogy az alapharmonikus egy magasabb értékről csökken vissza a pendítést követően a névleges frekvenciára.

Amint a húr rezgésének amplitúdójával együtt a megnyúlás is csökken, úgy csökken a feszítettség is.

Bank [2006] alapján, ha egy húrban igaz, hogy $T_0/ES \ll 1$, a feszültség egyenletes a húr mentén, így közvetlenül a megnyúlásból számolható a Hooke törvénnyel.

$$T = T_0 + ES[(L' - L)/L] \tag{3.20}$$

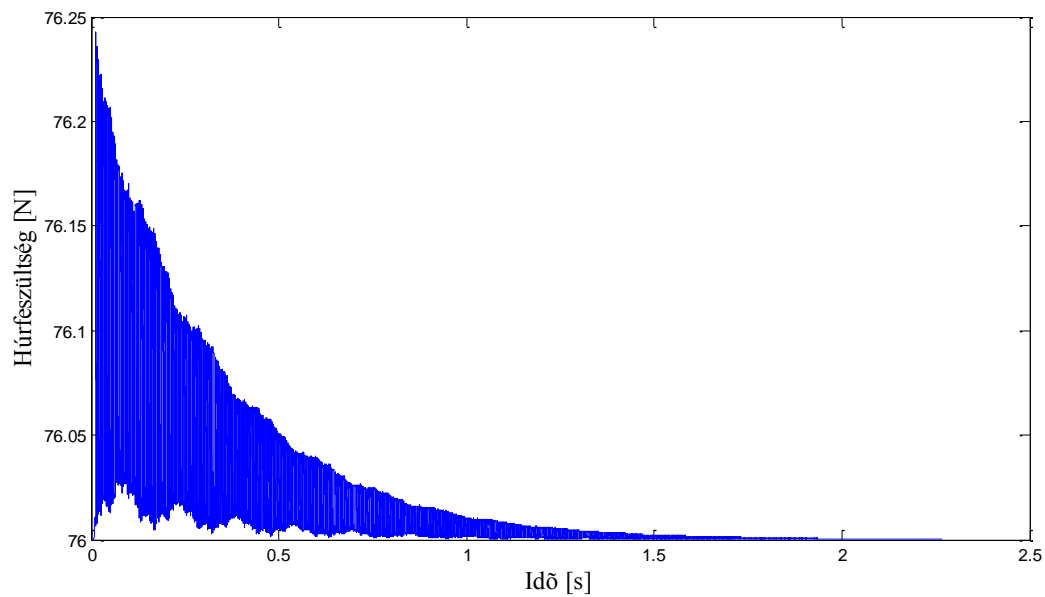
L – a húr eredeti hossza

L' – a megnyúlás utáni hossz

$$L' = \int_0^L \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} dx \approx L + \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx \tag{3.21}$$

$$T = T_0 + \frac{1}{2} \frac{ES}{L} \int_0^L \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx \tag{3.22}$$

A fenti összefüggéssel teljessé válnak a 3.3-as és 3.5-ös, a terjedési sebességre és a húrban ébredő erőre vonatkozó egyenletek. Így figyelembe vettem az implementáció során a húrfeszültség moduláció jelenségét is.



3.5 ábra: Húrfeszültség a pendítés után

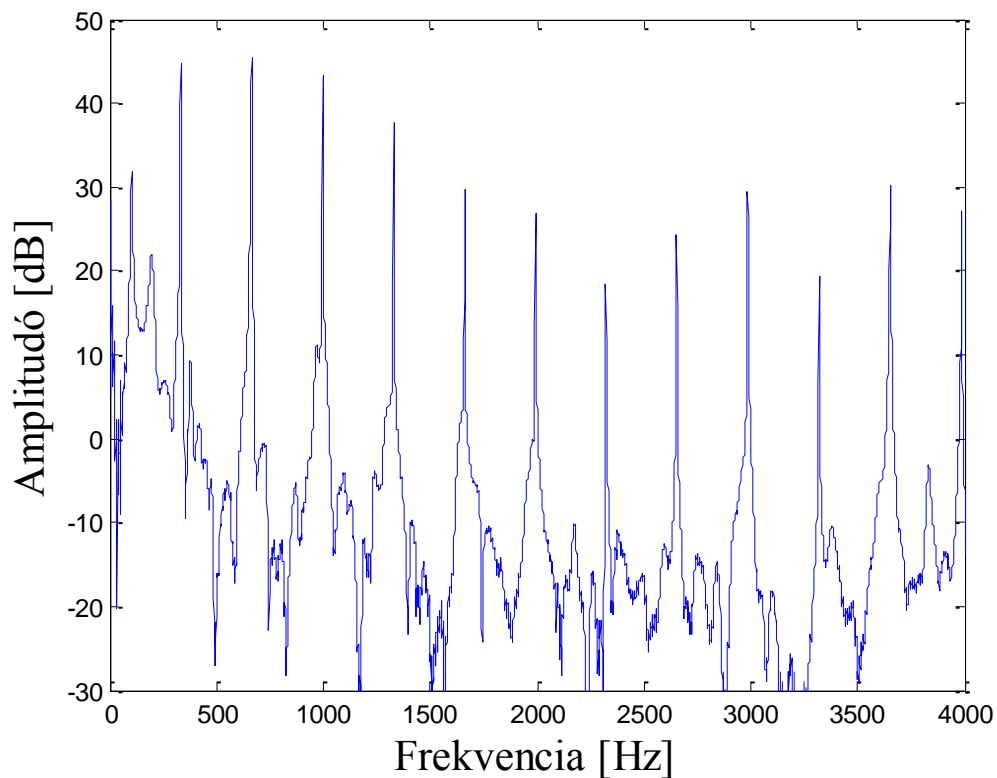
Látható, hogy a pengetést követően, amíg a húrnak nagy kitérése van addig a nyugalmi húrfeszültségnél nagyobb érték körül oszcillál, majd egyre kisebb kiugrásokkal exponenciálisan visszaesik a középállásába.

4 Pengetett minták analízise

A hullámegyenletben szereplő veszteségi tagok súlyozását valódi húrok segítségével állítottam be. Minden húron elvégeztem üres és lefogott hangok mérését. Ez azért számít, mert a lecsengési idő, a hang tónusa módosul a rögzítés függvényében. Az emberi ujjperc jóval puhább, mint a gitár szemöldöke. Viszont a lefogott hangok között nincs sok eltérés ilyen szempontból, így elég volt minden húron 1-1 ilyen hangot megmérnem.

A 3.14-es egyenletben szereplő együtthatók meghatározása a cél, a valós húron mért lecsengési idők segítségével.

Az alábbi ábrán egy E1 húr mért spektruma látható.



4.1 ábra: E1-es húr spektruma

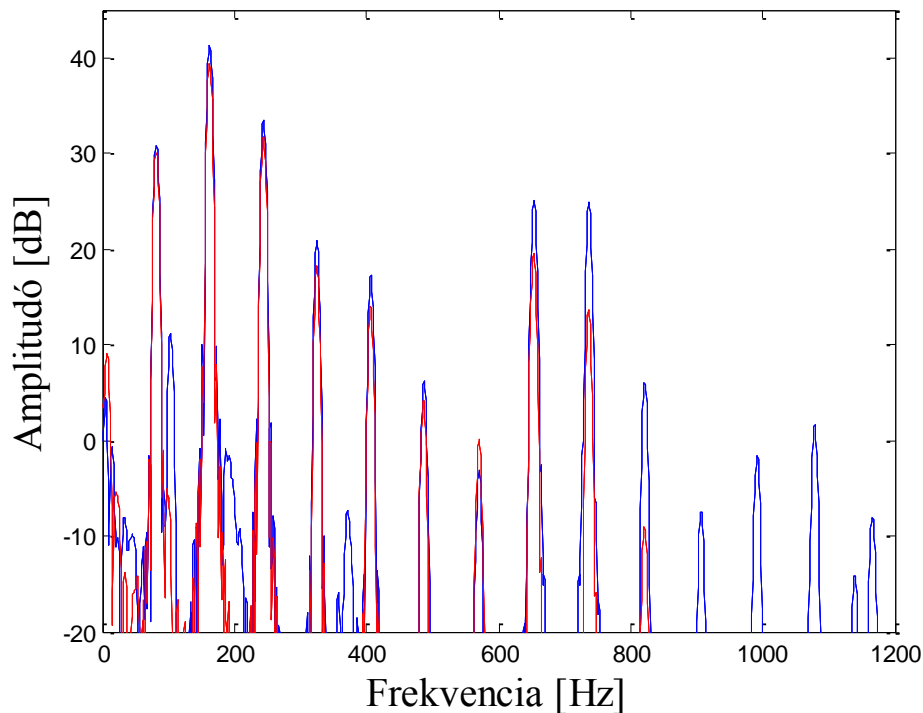
Csaba [2002] alapján számoltam a lecsengési időket, az első tíz harmonikusból. Az egyes frekvenciák időbeli változását a következőképpen vizsgáltam meg. A felvételtől két időszelést spektrumát egy ábrán megjelenítve látható, hogy a tüskék amplitúdója csökken. Ezeket a különbségeket leolvastva az alábbi összefüggések segítségével kaptam meg a mért eredményeket.

$$\lambda = \sqrt[N]{10^{\frac{A_1 - A_2}{10}}} \quad (4.1)$$

Ahol az $A_1 - A_2$ pedig az időben előbbi és a későbbi szakaszok decibelben vett amplitúdóinak különbsége. N a két időszelést távolsága. Ebből megkaptuk az ún. lecsengési együtthatót, ami közvetlen összefüggésben áll a lecsengési idővel.

$$\lambda = e^{\Delta t / \tau} \quad (4.2)$$

$$\tau = -\frac{\Delta t}{\ln \lambda} \quad (4.3)$$



4.2 ábra: E1 húr spektruma – kék: 22.5 ms, piros: 45 ms

Bank [2006] alapján a mért értékekből polinom regresszióval visszaszámolhatók a hullámegyenletben szereplő paraméterek.

$$\tau_k = \frac{1}{\sigma_k} \approx \frac{1}{b_1 + b_3 \theta_k^2} \quad (4.4)$$

θ_k – a k-adik harmonikushoz tartozó körfrekvencia

A becslés hibájának minimalizálásával közelítem meg a keresett együtthatókat. Ezt a legkisebb négyzetek módszerével végzem.

A hiba kifejezése:

$$e_\tau = \sum_{k=1}^K (\hat{\tau}_k - \tau_k)^2 = \sum_{k=1}^K \hat{\tau}_k^2 \tau_k^2 (\hat{\sigma}_k - \sigma_k)^2 \quad (4.5)$$

Ebbe a képletbe behelyettesítem a 4.4-es egyenletet.

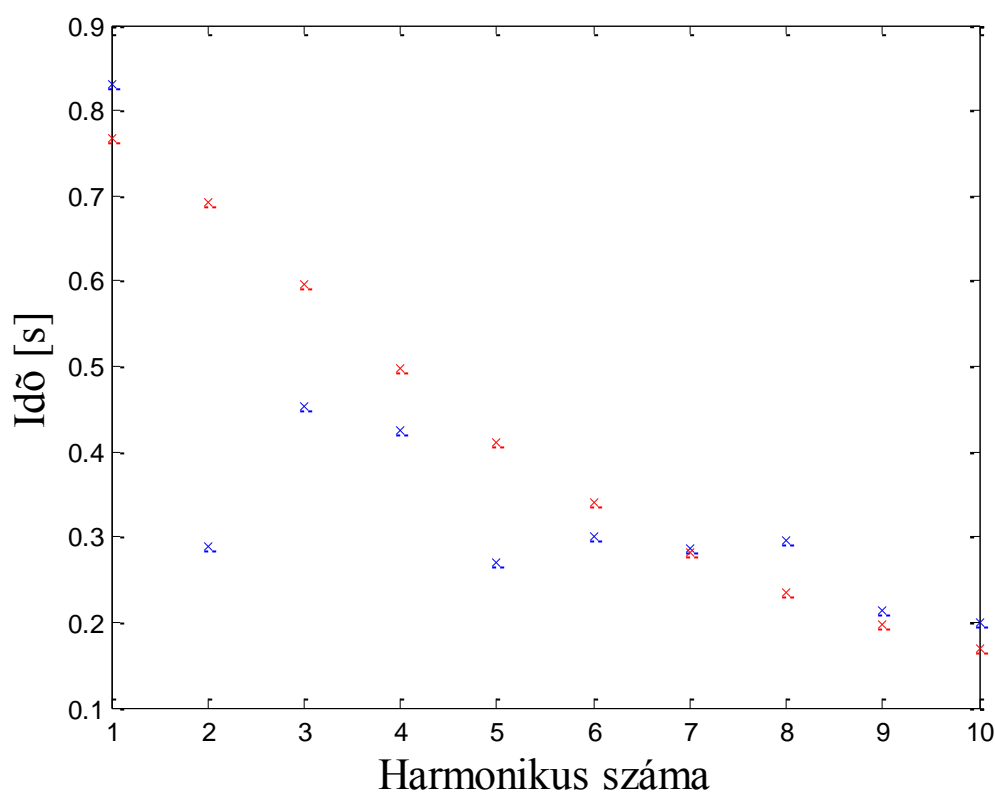
$$e_\tau = \sum_{k=1}^K \omega_k (b_1 + b_3 \theta_k^2 - \sigma_k)^2 \quad (4.6)$$

Az $\omega_k = \hat{\tau}_k^2 \tau_k^2$ értékű súlyokkal az első becslésben az a probléma, hogy $\hat{\tau}_k^2$ értékeit nem ismerjük előre. Ezért első körben $\omega_k = \tau_k^4$ értékkel számolok, és ezután már rendelkezésünkre áll egy b_1 és b_3 amiből számítható $\hat{\tau}_k^2$. Ezt a regressziót addig kell ismételtlen kiszámolni, amíg a hiba nem csökken le jelentősen. A 4.6-os egyenletet az együtthatók szerint parciálisan deriválva és azokat nullával egyenlővé téve megkapjuk a megfelelő formulát.

$$b_3 = \frac{\sum \omega_k \sum \omega_k \sigma_k \theta_k^2 - \sum \omega_k \sigma_k \sum \omega_k \theta_k^2}{\sum \omega_k \sum \omega_k \theta_k^4 - (\sum \omega_k \theta_k^2)^2} \quad (4.7)$$

$$b_1 = \frac{\sum \omega_k \sigma_k - b_3 \sum \omega_k \theta_k^2}{\sum \omega_k} \quad (4.8)$$

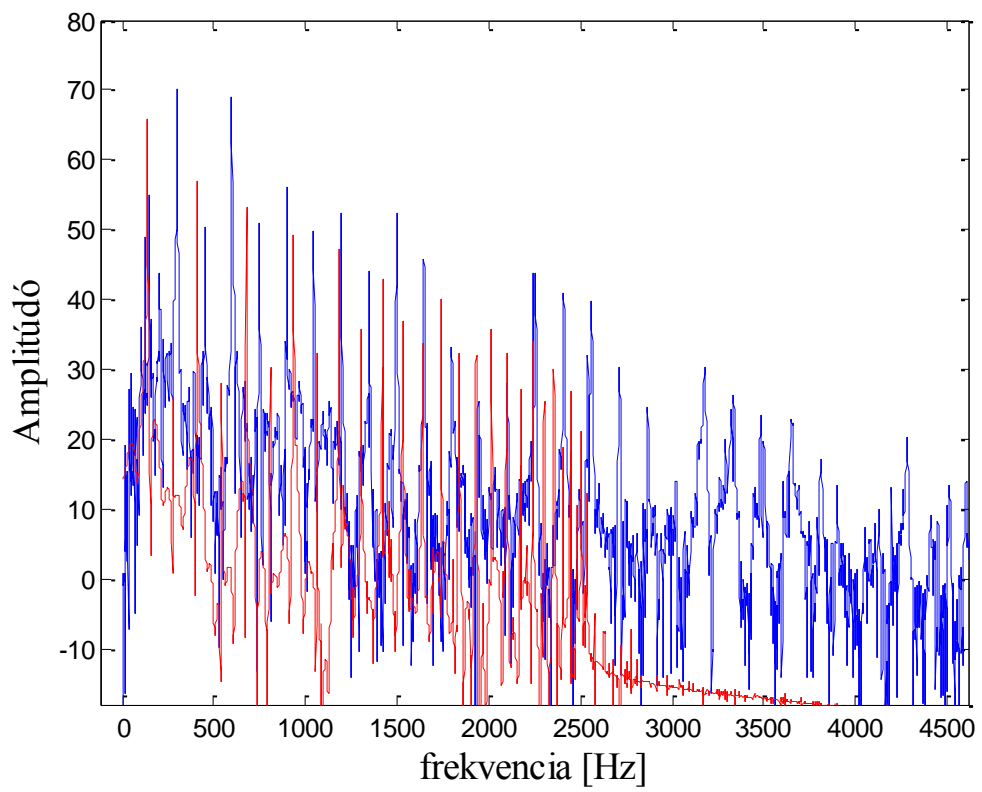
Nagy előnye a polinom regressziónak, hogy nincs nagy számításigénye és nem szükséges semmilyen nemlineáris approximáció. A becslést kétszer elég végig számolni, hogy pontos b_1 és b_3 együtthatókat kapjunk.



4.3 ábra: Lecsengési idők a E1 húron, az első (kék) és a második (piros) becslésben

A megbecsült értékeket együtt minden a rendelkezésre áll, hogy a húrmodellt szimulálni tudjam.

A 4.4-es ábrán egy D4 húr felvett minta és egy szintetizált minta spektruma látható. A lecsengési időket minél több harmonikusból számoljuk annál több fog ténylegesen úgy viselkedni ahogy az eredeti.



4.4 ábra: kék – felvett hang, piros – szintetizált hang spektruma

5 A test átvitele

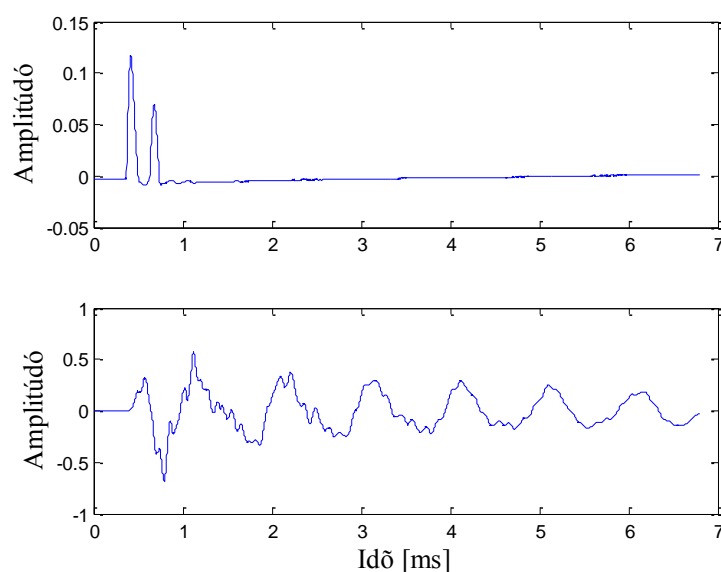
A gitártest a teljes modell utolsó tagja. A rezgésben lévő húr a testhez erősített két végén keresztül átadja a rezgést a test fájának, ami így megmozgatja a benne lévő levegőt. Felfoghatjuk a gitár testét egy szűrőként is. Gerjesztése a magában álló rögzített végű húr, válasza pedig a gitár hangja. Ennek a testnek, mint szűrőnek a modellezéséhez szükségünk van gerjesztés-válasz kapcsolatára.

5.1 Gerjesztés-válasz mérés

A test gerjesztését a húr végzi, viszont egy húron nehéz úgy mérést végezni, hogy nem gitártestre van kifesztve. Gondoskodni kéne arról, hogy a rögzítések mechanikai, geometriai tulajdonságai megegyezzenek a gitártestével és emellett ne erősítse, szűrje meg a húr hangját.

Ezért a gitár testét a hurok megpendítése nélkül hozzuk rezgésbe. Ezeket a méréseket erőmérő kalapáccsal végeztem. A kalapács kimenetként szolgáltat egy impulzust a fejen fellépő erővel arányosan. A rezgő húr is egy oszcilláló erő formájában gerjeszti a testet, így ez megfelelő analógia az átvitel megállapításához.

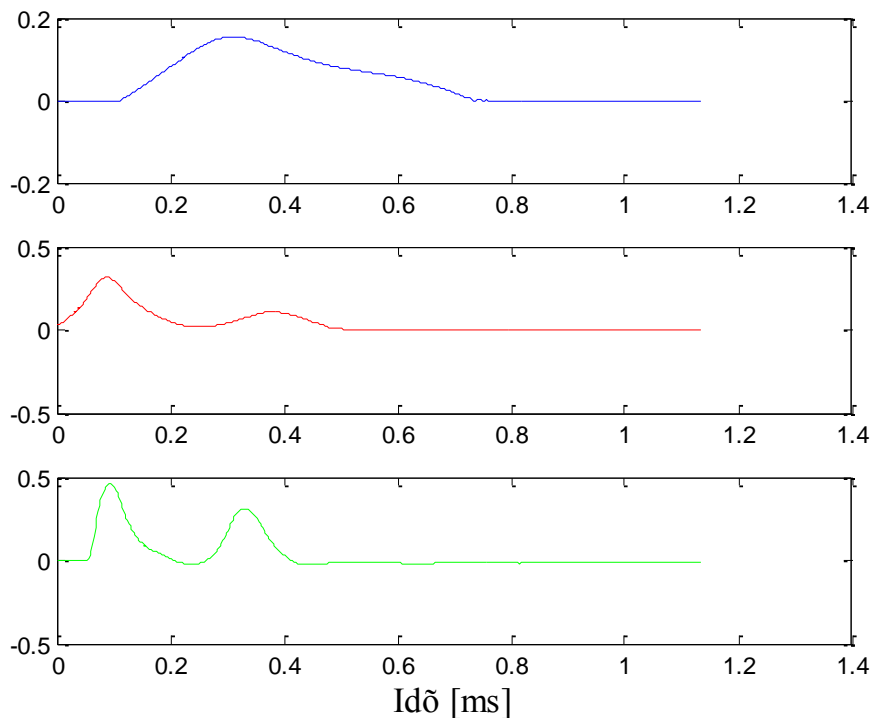
A kalapáccsal finom ütésekkel mértem a húrlábakra, ezzel megközelítve azt a hatást, mikor a húr ugyanezen pontján a testnek átadja rezgését. Ezek az ütések mozgásba hozták a testet, aminek a hangját mikrofonnal vettem fel. Ezt használtam válasz jelnek.



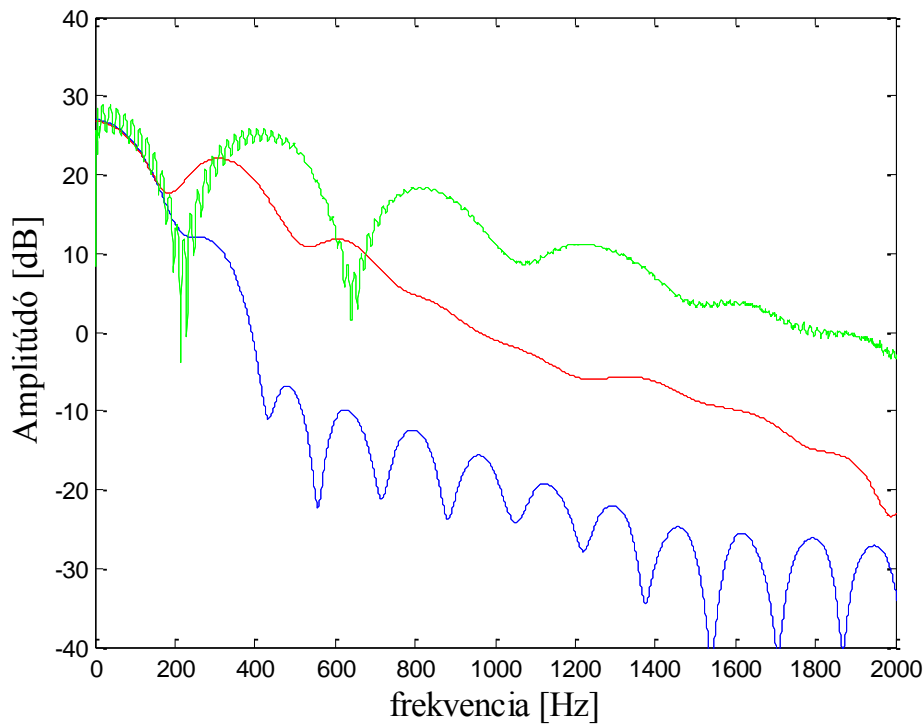
5.1 ábra: Kalapácsgerjesztés és testrezgés válasz

5.2 Feldolgozás

Könnyen előforduló hiba a mérésben, hogy egy-egy gerjesztés nem csak egy kalapács impulzusból állt. Ez a kézi pontatlanság és a test rugalmasságának köszönhető. Kiválogattam azokat a méréseket, amik csak egy impulzust tartalmaznak, avagy a második impulzus amplitúdója minimális az elsőhöz képest. Ez azért befolyásolja nagymértékben az eredményt mert a közel ideális kalapácsimpulzus spektruma egy meredek, gyorsan csökkenő $\sin(x)/x$ jellegű görbe. Ez annál jobban deformálódik minél több kis túske van a kalapács löketben. A következő ábrákon három különböző kalapácsimpulzust mutat. Látható, hogy jelentősen megváltoztatja a spektrum futását, ha nem csak egy impulzus van.



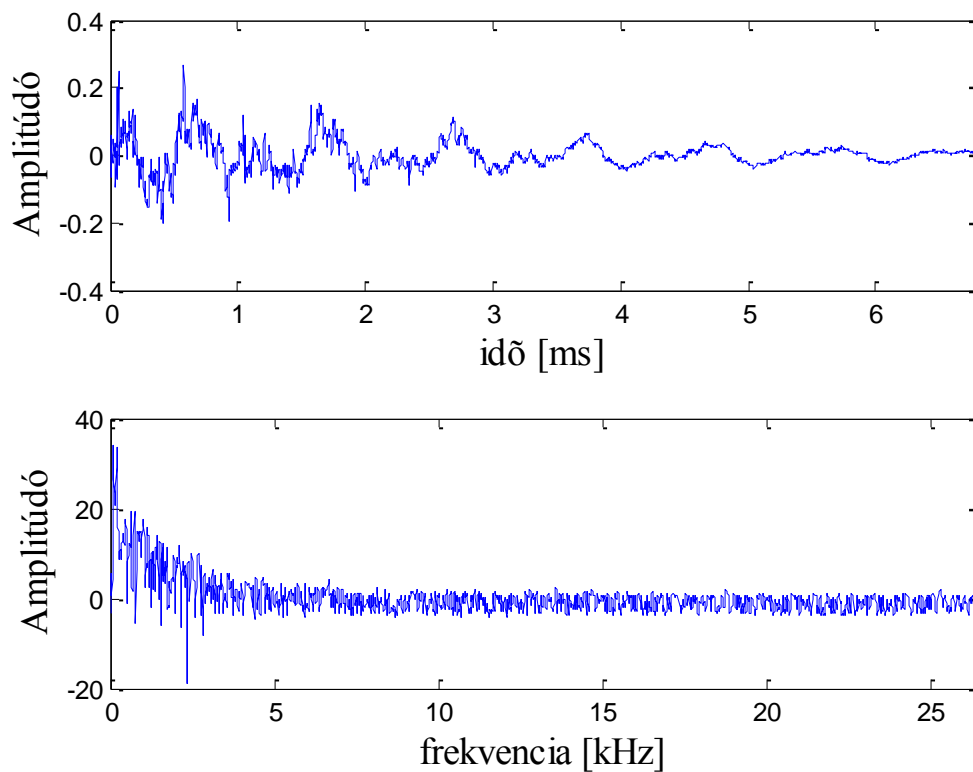
5.2 ábra: tökéletlen kalapácsimpulzusok



5.3 ábra: torzult spektrumok

A hat legjobb mérésből indultam ki. Ezeknek a felvételeknek a Fourier transzformáltját vettem. A frekvenciatartományban az átviteli karakterisztika a válasz és a gerjesztés hányadosa. A gerjesztésjelek spektrumait vizsgálva, mind a hat gerjesztést és választ is eltoltam egy offset értékkel. Ez azért volt szükséges mert a gerjesztés zajos, amivel a spektrum közepét és felső részét -60dB, és az átvitelt számolva így nagyon kicsit számokkal osztottam volna, ami egy fals erősítést helyezne az átviteli karakterisztikába.

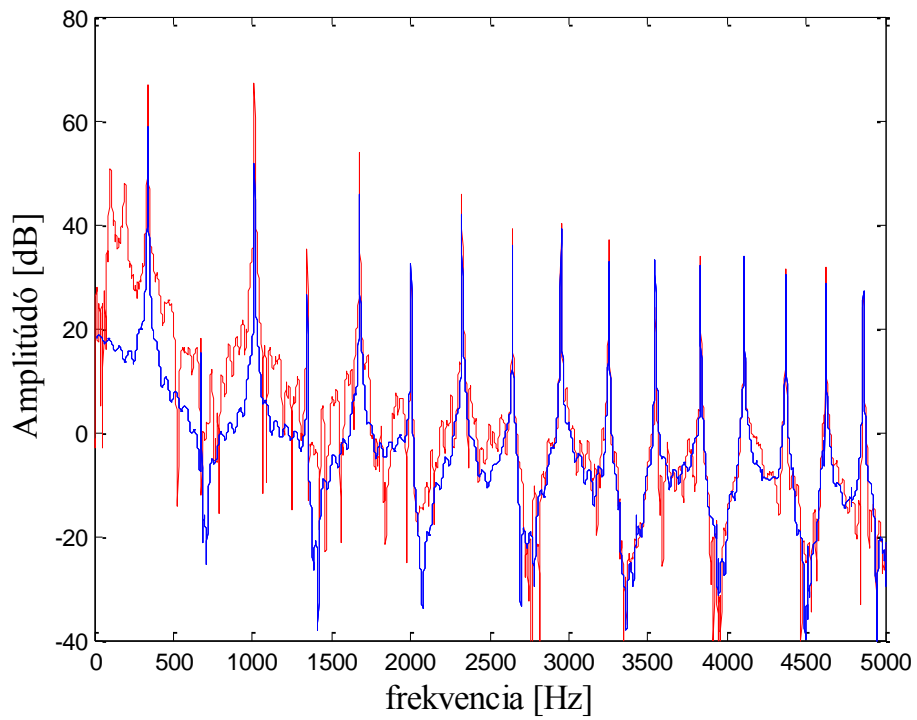
A skálázást követően a megfelelő párokból hányadost képezve, majd azokat átlagolva megkaptam az átvitel spektrumát. Ezt inverz Fourier transzformálva előállt az impulzusválasz.



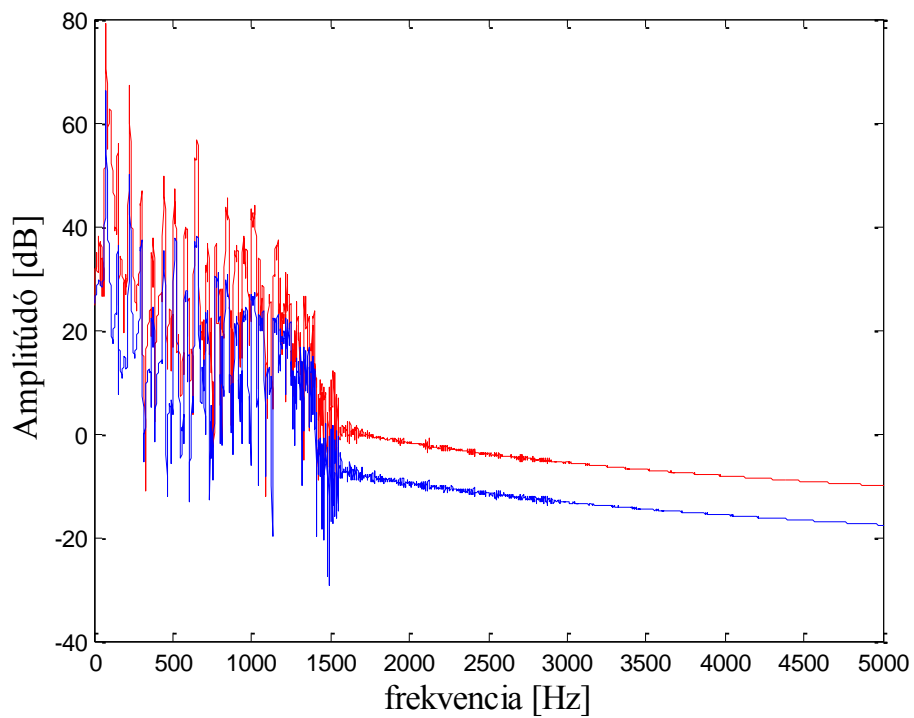
5.4 ábra: a gitártest impulzusválasza és átviteli karakterisztikája

Most már rendelkezésünkre áll a gitártest hatását leíró szűrő. A húrmodell futtatása után konvolválunk kell az impulzusválasszal és ezzel elvégeztük a szintézis összes lépését, amit a 3.1-es ábra megkívánt.

A következő ábrán a gitártesttel szűrt és nem szűrt spektrumokat ábrázolom. Ugyanúgy, mint a pengetett hangok spektrumában, itt is megjelenik az alapharmonikusnál mélyebb komponens, ami a pengetés kezdeti „csattanását” tartalmazza.



5.5 ábra: kék – E1 húr magában, piros – E1 húr szűrve a test átvitelével



5.6 ábra: kék – E6 húr magában, piros – E6 húr szűrve a test átvitelével

6 Paraméterezhetőség

Ebben a fejezetben összefoglalom a modell paraméterezésével kapcsolatos problémákat és lehetőségeket.

6.1 A húr alap paraméterei

Minden mérés 44.1 kHz-es mintavételi frekvenciával végeztem, vagyis a felvett mintáimban az időlépték 22.67 μ s. Ennek a időléptéknek a párja, (csakúgy, mint a hossz lépték és a húr tömegpontjainak száma), a szimuláció hossza, amit ésszerűen olyan nagyságúnak kell választani, hogy a hullám lecsengjen.

6.2 A veszteség és a diszperzió paraméterei

A rezgés harmonikusainak csillapításáért felelős együttható párokat a 4. fejezetben mért adatok alapján számoltam. Ezek minden húrnál azonos nagyságrendben helyezkednek el.

A diszperziót szabályzó tag együtthatója az alábbi kifejezés:

$$\frac{ES\kappa^2}{\mu}$$

κ – girációs sugár

E – Young modulus

S – keresztmetszet

μ – hosszegységnyi tömeg

A húrokat alkotó fémek esetében a Young modulus 100 GPa körül van, jó becslés mind a bronz, mind az acélhúrokra.

A girációs sugár az átmérő függvénye. Hengerek és csövek esetén az általános képlete:

$$\frac{\sqrt{D^2 - d^2}}{4}$$

Ahol a D külső, d a belső átmérő. Mivel a húr egy sima henger így ez a képlet redukálódik és a girációs sugár az átmérő negyede lesz.

A keresztmetszet csak az átmerőtől függ, míg a hosszegységnyi tömegnél megjelenik a sűrűség, mint egy újabb szabad változó. A leggyakoribb húroknál, acél, illetve réz ötvözetek esetén $8000-9000 \text{ kg/m}^3$.

6.3 A gerjesztés paraméterei

A pengető rugóállandóját egy konyhai mérleggel közelítettem meg. Egy vastagabb pengető, 15-20 N erő hatására hajlik meg egy milliméternyit. Ez az erő pedig már jóval nagyobb, mint amennyit a zenélés során keltünk a pengetőben. A pengető tömege kevesebb mint egy gramm, a pengető kéz tömegét nehezebb megállapítani, viszont nem is probléma. Pengetés közben a kezünket csupán elhanyagolható mértékben gyorsítja a rugóerő, ezért elég néhány nagyságrenddel nagyobb értéket adni neki, hogy F_{hand}/m_{hand} értéke ne legyen szignifikáns.

A pengető kezdősebessége körülbelül $0.5 - 1 \text{ m/s}$ körül van. Ennek változtatásával élesebbé, karcosabbá lehet tenni a hangot, hiszen egy meredekebb felfutást adunk ezzel a húr kitérésének.

Az utolsó paraméter a gerjesztéssel kapcsolatban az az erő, ami után a pengető lecsúszik a húrról. Ezzel lehet a legkönnyebben erősíteni a hangot, sőt nagyon könnyen akár torzítani is. A valódi gitárjátékban ez egy igen komplex mennyiség. Ha feltételezzük, hogy egy ember pontosan ugyanolyan szögben, ugyanolyan sebességgel penget, akkor van lehetőség a súrlódást mérni a műanyag pengető és az éppen pengetett húr felülete között. Ez húr és pengető kombinációnként más, a pengető érdesedik, kopik. Nagyon sok változó befolyásolja a súrlódási tényezőt. Emellett az emberi kéz szabadsága jelenti a legdominánsabb változót. Egy gitárjátékban folyton játszanak azzal a dinamikával, hogy milyen szögben állítják a pengető hegyét, mennyire párhuzamos a mozdulat a húrok síkjával.

6.4 Paraméter tábla

	T [N]	d [m]	b1	b3
E1	76	0.000254	1.5504	-1.5128e-009
H2	69	0.000406	0.6375	-1.7839e-009
G3	75	0.0006096	0.9901	-5.5748e-010
D4	83	0.0006604	0.1329	8.9351e-010
A5	88	0.0010668	0.5621	1.0502e-008
E6	79	0.0013462	0.8575	1.8983e-008

7 Összefoglalás

A munkám során megalkotott gitármodell három részegységből áll, a gerjesztés, a húr és a test. A gerjesztés és húr kapcsolata kétirányú, attól a pillanattól kezdve, hogy fizikálisan érintkeznek mindaddig, amíg a húr le nem csúszik a pengetőről. Ezzel párhuzamosan a húr hat a testre, onnantól, hogy a húr feszítettsége kitér a nyugalmi értékéből, egészen addig, amíg a veszteségek miatt a rezgés abbamarad.

7.1 Eredmények

A megfelelő paraméterek becslése és mérése után a véges differencia módszerrel diskretizált hullámegyenlet segítségével modellezem az akusztikus gitár húrját, a gitár testét és a pengetett gerjesztés működését.

Az így elképzelt modellt Matlabban valósítottam meg olyan függvények megírásával, amelyek a gitáron erőmérő kalapáccsal és pengetővel végzett méréseket dolgozzák fel és használják fel a hullámegyenlet szimulációjához. Ez a szimuláció paraméterezzhető a húr anyagával, geometriai méreteivel, a pengető rugalmasságával és a pengetés erősségével. A különböző felharmonikusokhoz tartozó lecsengési időket meghatározó veszteségi paramétereket a pengetett mérések analízisével határoztam meg. Az így kapott hullámot egy vektorba mentve, azon szűrőként alkalmaztam azt az átviteli függvényt, amit az erőmérő kalapáccsal mért gerjesztés-válasz mintákból számoltam. Ez Matlabban visszajátszható, vagy wav formátumban eltárolható egy külső fájlba.

7.2 Továbbfejlesztési lehetőségek

7.2.1 A húr fizikai paraméterei

A húr jellemző fizikai paraméterek mennyisége és implementációja még rejt néhány lehetőséget a modell pontosításához. Az húr anyagának sűrűsége ötvözetenként változik. Az acélhúr vagy a réz-cink ötvözet a leggyakoribb. A gitár három mélyebb húrja (E6, A5, D4) viszont más technológiával készült, így ezeknél nem elég ismerni egy sűrűséget és a henger

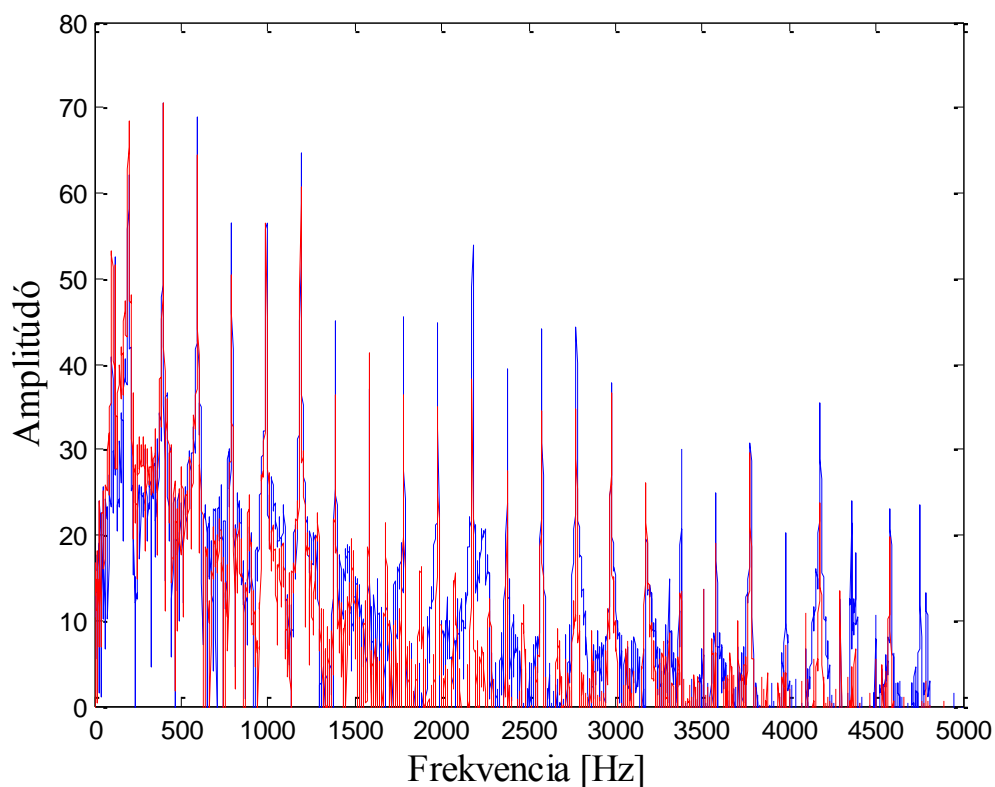
térfogatát. A belső szátra van feltekerceselve egy másik fém, így erre az elrendezésre már nem használhatjuk az egyszerű térfogategyenletet.

7.2.2 A húr dinamikája

A rögzített húrvégek leírása nem teljesen helytálló, hiszen sem a nyeregnél, sem a hídnál nincs végtelenül merev rögzítés, ezért a szélső pontok kitérése valamivel nagyobb lesz, mint nulla. Egy lefogott hang egy üres húr hangjához képest tompább, hiszen a kezünkkel biztosan egy puhább, több energiát diszipáló lezárást adunk a húrnak, így a magasabb frekvenciájú komponensek hamarabb lecsengenek. Ennek a hatását lehet egyrészt a csillapítási tényezőkben figyelembe venni, avagy differenciaegyenletben határfeltételként definiálni. Az utóbbi módszer szerint közelebb áll a fizikai modellezés elvéhez, így jobban szétválasztható, hogy melyik hatást melyik tényező befolyásolja.

7.2.3 A pengetés eszköze

A pengetős és az ujjal történő pengetés között sok különbség van. Egyrészt a játéktechnikai szempontból, összhangzatok megszólaltatásában. Sokkal fontosabb a szintézis szempontjából, hogy akár csak a húr végpontjainál, itt is ráhatással van a spektrumra a rugalmasság és a keménység. Pengetővel sokkal élesebbek a hangok és hangosabbak is. A következő ábrán a G4-es húr üresen megpendített spektruma látható. A kék színű a pengetővel, a piros színű az ujjbeggyel pendített hang.



7.1 ábra: pengetős és ujj pengetés különbsége

A frekvenciakomponensek túlnyomó részében a pengetett hangban az erősebbek. Ezt egyértelműen hallani is lehet.

A pengetők vastagsága, súrlódási együtthatója, rugóállandója mind szerepet játszik a gerjesztésben. Ezek pontos mérése segítséget jelenthet egy precízebb modell készítésében.

7.2.4 A húrok csatolása

A 3. fejezet elején szó esett arról, hogy a húrmodell és a testmodell közötti kapcsolat is két irányú. A rezgő test nagyon kis amplitúdóval, de gerjeszti a többi húrt is. Innentől kezdve a hallható hangban, igaz nem olyan feltűnő mértékben, de a több húr rezgése szuperponálódik, így lesznek erősítési és kioltási helyek a hanghullámban. A hullámok interferenciájára érdekes példa, amikor az üveghangos hangolást végezve, a két húr közötti frekvenciakülönbség lebegéshez vezet.

8 Irodalomjegyzék

Cahill, T. (1897). Telharmonium

<https://en.wikipedia.org/wiki/Telharmonium>

Chowning, J. (1973). The Synthesis of Complex Audio Spectra by Means of Frequency Modulation, *Computer Music Journal*, Vol. 1., No. 2., April 1977, PP. 46-54

http://people.ece.cornell.edu/land/courses/ece4760/Math/GCC644/FM_synth/Chowning.pdf

Csaba (2002). Elektromos gitár hangjának valós idejű szintézise

Budapest University of Technology and Economics, 2002

<http://dsp.mit.bme.hu/userfiles/diploma/csabadiploma02.pdf>

Bank, B. (2006). Physics-based Sound Synthesis of String Instruments Including

Geometric Nonlinearities, *Ph.D. thesis, Budapest University of Technology and Economics, 2006*

<http://home.mit.bme.hu/~bank/phd/phd.pdf>

Bilbao, S. (2006). Modal Synthesis

<https://ccrma.stanford.edu/~bilbao/booktop/node14.html>

Buchanan, J. (2011). Subtractive synths explained

Resident Advisor Ltd., Wed, 29 Jun 2011

<https://www.residentadvisor.net/features/1351>

Garamvölgyi, Zs. (2006) Dobhang fizikai alapú szintézise

TDK Dolgozat, Budapest University of Technology and Economics

Hoffman, J.D. (1992) Numerical methods for engineers and scientists

Department of Mechanical Engineering Purdue University

<https://epiportal.com/Ebooks/Numerical%20Methods%20for%20Engineers%20and%20Scientists.pdf>

Roads, C. (1979). A Tutorial on Non-Linear Distortion or Waveshaping Synthesis
Computer Music Journal Vol. 3, No. 2 (Jun., 1979), pp. 29-34

Smith, J. (1983). Techniques for Digital Filter Design and System Identification with
Application to the Violin, *PhD thesis, Stanford University, California, USA, 1983*
<https://ccrma.stanford.edu/files/papers/stanm14.pdf>

Smith, J. (2016) Physical Audio Signal Processing
Center for Computer Research in Music and Acoustics (CCRMA), Stanford University
https://ccrma.stanford.edu/~jos/pasp/Additive_Synthesis.html