

Periodikus zavarhatások csökkentésének aktív módszerei

Ph.D. értekezés

Sujbert László
okleveles villamosmérnök

Témavezetők:
dr. Nagy Ferenc,
Dr. Péceli Gábor, a műszaki tudomány doktora

Budapesti Műszaki Egyetem
Műszer- és Méréstechnika Tanszék
1997.

Tartalomjegyzék

1	Előszó	3
2	Bevezetés	5
2.1	Az aktív zajelnyomás alapfeladata	5
2.2	Aktív zajelnyomó eljárások	7
2.2.1	Visszacsatolt (feedback) struktúra [5],[4]	8
2.2.2	Előreccsatolt (feedforward) struktúra [5],[4]	8
2.2.3	Adaptáció LMS algoritmussal [4],[7]	9
2.3	Periodikus zaj elnyomása	12
2.4	Rezonátoros alapstruktúra	14
2.5	Adaptív Fourier-analízis	19
3	Jelmodell alapú zajelnyomó rendszerek tervezése és vizsgálata	23
3.1	Bevezetés	23
3.2	Egycsatornás rendszer tervezése	25
3.2.1	Stabilitás	25
3.2.2	A paraméterek megválasztása	29
3.2.3	Konvergenciasebesség	33
3.3	Többcsatornás rendszer tervezése	35
3.3.1	Stabilitás	35
3.3.2	A paraméterek megválasztása, konvergenciasebesség	37
3.3.3	Az állandósult állapot jellemzése	38
3.4	A konvergenciasebesség növelése	39
3.5	A tervezés gyakorlati kérdései	44
3.5.1	Az átviteli függvény mérése és mintáinak felhasználása	45
3.5.2	A konvergenciaparaméter megválasztása	47
3.6	A modellezési hibák hatása	50
3.6.1	A jelmodell hibáinak hatása	50
3.6.2	A szakasz modellezési hibáinak hatása	51
3.7	Frekvenciaadaptálási lehetőségek	51
4	Az adaptív szűrős és a jelmodell alapú megközelítés kapcsolatrendsze- re	53
4.1	A rezonátoros alapstruktúra és az LMS algoritmus kapcsolata	53
4.2	Rezonátoros reprezentáció	56
4.3	Zajelnyomó rendszerek összevetése	58
4.3.1	Egycsatornás rendszerek	59
4.3.2	Többcsatornás rendszerek	60
4.3.3	Dualitás	61

5 Szimulációk	63
5.1 A szimulációs környezet	63
5.2 Példák	64
5.2.1 A jelmodell alapú zajelnyomó rendszerek jellemző időfüggvényei . .	64
5.2.2 A maximális abszolútértékű sajátértékek vizsgálata	66
5.2.3 Az XLMS algoritmus alkalmazása	70
5.2.4 Zajelnyomó rendszerek összehasonlítása	70
5.2.5 A konvergenciaparaméter meghatározása	73
6 Kísérleti eredmények	75
6.1 Aktív zajcsökkentés egycsatornás akusztikus rendszerben	75
6.2 Aktív zajcsökkentés többcsatornás akusztikus rendszerben	79
6.3 Villamos hálózat torzításának aktív csökkentése	80
7 Összefoglalás, kitekintés	83
A Lineáris rendszerek sebessége	89
B Jelölésjegyzék	92

1. fejezet

Előszó

A különféle zajok, zavarhatások kiszűrése, csökkentése a mérés technika klasszikus feladatai közé tartozik. Az utóbbi évtizedekben egyre nagyobb a jelentősége azoknak az eljárásoknak, amelyek ezt a feladatot ellenkező előjelű zaj hozzáadásával oldják meg: az ilyen módon megvalósuló zajcsökkentést aktív zajcsökkentésnek vagy aktív zajelnyomásnak nevezzük. Amennyiben a zajjal terhelt jel közvetlenül hozzáférhető, a feladat viszonylag egyszerűen megoldható. (Ilyen feladat pl. az EKG jelre szuperponálódó 50 Hz-es zavarjel kiszűrése.) A jellegzetesen több-bemenetű – többkimenetű (többcsatornás) zajelnyomó rendszerek a beavatkozó jel generálásához magát a zajjal terhelt jelet, egy, a zajjal korrelált ún. referenciajelet, valamint a zaj hozzáadása után kapott jelet használják, illetve használhatják fel. Ennek a feladatnak a megoldása az adaptív szűrés egyik első alkalmazási területe. A zajelnyomási feladatok egy jelentős részében azonban a zaj hozzáadása nem tehető meg közvetlenül, hanem valamilyen fizikai rendszerbe kell beavatkozni. Ennek a feladatnak jellemző és fontos példája az akusztikus zajok aktív elnyomása. Ebben az esetben az aktív zajelnyomás azt jelenti, hogy olyan hanghullámokat kell kelteni, amelyek az elnyomandó zajjal interferálva, azokat kioltják. Azokon a helyeken, ahol kioltást akarunk elérni, mikrofonokat kell elhelyezni, a beavatkozás pedig hangszórókkal történik. A referenciajelet szintén mikrofonok, vagy egyéb érzékelők szolgáltatják. A zajelnyomó eljárás igényli az adott fizikai rendszer valamilyen szintű identifikációját, és az identifikáció eredménye (a fizikai rendszer modellje) beépül a zajelnyomó eljárásba. Ez utóbbi követelmény miatt ezek a zajelnyomó rendszerek lényegesen bonyolultabbak, és szélesebb körű alkalmazásukra csak a digitális jelfeldolgozó processzorok megjelenésével, illetve elterjedésével, az utóbbi egy-másfél évtizedben került sor. A feladat megoldására egyebek mellett a problémának megfelelően továbbfejlesztett adaptív eljárásokat eredményesen használják.

Dolgozatom célja ez utóbbi feladat megoldása abban a speciális esetben, amikor az elnyomandó zaj periodikus. Az általánosan használt zajelnyomó rendszerek ebben az esetben periodikus referenciajelet használnak, de a zajelnyomó rendszer struktúrája megegyezik a szélessávú zajok esetében alkalmazottal. Tanszékünkön az utóbbi években több olyan mérési eljárás kifejlesztésére került sor, amely speciálisan periodikus jelek feldolgozására alkalmas. Ezen eljárások közös jellemzője, hogy feltételeznek egy, a mérendő jelet generáló rendszert (ún. koncepcionális jelmodellt). A mérési eljárás ezek után az adott jelmodellhez tervezett megfigyelő működtetése. Ennek a mérési eljárásnak az előnyei egyrészt a megfigyelőben lévő visszacsatolás révén megvalósuló igen pontos jelrekonstrukcióhoz, másrészt a sok esetben igen egyszerű struktúrához kapcsolódó számítási nyereséghez kötődnek. Tapasztalataink birtokában feltételezhető volt, hogy periodikus zavarhatások csökkentésére a periodikus jelmodell alapú struktúra az általános struktúráknál előnyösebben alkalmazható.

Dolgozatom motivációját az akusztikus zajelnyomási feladat adta, ennek megfele-

lően a téma tárgyalása során erre gyakran hivatkozom. Zajelnyomó berendezések tervezése akusztikus környezetben nem egyszerű feladat, interdiszciplináris felkészültséget igényel, és a feladat megoldásával általában egy-egy mérnökcsoport foglalkozik. Tanszékünk kutatási tevékenységéből az akusztikus rendszerek tervezése, vizsgálata szinte teljesen hiányzik, így a dolgozat az aktív zajelnyomó rendszerek akusztikus kérdéseivel nem foglalkozik. Az értekezésben előforduló akusztikus rendszerekre vonatkozó utalások az eddigiekben elvégzett kísérletekből származó, jelfeldolgozási szempontból releváns megállapítások. Az akusztikus alkalmazás hangsúlyos volta ellenére az ismertető új eljárás minden olyan esetben alkalmazható, ahol a zavarhatás periodikus, és a beavatkozásra csak valamilyen fizikai rendszeren keresztül nyílik lehetőség.

A disszertáció a következőképpen tagolódik:

A második, Bevezetés című fejezetben megfogalmazom az aktív zajelnyomás alapfeladatát, továbbá összefoglalom a téma előzményeit, illetve azokat az elméleti eredményeket, amelyekre a dolgozat további részében támaszkodom. Ez az összefoglalás alapvetően két témakört érint: az adaptív szűrést és alkalmazását aktív zajelnyomásra, valamint a rezonátoros alapstruktúra bemutatását.

A harmadik fejezet szól a jelmodell alapú zajelnyomó rendszerek tervezéséről, annak elméleti és gyakorlati kérdéseiről egyaránt. Vizsgálataim a jelmodell alapú zajelnyomó rendszer konvergenciaviszonyainak feltárását, illetve a több érzékelőt és több beavatkozót tartalmazó rendszerekben releváns maradó hiba meghatározását célozták.

A negyedik fejezetben összehasonlítom az általam javasolt megoldást a legelterjedtebben alkalmazott, adaptív szűrésen alapuló módszerrel, oly módon, hogy megadom a kétféle struktúrát összekapcsoló elméleti összefüggéseket.

Az elméleti eredményeket a ötödik és az hatodik fejezetben szimulációs példák, illetve kísérleti eredmények bemutatásával illusztrálom.

A dolgozat szerkesztése során igyekeztem egységes jelöléseket alkalmazni. Sajnos, ehhez helyenként az irodalomban megszokottól eltérő jelöléseket kellett bevezetni. Kritikus esetekben igyekeztem ezeket a szöveges részben egyértelművé tenni. A skalárokat, vektorokat és mátrixokat rendre kurzív kisbetűkkel, álló félkövér kisbetűkkel, illetve álló félkövér nagybetűkkel jelöltem. Adott időtartománybeli jelet kisbetűvel, transzformáltját nagybetűvel jelöltem. Amennyiben az időtartománybeli jel vektor volt, transzformáltjának jelölése ütközik a mátrix jelölésével. Szükség esetén a jelölést szövegesen tettem egyértelművé.

E helyen szeretnék köszönetet mondani mindazoknak, akik kutatómunkámban, vagy a disszertáció elkészítésében segítségemre voltak.

Mindenekelőtt Dr. Péceli Gábornak, akivel tanszékvezetői és más egyetemi teendői ellenére hosszas konzultációkat folytathattam, első kézből ismerve meg a jelmodell alapú jelfeldolgozás fortélyait. Külön köszönet illeti az értekezés gyors és alapos átolvasásáért.

Ugyancsak köszönetet mondok dr. Nagy Ferencnek, korábbi témavezetőmnek. Igényes munkamódszere, kritikai készsége meghatározó volt tudományos szemléletem kialakulásában.

Köszönetemet fejezem ki dr. Horváth Gábornak, tanszéki munkám háttérének biztosításáért.

Köszönet illeti a delfti Alkalmazott Fizikai Intézet (TNO Institute of Applied Physics) aktív zajcsökkentéssel foglalkozó csoportját a kísérletek lehetővé tételéért, valamint dr. Papp Zoltánt az együttműködés koordinálásáért. Itt köszönöm meg Dunay Rezsőnek a kísérletekhez nyújtott értékes segítségét.

Köszönöm Csertán Györgynek és dr. Naszádos Lászlónak a dolgozat szerkesztésében való közreműködésüket.

Végül szeretném megköszönni a disszertáció első opponenseinek: dr. Kollár Istvánnak és dr. Augusztinovicz Fülöpnek értékes kritikai megjegyzéseiket.

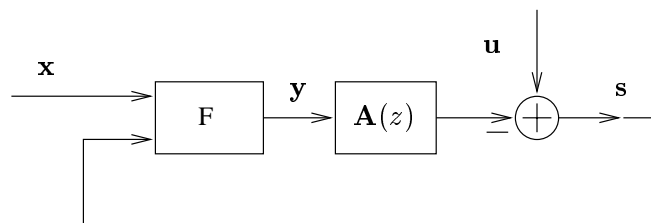
2. fejezet

Bevezetés

2.1 Az aktív zajelnyomás alapfeladata

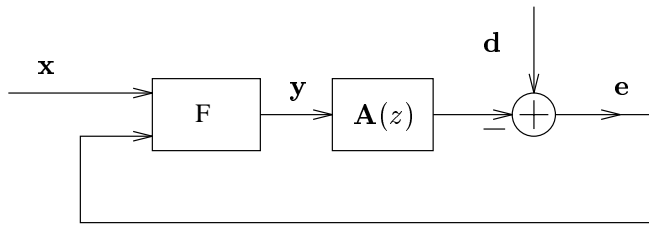
Dolgozatomban olyan rendszerekkel foglalkozom, amelyek zajok vagy zavarhatások aktív elnyomására szolgálnak, azaz a zaj csökkentését, illetve elnyomását ellenkező előjelű zaj hozzáadásával oldják meg. Ez a hozzáadás az Előszóban említett akusztikus zajok esetében, és sok más esetben is nem a szokásos módon (elektronikus formában, vagy a diszkrét jelhez történő egyszerű hozzáadással) valósul meg, hanem valamilyen fizikai kölcsönhatás révén: pl. a hanghullámok interferenciájaként. A szükséges jelfeldolgozó eljárások bonyolultsága miatt a feladat megoldására általában jelfeldolgozó processzorokat alkalmaznak. Ennek megfelelően a zajelnyomó rendszerek digitális (diszkrét) rendszerek, amelyek az analóg "külvilághoz" jelátalakítókkal (mikrofon, hangszóró), illetve analóg-digitális és digitális-analóg átalakítókkal kapcsolódnak. A teljes rendszer leírásához és vizsgálatához az analóg részrendszert is diszkrét modellel írják le. Ez a modellezés nem hibamentes, a gyakorlati alkalmazásokban azonban ez a hiba nem kritikus. A fizikai rendszerek gyakran tartalmaznak nemlinearitásokat, de pl. az akusztikus rendszerek viszonylag széles tartományban lineárisnak tekinthetők. Feltételezhető továbbá, hogy a zajelnyomó rendszer részét képező fizikai rendszer működés közben csak kevésbé változik meg, így az a továbbiakban lineáris invariáns diszkrét idejű rendszernek tekinthető. Másként fogalmazva, az analóg rendszer megváltozása, a diszkrét reprezentáció hibája, valamint a nemlinearitások elhanyagolhatóak. Ezeknek a modellezési hibáknak az elhanyagolása az irodalom áttekintése és gyakorlati tapasztalatok alapján jogosnak tekinthető, mindazonáltal a 3.6 alfejezetben ezek elemzésére is kitérek.

Az aktív zajelnyomás alapfeladatának megfogalmazásához tekintsük az 2.1. ábrát. Az ábrán szereplő jelek az általánosságot szem előtt tartva komplex vektorok, dimen-



2.1. ábra. Aktív zajelnyomó rendszer

ziójuk a különbségképzés adta kényszertől eltekintve tetszőleges lehet. Bár a fizikai rendszerekben általában és különösen az akusztikus rendszerekben a különbségképzés helyett összegzés szerepel, az ábrán jelölt különbségképzés nem tekinthető az általánosság megszorításának, hiszen minden további nélkül megtehető, hogy a kimeneten -1 -gyel



2.2. ábra. Az aktív zajelnyomás alapfeladata

szorozzunk, a különbségképző viszont a hasonló blokkvázlatokban szokásos elem.

Az alábbiakban az egyes jelek, illetve blokkok áttekintése következik:

- $\mathbf{x}_n \in \mathbf{C}^K$ referencijel, amely az elnyomandó jellel kapcsolatos információt hordoz, és a zajelnyomó struktúra felhasználhatja (de nem használja fel feltétlenül);
- $\mathbf{u}_n \in \mathbf{C}^L$ az elnyomandó vagy elnyomandó komponenset tartalmazó jel, amelyet a későbbiek során az egyes struktúrák bemenőjeleként vagy gerjesztéseként fogunk tekinteni;
- $\mathbf{y}_n \in \mathbf{C}^M$ a zajelnyomó struktúra kimenőjele;
- $\mathbf{A}(z) \in \left[\frac{N(z)}{D(z)}\right]^{L \times M}$ átviteli függvény mátrix, amelynek minden eleme a fentiekkel összhangban z -ben racionális törtfüggvény;
- $\mathbf{s}_n = \mathbf{u}_n - \mathbf{A}(z)\mathbf{y}_n$ különbségi jel;
- "F" jelöli magát a zajelnyomó struktúrát.

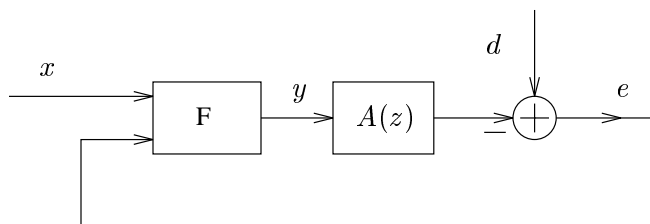
A továbbiak szempontjából célszerű az $\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_{1,n} + \mathbf{u}_{2,n}$ felbontást tekinteni. A gyakorlati feladatok egy részében ugyanis csupán a jel egy komponensét (pl. $\mathbf{u}_{1,n}$) kell kiszűrni, a másikat pedig változatlanul kell hagyni. Ez a dolgot csak az $\mathbf{u}_{1,n}$ jel elnyomásának problémájával foglalkozik, $\mathbf{u}_{2,n}$ megtartásával nem. Megjegyzendő azonban, hogy ez utóbbi feladat a legtöbb esetben \mathbf{x}_n megfelelő megválasztásával jól megoldható. Pl. a periodikus zajok elnyomása periodikus referencijelelet feltételezve nem zavarja a védett térben tartózkodók beszélgetését. A továbbiakban a zajelnyomó struktúra bemenőjeleként új jelöléssel a $\mathbf{d}_n = \mathbf{u}_{1,n}$ jelet tekintjük, az $\mathbf{e}_n = \mathbf{u}_{1,n} - \mathbf{A}(z)\mathbf{y}_n$ különbségi jel komponenset pedig hibajelnek nevezzük. A zajelnyomó eljárás célja az, hogy a hibát adott költségfüggvény mellett minimalizálja. Pl. a legtöbb esetben cél az, hogy a hiba négyzetes normájának várható értéke minimális legyen.

Mindezek után az aktív zajelnyomás alapfeladata a 2.2. ábra segítségével a következőképpen fogalmazható meg:

- minimalizálandó $\mathcal{C}(\mathbf{e}_n)$, adott $\mathbf{A}(z)$, \mathbf{x}_n és \mathbf{d}_n mellett.

ahol $\mathcal{C}(\cdot)$ jelenti a költségfüggvényt. A 2.2. ábrán látható rendszer szabályozási körként viselkedik, így a fentiekben vázolt alapfeladat megoldása ekvivalens a megfelelő struktúra kiválasztásával és a hozzá tartozó paraméterkészlet megtervezésével. Minthogy a zajelnyomó rendszerekkel kapcsolatban általános elvárás az, hogy a bemenőjelek egy széles osztályára ugyanaz a struktúra alkalmazható legyen, a feladat két részre bontható:

- keresett olyan struktúra, amely adott költségfüggvény mellett, referencijelének és belső paramétereinek megfelelő megválasztásával alkalmas a hiba minimalizálására;
- $\mathbf{A}(z)$ és a bemenőjelek alapján megtervezendők a struktúra paraméterei.



2.3. ábra. Egycsatornás zajelnyomó rendszer

A megtervezett zajelnyomó eljárást (a kiválasztott struktúrát és a hozzá tartozó paraméterkészletet) értékelni kell a teljes zajelnyomó rendszer stabilitása, tranziens jellemzői (sebesség, túllövés), valamint maradó hibája szempontjából. A maradó hiba még periodikus bemenőjelek esetén sem feltétlenül zérus. Ha ugyanis a fenti jelölésekkel $M < L$, a beavatkozó jel dimenziója kisebb, mint a bemenőjel dimenziója, tehát az elnyomáshoz szükséges jelvektort csak közelíteni tudja.

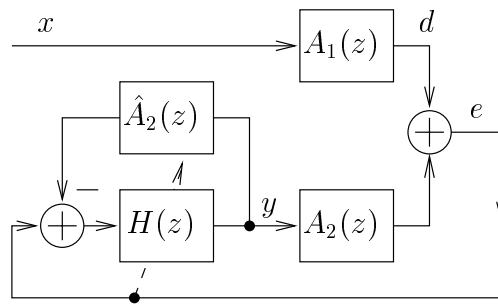
A fenti alapfeladat megfogalmazásakor többdimenziós jeleket feltételeztünk, ami más megfogalmazásban többcsatornás zajelnyomást jelent. Egy-egy többcsatornás rendszer jellemzői azonban egycsatornás rendszeren is bemutatathatók, és az egydimenziós jelek miatt a feladat áttekinthetőbb. Ezért a következő fejezetekben egy-egy eljárás kapcsán először egycsatornás rendszerekről lesz szó, a többcsatornás rendszerek pedig ezek továbbfejlesztéseiként adódnak. A vonatkozó egycsatornás feladat a 2.3. ábrán látható.

2.2 Aktív zajelnyomó eljárások

A következőkben röviden áttekintem az előző alfejezetben felvetett alapprobléma fontosabb megoldásait. Az elmúlt évek során számos megoldás született, amelyek sokszor a probléma megközelítésében is különböznek. Az egyes megoldások egységes áttekintése megtalálható pl. az [1] dolgozatban. Az [1], [2], [3], [5] irodalmak áttekintése alapján a következők állapíthatók meg:

Az aktív zajelnyomás alapfeladata mind szabályozástechnikai, mind jelfeldolgozási szemlélettel megközelíthető. Az előző fejezet felvezetése alapján elsősorban az előbbi nyilvánvaló, hiszen a bemutatott alapfeladat (2.2.ábra) egy szabályozási feladat, tehát a zajelnyomó struktúra kiválasztása és paramétereinek megválasztása valójában egy szabályozó tervezését jelenti. Ez a megoldás szempontjából olyan utat jelentene, hogy a szakasz (tehát $\mathbf{A}(z)$) ismeretében kell előírt tulajdonságú szabályozót tervezni. Ez a megközelítés elsősorban olyan mechanikai rendszerek esetén eredményes, amelyek nem túl magas fokszámúak, vagy redukált fokszámú modellel is kielégítően leírhatók. A “nem túl magas” azt jelenti, hogy számítási kapacitás és számábrázolási pontosság szempontjából nem merülnek fel problémák. Akusztikus rendszerek esetében azonban ez a megközelítés nem szokásos. Az akusztikus átviteli függvények magas fokszámúak (néhányszor tíz, esetleg száz), nem minimálfázisúak, és nincsenek domináns pólusok vagy zérusok. Ezeknek a feladatoknak a megoldására adaptív rendszereket: adaptív szabályozókat/szűrőket használnak. Az adaptív rendszerek sokszor hasznos sajátossága, hogy a szakasról általában kevesebb információt igényelnek, mint a fent említett szabályozások (pl. a strukturális információt hordozó állapotváltozós leírás helyett csak az átviteli függvényt), de természetesen a sikeres (stabil) szabályozás érdekében az adaptív rendszerekbe is beépül $\mathbf{A}(z)$ modellje.

Az aktív zajelnyomás témaköre mind a szabályozástechnikai, mind pedig a jelfeldolgozási szakirodalomban megtalálható. Periodikus bemenőjelek esetén a felkínált módszerek nem állnak messze egymástól. Dolgozatomban az aktív zajelnyomás feladatát a



2.4. ábra. Visszacatolt (feedback) struktúra

fentiekkel is összhangban jelfeldolgozási szemlélettel tárgyalom.

A következőkben az adaptív szűrővel felépített zajelnyomó rendszereket mutatom be egysátonás esetben [4],[5]. Az [5] irodalom a témakör átfogó összefoglalását adja: szerkesztéséből adódóan mind bevezető jellegű, mind pedig igényes szakmai információkat közölve. Az alábbi összefoglaló erre támaszkodik. A cikkhez bőséges irodalomjegyzék tartozik, megemlítve a szerzők ma már általánosan hivatkozott aktív zajcsökkentéssel foglalkozó könyvét is [6].

2.2.1 Visszacatolt (feedback) struktúra [5],[4]

A visszacsatolt struktúra blokkvázlata a 2.4. ábrán látható. Az ábrán $A_2(z)$ -vel jelölt átviteli függvény felel meg az eddigi $A(z)$ -nek. Ez a jelölés ennek az átviteli függvénynek a szakirodalomban szokásos “secondary path” elnevezésével indokolható. A visszacsatolt struktúra jellegzetessége, hogy nem használja fel az x referenciajelet. A d bemenőjel az x referenciajel $A_1(z)$ -vel (primary path) szűrt változata. $\hat{A}_2(z)$ $A_2(z)$ modellje, amelyet még a zajelnyomás működtetése előtt kell identifikálni. $H(z)$ adaptív szűrő, amelynek együtthatóit az LMS algoritmus valamely változatával adaptálják. Struktúráját tekintve $H(z)$ általában nemrekurzív szűrő, bár, adaptálásuk ismert nehézségei ellenére [4], rekurzív szűrőket is alkalmaznak.

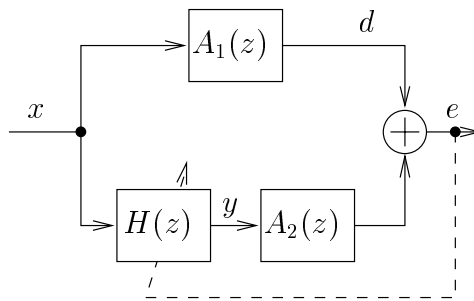
Kezdetben $A_2(z)$ -t nem kompenzálták, azaz $\hat{A}_2(z) \equiv 0$ volt. Ezt a megoldást stabilitási okokból csak ott alkalmazhatták, ahol a beavatkozó és a különbségképző közötti fázistolás legalább egy adott frekvenciatartományban kicsi volt. Akusztikus rendszerekben ez azt jelenti, hogy a beavatkozó hangszórónak a hibamikrofonhoz közel kellett lennie (pl. fülvédő), hogy a hang terjedéséből adódó fázistolás ne legyen jelentős.

Ha valamilyen identifikációs eljárás eredményeként $\hat{A}_2(z)$ adott, a rendszer sokkal szélesebb körben alkalmazható. $H(z)$ -t a filtered-X LMS (XLMS) algoritmussal adaptálják. Lehetőség van arra is, hogy $H(z)$ -t és $\hat{A}_2(z)$ -t a rekurzív LMS (RLMS) algoritmussal egyszerre adaptálják.

A visszacsatolt rendszer sajátossága, hogy a hibajel alapján predikciót kell végrehajtania, ami szélessávú zajok esetében (ahol tehát az egyes minták közötti korreláció kicsiny) nehezen valósítható meg.

2.2.2 Előreccatolt (feedforward) struktúra [5],[4]

Az előreccatolt struktúra blokkvázlata a 2.5. ábrán látható. Lényeges különbség a visszacsatolt struktúrához képest, hogy az adaptív szűrő bemenetként megkapja az x referenciajelet is, amelyhez szükség van még egy érzékelőre. Akusztikus esetben ez gyakran egy másik mikrofon, amelyet a zajforráshoz közel helyeznek el. Bár az ábrán az általánosság kedvéért nincs jelölve, de akusztikus esetben, ha a referenciajel is mikrofonból származik, a beavatkozó és a referenciajel közötti átvitel nem zérus, és ez a parazita



2.5. ábra. Előrecsatolt (feedforward) struktúra

hurok a rendszer instabilitását eredményezheti. Ha viszont periodikus zajt kell elnyomni, és a referenciajelet a példának megfelelően nem mikrofonnal vesszük, ez a probléma nem merül fel. Egyes esetekben (főként periodikus gerjesztés esetén) a referenciajel és az elnyomandó jel között nem feltétlenül az ábrának megfelelő kapcsolat áll fenn (pl. motoroknál a referenciajel a motor tengelyéről vehető, és ebben a jelben lehetnek az akusztikus zajból hiányzó felharmonikusok). Ebben az esetben a parazita hurok hatásával nem kell számolni.

A rendszer nagy előnye, hogy az előrecsatolás miatt alkalmas lehet arra, hogy a szabályozás hibája zérus legyen. $H(z)$ -nek ebben az esetben $-A_1(z)/A_2(z)$ -t kell megvalósítania, ami általában csak akkor lehetséges, ha $A_2(z)$ minimálfázisú. Amennyiben $-A_1(z)/A_2(z)$ mellett késleltetést is megengedhetünk, akkor a feladat megoldható. Akusztikus esetben ez nem jelent mást, mint hogy a referenciamikrofon és a hibamikrofon között elegendően nagy késleltetésnek kell lennie. Ezt a megoldást lehet alkalmazni pl. klímaberendezések légszűrőiben is, problémát jelenthet azonban, hogy a két mikrofon közötti szakaszon az áramló levegő a referenciajellel nem korrelált zajt kelt.

Az előrecsatolt struktúrában az általában nemrekurzív $H(z)$ -t az XLMS algoritmus-sal adaptálják. Ezért, bár az ábrán nem szerepel, itt is szükség van $\hat{A}_2(z)$ -re. Később megmutatom, hogy nem lényeges, hogy $\hat{A}_2(z)$ pontos másolata legyen $A_2(z)$ -nek.

Az LMS algoritmussal adaptált szűrőt alkalmazó előrecsatolt struktúrát, kedvező tulajdonságai, és az adott területen való széleskörű elterjedtsége miatt a speciálisan periodikus zajok elnyomására kifejlesztendő algoritmus esetében referenciastruktúrának használom.

2.2.3 Adaptáció LMS algoritmussal [4],[7]

Az alábbiakban a nemrekurzív adaptív szűrők együttthatóinak gradiens alapú adaptálását megvalósító LMS (Least Mean Square) algoritmust, illetve a rá épülő XLMS és többdimenziós XLMS algoritmust ismertetem [4], [7].

Az LMS algoritmus és változatai esetében a költségfüggvény a hiba négyzetének várható értéke:

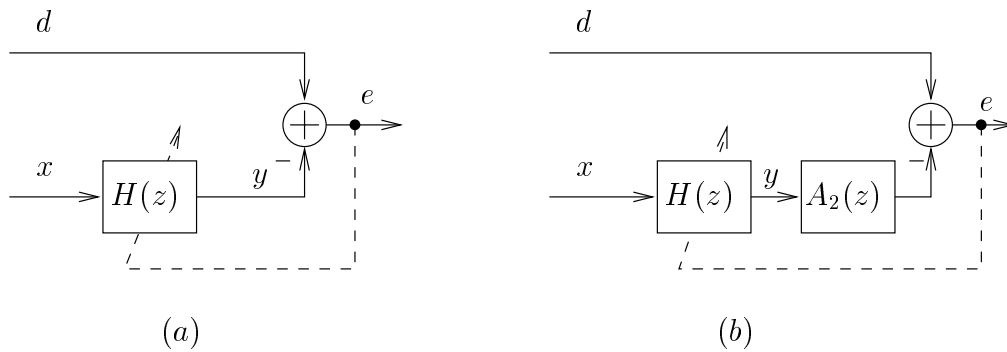
$$\mathcal{C}(e_n) = \mathcal{E}(e_n^2) \quad (2.1)$$

és cél ennek minimalizálása. A 2.6.a ábra az adaptív szűrés alapsémája. Ez is használható zavarhatások csökkentésére, amennyiben d elektronikus formában jelen van. Az ábrán szereplő jelek elnevezése megfelel az eddigieknek. $H(z)$ struktúráját a 2.7. ábra mutatja. A rendszert és az adaptációt leíró egyenletek a következők:

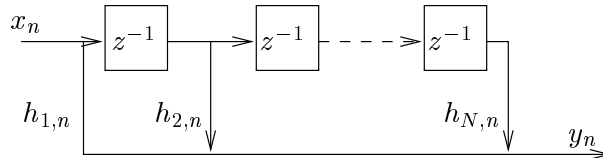
$$y_n = \mathbf{h}_n^T \mathbf{x}_n \quad (2.2)$$

$$e_n = d_n - y_n \quad (2.3)$$

$$\mathbf{h}_{n+1} = \mathbf{h}_n + \alpha e_n \bar{\mathbf{x}}_n \quad (2.4)$$



2.6. ábra. Adaptív FIR szűrés (a) LMS algoritmussal, (b) XLMS algoritmussal adaptált együttthatókkal



2.7. ábra. $H(z)$ struktúrája

ahol \mathbf{h}_n jelenti a szűrő együttthatóiból álló N elemű vektort; \mathbf{x}_n pedig a referenciajel késleltetett mintáit ($x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-N+1}$) az n -edik lépésben; α pedig pozitív skalár konvergenciaparaméter. A felülvonás a komplex konjugáltat jelöli. A rendszer konvergenciatulajdonságai (stabilitás, sebesség) a bemenőjel korrelációs mátrixától, valamint az ennek megfelelően választott α -tól függenek. A konvergenciasebesség növelése jeltranszformációval és teljesítménynormálással lehetséges, amelyet a 4. fejezetben ismertettek. N szükséges értéke a feladattól függ. Ha pl. a d jelben lévő periodikus komponens elnyomása a cél, harmonikus komponensenként egy (komplex) együttthatóra van szükség, illetve valós együttthatók esetén kettőre. A referenciajellel nem korrelált bemenőjel-komponens a szűrő átviteli karakterisztikájával torzítottan jut át a rendszeren. Ismét a periodikus komponens kiszűrését tekintve, ez a szűrő lyukszűrő a harmonikus pozíciókban, és szelektivitása α -tól függ. Kisebb α esetén a lyukszűrő szelektívebb, a torzítás a hasznos jelre nézve kisebb, de a rendszer beállási ideje megnő [8].

A 2.6.b ábrán látható elrendezés megfelel az előrecsatolt zajelnyomó rendszernek. Az $A_1(z)$ rendszer szerepeltetése itt nem lényeges. (2.3) a következőképpen módosul:

$$e_n = d_n - A_2(z)y_n \quad (2.5)$$

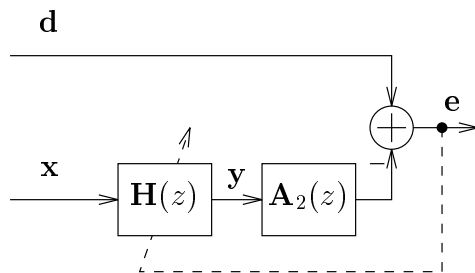
Ha $A_2(z) \neq 1$, az LMS algoritmus fenti formájában általánosságban nem stabil. Tetszőleges $A_2(z)$ esetén használható azonban az XLMS algoritmus. Ehhez valamilyen identifikációs eljárással meg kell alkotni $A_2(z)$ modelljét, amit $\hat{A}_2(z)$ -vel jelölhetünk. A (2.4) egyenlettel adott adaptációs mechanizmus a következőképpen módosul:

$$\mathbf{h}_{n+1} = \mathbf{h}_n + \alpha e_n \bar{\mathbf{r}}_n \quad (2.6)$$

ahol:

$$r_n = \hat{A}_2(z)x_n \quad (2.7)$$

Természetesen általában $\hat{A}_2(z) \neq A_2(z)$. Szerencsére, ha a rendszer stabil, továbbra is minimalizálja a négyzetes várható értéket, tehát a kiadódó együttthatókészlet torzítatlan. A stabilitás általában a bemenőjel és a szűrt bemenőjel keresztkorrelációs mátrixának vizsgálatával dönthető el. Harmonikus bemenőjelet feltételezve ez arra egyszerűsödik, hogy $A_2(z)$ és $\hat{A}_2(z)$ között nem lehet $\pi/2$ -nél nagyobb fázistolás [9].



2.8. ábra. Többcsatornás adaptív szűrő

$\hat{A}_2(z)$ meghatározására több módszer is elképzelhető. Az egyik gyakran használt lehetőség az, hogy a 2.6.a ábrán bemutatott struktúrát használjuk. Ebben az esetben x szélessávú zaj, d pedig ennek $A_2(z)$ -vel szűrt változata. Beállítás után $H(z)$ $A_2(z)$ közelítése. Akusztikus esetben az eljárás a következő: a szélessávú zajt egyrészt a beavatkozó hangszóróra, másrészt az adaptív szűrőre kell vezetni, és a hibamikrofon jeléből az adaptív szűrő jelét levonva kapjuk a hibajelét.

A Multiple Error LMS (MLMS) algoritmus bemutatásához tekintsük a 2.8. ábrát. Ez az ábra megfelel a 2.2. ábrán bemutatott alapfeladatnak, azzal a különbséggel, hogy itt a zajelnyomó struktúra már rögzített: $M \times L$ dimenziós adaptív nemrekurzív szűrő mátrix. Mivel a hiba itt vektor, az LMS algoritmus a hibavektor euklideszi normájának várható értékét minimalizálja, tehát a költségfüggvény:

$$\mathcal{C}(\mathbf{e}_n) = \mathcal{E}(\|\mathbf{e}_n\|_2) = \mathcal{E}\left(\sum_{i=1}^L |e_{i,n}|^2\right) \quad (2.8)$$

A rendszert leíró egyenletek:

$$\mathbf{y}_n = \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{H}_{i,n} \mathbf{x}_{n-i} \quad (2.9)$$

$$\mathbf{e}_n = \mathbf{d}_n - \mathbf{y}_n \quad (2.10)$$

Az MLMS algoritmus $\mathbf{H}(z)$ együtthatóinak adaptálásánál feltételezi, hogy $\mathbf{A}_2(z)$ minden eleme azonos foksámú FIR szűrő. Az adaptációs egyenlet felírásához tekintsük először az $\hat{\mathbf{A}}_2(z)$ által szűrt referenciajelet:

$$r_{lmk,n} = \sum_{j=0}^{J-1} \hat{a}_{2,lmj} x_{k,n-j} \quad (2.11)$$

ahol J a modell fokszáma. (A mátrixos írásmód itt már hipermátrixokat eredményezett volna. A fenti felírás megfelel az irodalomnak.) Ezzel az adaptációs egyenlet a következőképpen írható fel:

$$h_{mki,n+1} = h_{mki,n} + \alpha \sum_{l=1}^L e_{l,n} \bar{r}_{lmk,n-i} \quad (2.12)$$

A többcsatornás zajelnyomás jellegzetes kérdése, hogy mekkora a minimális maradó hiba, illetve a szabályozás eléri-e ezt a minimumot. Amennyiben a többcsatornás feladatot MLMS-sel adaptált FIR szűrőmátrixszal oldjuk meg, a költségfüggvénynek megfelelően valóban minimalizáljuk a hibát [7].

2.3 Periodikus zaj elnyomása

Az előző alfejezetben ismertetett rendszerek tetszőleges, általában szélessávú zajok elnyomására szolgálnak. Ennek a feladatnak speciális eseteként adódik a periodikus zajok elnyomása, de a jelek leírására szolgáló apparátus, és ezzel együtt a rendszerek vizsgálatához szükséges módszerek is különbözők. Ez indokolja azt, hogy az ilyen zajok elnyomására szolgáló rendszerek szintézise is különböző legyen.

Periodikus jelek leírására adekvát módszer a Fourier-reprezentáció. Általánosan ez azt jelenti, hogy egy sávkorlátozott x_n periodikus jel felírható komplex exponenciálisok súlyozott összegeként:

$$x_n = \sum_{k=-L}^L X_k c_{k,n} \quad (2.13)$$

ahol:

$$c_{k,n} = e^{j2\pi f_1 kn}; \quad k = -L..L \quad (2.14)$$

ahol f_1 az alapharmonikus frekvenciája. (Mivel a dolgozatban csak diszkrét rendszerek szerepelnek, a frekvencia mindig relatív frekvenciát jelent, azaz $0 < f < 1$.) L értékére a sávkorlátozottság miatt a következő egyenlőtlenség áll:

$$Lf_1 < 0.5 < (L+1)f_1 \quad (2.15)$$

A Fourier-felbontás egyértelmű, és a (2.14) egyenletben szereplő komplex exponenciálisok a sorfejtés bázisfüggvényei. Sávkorlátozott periodikus jelekre a bázisfüggvények teljes rendszert alkotnak, azaz:

$$X_k = 0 \iff \{x_n\} \equiv 0; \quad k = -L..L; \quad N = 2L + 1 \quad (2.16)$$

Bár ezek a bázisfüggvények általánosságban nem alkotnak ortogonális rendszert, az f_1 alapharmonikusú jelekre a sorfejtés ortogonális. Ez azt jelenti, hogy egy adott komplex exponenciális egyetlen X_k reprezentál. Amennyiben $f_1 = 2\pi/N$, a bázisfüggvények ortogonálisak, és az X_k együtthatókészlet az x_n jel diszkrét Fourier-transzformáltja. (2.16) alapján N páratlan, de pl. speciálisan a diszkrét Fourier-transzformációnak megfelelő esetben, amikor $Lf_1 = 0.5$, páros.

A 2.2.ábrán szereplő jelekre a (2.13) sorfejtés a következőképpen írható:

$$\mathbf{x}_n = \sum_{k=-L}^L \mathbf{X}_k c_{k,n} \quad (2.17)$$

$$\mathbf{d}_n = \sum_{k=-L}^L \mathbf{D}_k c_{k,n} \quad (2.18)$$

$$\mathbf{y}_n = \sum_{k=-L}^L \mathbf{Y}_k c_{k,n} \quad (2.19)$$

$$\mathbf{e}_n = \sum_{k=-L}^L \mathbf{E}_k c_{k,n} \quad (2.20)$$

Komplex exponenciális bemenőjel esetén az $\mathbf{A}(z)$ átviteli függvény mátrix egy komplex elemű mátrixszal reprezentálható:

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{A}(z = z_k); \quad z_k = e^{j2\pi f_1 k} \quad (2.21)$$

A felbontás fent említett tulajdonságai miatt igaz a következő:

$$\mathbf{E}_k = \mathbf{D}_k - \mathbf{A}_k \mathbf{Y}_k; \quad k = -L..L \quad (2.22)$$

valamint (2.16) miatt:

$$\mathbf{e}_n = 0 \iff \mathbf{D}_k - \mathbf{A}_k \mathbf{Y}_k = 0; \quad k = -L..L \quad (2.23)$$

Az utóbbi két egyenlet azt az ismert tényt fejezi ki, hogy a periodikus zaj komponensenként oltható ki, azaz egy adott harmonikus csak a vele azonos frekvenciájú komponenssel nyomható el. A legutóbbi (2.23) egyenlet átrendezve:

$$\mathbf{D}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{Y}_k; \quad k = -L..L \quad (2.24)$$

$2L + 1$ lineáris egyenletrendszer. \mathbf{D}_k és \mathbf{Y}_k valójában vektorok, csak a Fourier-felbontás miatt volt szükség a nagybetűs jelölésre. A továbbiakban ezeket kisbetűkkel jelölöm, és csak a k index utal arra, hogy ezek Fourier-együtthatókból álló vektorok:

$$\mathbf{d}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{y}_k; \quad k = -L..L \quad (2.25)$$

Az aktív zajelnyomás alapfeladata periodikus jelekre nem más, mint a (2.25) egyenletrendszer megoldása:

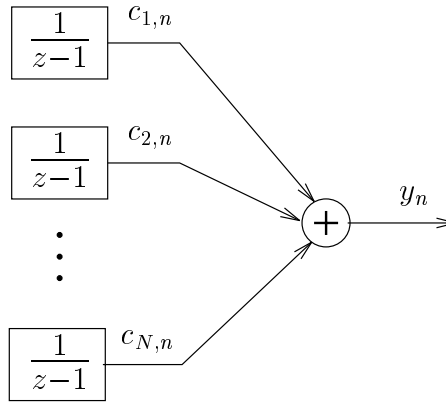
$$\mathbf{y}_k = \mathbf{A}_k^{\#} \mathbf{d}_k; \quad k = -L..L \quad (2.26)$$

ahol $\#$ pszeudinverzet jelent. Ha \mathbf{y} és \mathbf{d} dimenziója megegyezik, a közönséges inverz használható. Ekkor a hiba nulla, a zajelnyomás teljes. Ha $\dim(\mathbf{y}) < \dim(\mathbf{d})$, a hiba nem nulla, de minimális normájú, azaz a maradó hiba teljesítménye minimális. Ha fordítva, $\dim(\mathbf{y}) > \dim(\mathbf{d})$, a hiba nulla, és \mathbf{y} minimális normájú. Ez utóbbi esetben a nulla maradó hibát végtelen sok \mathbf{y} segítségével el lehet érni, de a pszeudinverz alkalmazásával azt választjuk, amelynek a legkisebb teljesítménye. A pszeudinverz alkalmazása a projekció tételből következik [10].

Egysatornás esetben tehát, periodikus gerjesztés esetén, a nulla hiba megcélozható. Természetesen ez csak állandósult állapotban igaz, ha a bemenőjel paraméterei (az egyes harmonikusok komplex amplitúdója, illetve a jel frekvenciája) nem változnak. A gyakorlati esetekben ezek a paraméterek változnak. A zajelnyomás akkor sikeres, ha a rendszer elég gyorsan követi ezeket a változásokat. A követési hiba annál kisebb, minél nagyobb a rendszer sebessége. A zajelnyomó rendszerek minősítésének egyik fontos eleme tehát, hogy milyen gyors a konvergenciájuk.

Az előző alfejezetben említett mindkét struktúra alkalmas periodikus zajok elnyomására. Mivel (állandósult állapotot feltételezve) egy periodikus jel következő mintája jól predikálható, elvileg a visszacsatolt struktúra (2.4. ábra) is jó megoldást jelent. Az ábrából azonban nyilvánvaló, hogy a szabályozónak állandósult állapotban a nulla e hibajelből kell előállítania a nem nulla y kimenőjelet. Ez azt jelenti, hogy a szabályozó egy, a periodikus zaj frekvenciáin működő rezonátor készletet valósít meg. Ez a megvalósítás azonban nem adekvát struktúrával történik, hiszen $H(z)$ és $\hat{A}_2(z)$ általában transzverzális szűrők. A másik probléma, hogy ezeknek a rezonátoroknak nemcsak az amplitúdóit, hanem a frekvenciáit is közvetve az e hibajel alapján kell hangolni, amely megfelelő pontossággal csak sebességcsökkenés árán érhető el.

Ez, valamint a sokszor könnyen és jó jel/zaj viszony mellett hozzáférhető referencijel lehet a magyarázata annak, hogy periodikus zajok elnyomására is általában előreccatolt rendszereket alkalmaznak (2.5. ábra). Itt az x referencijel révén a "frekvenciahangolás" egyszerűbb, tehát várható, hogy ezek az előreccatolt rendszerek egyébként ugyanolyan feltételek mellett is gyorsabbak, mint a visszacsatolt rendszerek. A referencijel olyan frekvenciájú komplex exponenciálisok (szinuszos jelek) összege, amelyek frekvenciáján



2.9. ábra. A koncepcionális jelmodell

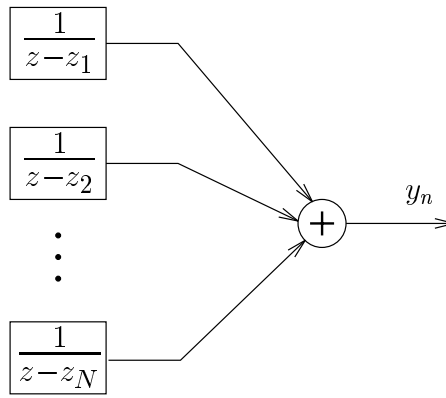
zajt kell elnyomni. Mivel $H(z)$ feladata csupán a megfelelő komplex amplitúdók (amplitúdó és fázis) beállítása, $N = 2L + 1$ együttható elegendő. Mint az LMS algoritmus áttekintésénél már szerepelt, a zajelnyomó rendszer egy olyan lyukszűrőt valósít meg, amelynek zérusai az elnyomandó zajkomponensek frekvenciáin vannak. A lyukszűrő szelektivitása az α konvergenciaparamétertől függ. Kis α esetén a lyukszűrő szelektivitása nagy, és a nem elnyomandó bemenőjel-komponensek kis torzítással jutnak át a rendszeren, valamint a véletlen zajok a rendszert kevésbé zavarják, de a konvergenciasebesség kicsi. Nagyobb α esetén a rendszer gyors, de a fenti előnyök elvesznek [8]. $A_2(z)$ identifikálásánál elegendő arra törekedni, hogy $\hat{A}_2(z)$ fázisa a szóbjövő frekvenciatományban $\pi/2$ -nél kisebb hibával közelítse $A_2(z)$ fázisát [9].

Az előrecsatolt struktúra az MLMS algoritmus révén alkalmas többcsatornás zajelnyomásra is [7]. A 4. fejezetben megmutatom, hogy az MLMS algoritmussal adaptált előrecsatolt struktúra a (2.26) egyenlettel adott optimális megoldáshoz konvergál.

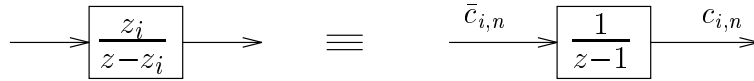
2.4 Rezonátoros alapstruktúra

Ebben a fejezetben a periodikus zajelnyomás feladatának jelmodell alapú megoldásához használt ún. rezonátoros struktúrát ismertetem. A rezonátoros struktúra mögött rejlő fontos alapgondolat, hogy hatékony jelkiértékelő eljáráshoz juthatunk, ha az eljárás struktúráját a jelet generáló modell struktúrája határozza meg. Szükségünk van tehát egy, a jelet generáló modellre, amelyet koncepcionális jelmodellnek nevezünk. Ezek után a jelkiértékelő eljárás a jelmodell mint rendszer megfigyelője lesz [12]. A dolgozat témájának megfelelően esetünkben a koncepcionális jelmodell sávkorlátozott periodikus jeleket generál.

A koncepcionális jelmodell a jól ismert és az előző alfejezetben is ismertetett Fourier-sorfejtésen alapul. A (2.13) egyenletet felhasználva felrajzolható a jelmodell (2.9. ábra). A levezetések további részében nem használjuk ki a bázisfüggvények közötti (2.14) kötést, és a bázisfüggvényeket az $\{i = 1..N\}$ indexekkel különböztetjük meg. Az egyes csatornákon szereplő szorzótényezők a sorfejtés bázisfüggvényei, amelyek az ábrán látható gerjesztetlen integrátorok kimenőjelét modulálják. Egy adott y_n periodikus jel generálása úgy képzelhető el, hogy a kezdetben nulla kimenőjelű integrátorok bemenetére egy adott n időpillanatban a vonatkozó Fourier-együtthatókat kapcsoljuk. Az integrátorok kimenetei (amelyek állapotváltozóik is) ezeknek az együtthatóknak megfelelő konstans értéket tartanak. Ha az integrátorok bemenetét gerjesztjük, időben változó paraméterekkel rendelkező kimenőjelet kapunk. A koncepcionális jelgenerátor alternatív megvalósítása a 2.10. ábrán látható. Az y_n kimenőjel itt rezonátorok kimenőjeleinek



2.10. ábra. A koncepcionális jelmodell rezonátorokkal



2.11. ábra. A rezonátoros és az integrátoros jelmodell megfeleltetése

összegeként áll elő. Egy-egy csatorna olyan lineáris rendszer, amelynek egyetlen pólusa van az egységkörön:

$$z_i = \frac{c_{i,n+1}}{c_{i,n}} = e^{j2\pi f_i}; \quad i = 1..N \quad (2.27)$$

Ennek a modellnek az állapotváltozói maguk a sorfejtésnek megfelelően súlyozott komplex exponenciálisok. A két jelmodell egy-egy csatornája ekvivalens, amelyek egymásnak úgy feleltethetők meg, hogy a 2.9. ábrán szereplő integrátorok bemenetét a megfelelő bázisfüggvény komplex konjugáltjával beszorozzuk, egyidejűleg a 2.10. ábrán szereplő rezonátorok számlálójában z_i -vel szorzunk. Ezt mutatja a 2.11. ábra [12].

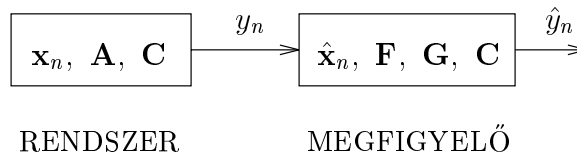
A koncepcionális jelmodellhez megfigyelőt kell tervezni. Mivel a koncepcionális jelmodell egykimenetű, gerjesztetlen, teljesen megfigyelhető rendszer, ezért ehhez viszonylag egyszerűen tervezhető teljes rendű Luenberger-féle állapotmegfigyelő [13], [14], [12], [11]. A következőkben a 2.10. ábrán látható időinvariáns szorzótényezőkkel rendelkező rendszerre tervezem meg a megfigyelőt. A levezetés részletességét az indokolja, hogy néhány részeredményt a 3. fejezetben felhasználok.

Tekintsük először a 2.12. ábrát! A megfigyelt rendszer állapotváltozós leírása a következő:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{A} \mathbf{x}_n \\ y_n &= \mathbf{C} \mathbf{x}_n \end{aligned} \quad (2.28)$$

a megfigyelőé:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{n+1} &= \mathbf{F} \hat{\mathbf{x}}_n + \mathbf{G} y_n \\ \hat{y}_n &= \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}_n \end{aligned} \quad (2.29)$$



2.12. ábra. A rendszer és a megfigyelő

Állandósult állapotban tetszőleges n -re:

$$\hat{\mathbf{x}}_n = \mathbf{x}_n \quad (2.30)$$

Az állapotegyenleteket felhasználva:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{n+1} - \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}_n + \mathbf{G}\mathbf{y}_n - \mathbf{A}\mathbf{x}_n = 0 \\ &= \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}_n + (\mathbf{G}\mathbf{C} - \mathbf{A})\mathbf{x}_n = 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

Felhasználva (2.30)-t kapjuk:

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C} \quad (2.32)$$

Behelyettesítve (2.29)-be:

$$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_n + \mathbf{G}[\mathbf{y}_n - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_n] \quad (2.33)$$

A megfigyelő tervezése a \mathbf{G} mátrix (egy kimenet – egy bemenet esetén vektor) meghatározását jelenti \mathbf{F} függvényében. \mathbf{F} -et általában úgy kell megválasztani, hogy a megfigyelő gyorsabb legyen, mint a megfigyelt rendszer. Diszkrét esetben természetesen kiemelt szerepük van az olyan megfigyelőknek, amelyek véges beállásúak, tehát a tervezésnél sokszor ez a cél. \mathbf{F} struktúrája tetszőleges lehet, de a (2.33) egyenlettel adott esetben oly módon rögzített, hogy a megfigyelt rendszer struktúrája (\mathbf{A}) beépül a megfigyelőbe, és \mathbf{G} egy állapotvisszacsatolási probléma megoldásaként adódik.

Esetünkben a megfigyelt rendszert (koncepcionális jelmodell) leíró mátrixok a 2.10. ábra alapján a következők:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \langle z_i \rangle \\ \mathbf{C} &= \mathbf{c}^T = [1, 1, \dots, 1] \end{aligned} \quad (2.34)$$

Az előírt karakterisztikus polinom legyen: $D(\lambda)$, amelynek vezető együtthatója 1. Keressett:

$$\mathbf{G} = \mathbf{g} : \det(\mathbf{A} - \mathbf{g}\mathbf{c}^T) = D(\lambda) \quad (2.35)$$

Némi számolás után [12]:

$$\det(\mathbf{A} - \mathbf{g}\mathbf{c}^T) = \prod_{i=1}^N (\lambda - z_i) \left[1 + \sum_{i=1}^N \frac{g_i}{\lambda - z_i} \right] = D(\lambda) \quad (2.36)$$

A rendszer sajátértékei megegyeznek a pólusokkal, ezért a továbbiakban a $z = \lambda$ jelölést alkalmazhatjuk. A részletszámítások mellőzésével \mathbf{g} elemeire a következő adódik:

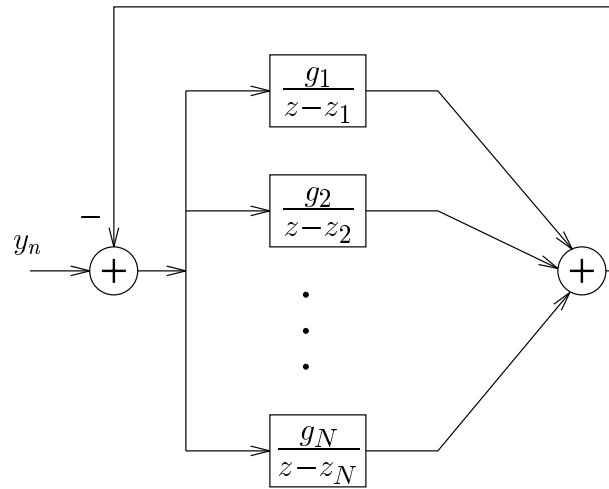
$$g_i = \frac{D(z_i)}{\prod_{l=1, l \neq i}^N (z_i - z_l)} \quad (2.37)$$

A megfigyelő a 2.13. ábrán látható. Ha $D(z) = z^N$, a megfigyelő véges beállású. Amennyiben a rezonátor pólusok az egységkörön egyenletesen helyezkednek el ($z_i = \sqrt[N]{1}$), a véges beállítás eléréséhez a (2.37) egyenlet a következőképpen egyszerűsödik:

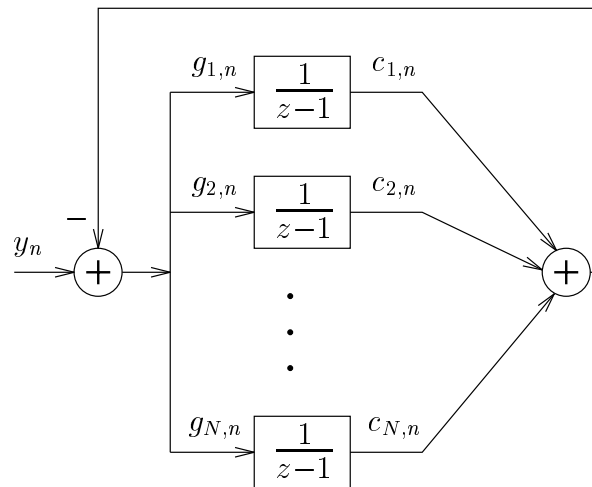
$$g_i = \frac{1}{N} z_i \quad (2.38)$$

Megfigyelő természetesen a 2.9. ábrán látható koncepcionális jelmodellhez is tervezhető. Ebben az esetben \mathbf{g} -nek időben változó szorzótényezők felelnek meg. Az elrendezés a 2.14. ábrán látható. A 2.11. ábrán közölt összefüggést alkalmazva a $g_{i,n}$ együtthatókra (2.37) felhasználásával a következő adódik:

$$g_{i,n} = \frac{D(z_i)}{z_i \prod_{l=1, l \neq i}^N (z_i - z_l)} \bar{c}_{i,n} \quad (2.39)$$



2.13. ábra. A rezonátoros jelmodellhez tartozó megfigyelő



2.14. ábra. Az integrátoros jelmodellhez tartozó megfigyelő

A megfigyelő állapotváltozói a Fourier-együtthatók. Ha a rendszer véges beállítású, a $g_{i,n}$ függvényeket a sorfejtés ún. reciprokbázisfüggvényeinek nevezzük. Ha a rezonátorok az egységkörön egyenletesen helyezkednek el, véges beállítás esetén (2.38) így egyszerűsödik:

$$g_{i,n} = \frac{1}{N} \bar{c}_{i,n} \quad (2.40)$$

Ekkor a struktúra rekurzív diszkrét Fourier-transzformációt (DFT) valósít meg, és az állapotváltozók a transzformált értékeit adják.

Összefoglalva az eredményeket, a kétféle megfigyelő struktúra állapotegyenletei a következők:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{n+1} &= \langle z_i \rangle \hat{\mathbf{x}}_n + \mathbf{g} \{ y_n - [1, 1, \dots, 1] \hat{\mathbf{x}}_n \} \\ \hat{y}_n &= [1, 1, \dots, 1] \hat{\mathbf{x}}_n \end{aligned} \quad (2.41)$$

illetve:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{n+1} &= \hat{\mathbf{x}}_n + \mathbf{g}_n \{ y_n - \mathbf{c}_n^T \hat{\mathbf{x}}_n \} \\ \hat{y}_i &= \mathbf{c}_n^T \hat{\mathbf{x}}_n \end{aligned} \quad (2.42)$$

ahol $\mathbf{c}_n = [c_{i,n}]$ és $\mathbf{g}_n = [g_{i,n}]$.

A két struktúra párhuzamos szerepeltetése azért indokolt, mert a későbbiek során egyik vagy másik leírási mód az adott feladathoz jobban illeszkedik. A jelöléseket egyszerűsíti, ha a (2.37) és (2.39) egyenletek összevetésével definiáljuk az egyes csatornákra az r_i szorzótényezőket:

$$r_i = \frac{D(z_i)}{z_i \prod_{l=1, l \neq i}^N (z_i - z_l)} \quad (2.43)$$

amellyel:

$$\begin{aligned} g_i &= r_i z_i \\ g_{i,n} &= r_i \bar{c}_{i,n} \end{aligned} \quad (2.44)$$

A továbbiakban tehát az egyes csatornákat a 2.11. ábrán látható módon ekvivalensnek tekintjük, amelyek bemenetén (vagy kimenetén) szükség szerint az r_i szorzótényezőket alkalmazzuk.

A rezonátoros struktúra bemutatásához hozzátartozik néhány jellemző átviteli függvény megadása is. Egy rezonátor csatorna átviteli függvénye a 2.13. ábra és (2.44) alapján:

$$Q_i(z) = \frac{r_i z_i}{z - z_i} \quad (2.45)$$

A zárt hurok átviteli függvénye a bemenettől a visszacsatolt jelig:

$$P(z) = \frac{\hat{Y}(z)}{Y(z)} = \frac{\sum_{i=1}^N Q_i(z)}{1 + \sum_{i=1}^N Q_i(z)} \quad (2.46)$$

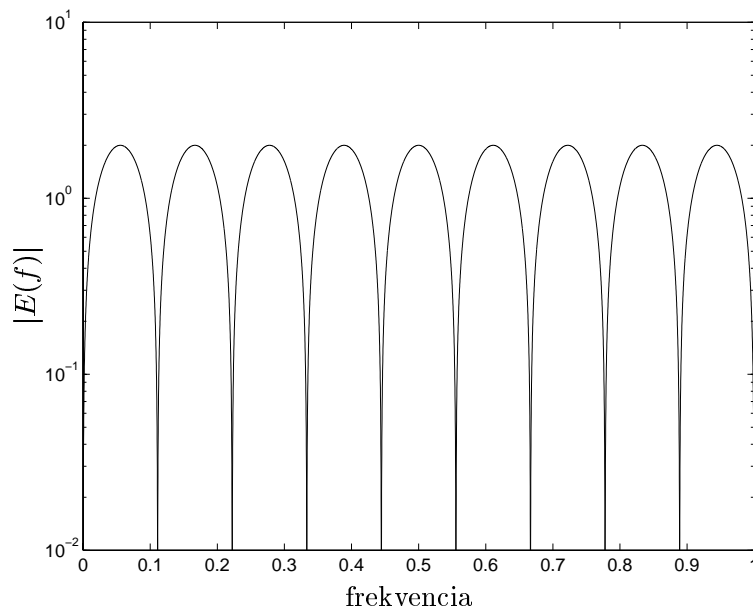
amely abban az esetben, ha $z_i = \sqrt[N]{1}$ és $r_i = 1/N$, rendkívül egyszerű alakú:

$$P(z) = \frac{1}{D(z)} = z^{-N} \quad (2.47)$$

ami azt az ismert tényt fejezi ki, hogy a DFT a transzformáltat N ütemmel késleltetve adja meg. Zárt hurokban a hibajelre vonatkozó átviteli függvény a következő:

$$E(z) = 1 - P(z) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^N Q_i(z)} \quad (2.48)$$

$E(z)$ -nek rezonátor pozíciókban zérusai vannak. $E(z)$ tehát a periodikus jelmodell frekvenciáin működő lyukszűrő. A lyukszűrő "szélessége" az r_i paramétertől függ: minél kisebb az abszolút értéke, annál keskenyebb a szűrő. DFT esetére ($N = 9$) $|E(f)|$ a 2.15. ábrán látható. Végül egy csatorna zárt hurokra vonatkozó átviteli függvénye:



2.15. ábra. A hibajel amplitúdókarakterisztikája

$$T_i(z) = \frac{Q_i(z)}{1 + \sum_{l=1}^N Q_l(z)} \quad (2.49)$$

amely DFT esetén a jól ismert:

$$|U_i(f)| = \left| \frac{\sin \pi N(f - f_i)}{N \sin \pi(f - f_i)} \right| \quad (2.50)$$

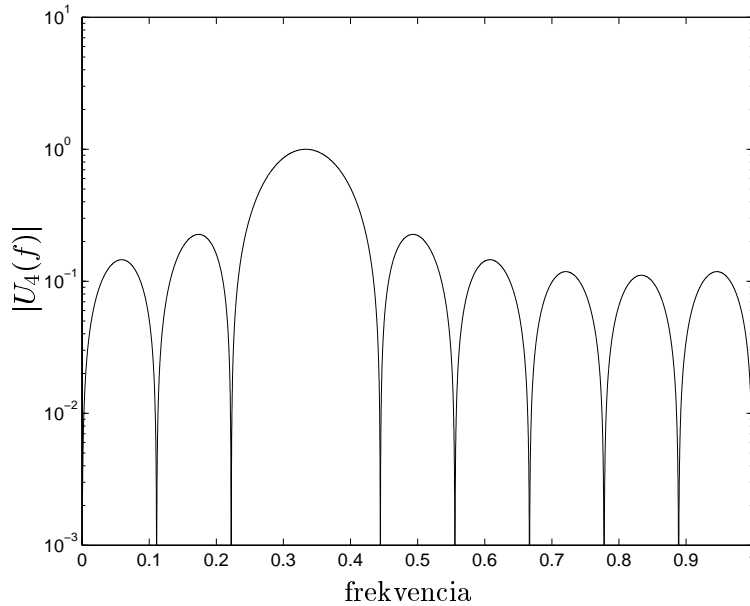
alakot ölti, ahol f_i a rezonátorfrekvenciát jelöli. Példa $i = 4$, $N = 9$ esetére a 2.16. ábrán látható.

Az itt részletesen ismertetett rezonátoros megfigyelő struktúrát sikeresen alkalmazták minden olyan területen, ahol a jelek leírására a periodikus jelmodell adekvát. Különösen alkalmas Fourier-transzformáció (és általánosságban tetszőleges ortogonális transzformáció) rekurzív megvalósítására. Megfelelő kiegészítésekkel a struktúrával kiváló stabilitási és érzékenységi tulajdonságokkal rendelkező digitális szűrők megvalósítására [16], adaptív szűrésre [15],[17] nyílik lehetőség. További fontos alkalmazás a következő alfejezetben részletesen ismertetendő adaptív Fourier-analizátor, amely több gyakorlati alkalmazásban is kiválóan bizonyult.

2.5 Adaptív Fourier-analízis

Az előző alfejezetben bemutatott struktúra a feltételezett jelmodellel leírható jelek pontos analízisét adja. Ha azonban a periodikus bemenőjel frekvenciája eltér a feltételezettől, a becslő torzított. Ez a torzítás DFT esetén a jól ismert “picket fence” effektus, illetve “leakage”. A [18]-ban ismertetett adaptív Fourier analizátor (AFA) ezeket a hiányosságokat küszöböli ki. Az AFA olyan rezonátoros struktúra, amelynek rezonátor pólusait a bemenőjel komponenseinek frekvenciáira hangoljuk, ezáltal biztosítva a bemenőjel hibamentes felbontását. Működésének bemutatásához leginkább a rezonátoros megfigyelő 2.14. ábrán látható változata alkalmas. Kiindulásként tekintsük a DFT-t megvalósító struktúrát. A jelmodell ebben az esetben:

$$y_n = \mathbf{c}_n^T \mathbf{x}_n \quad (2.51)$$



2.16. ábra. Egy csatorna amplitúdókarakterisztikája

ahol:

$$c_{k,n} = e^{j\frac{2\pi}{N}kn}; \quad k = -L \dots L; \quad N = 2L + 1 \quad (2.52)$$

Ebben az esetben az alapharmonikus $f_1 = 2\pi/N$. (A frekvenciák közötti kötés most megint lényeges, ezért alkalmazzuk a k indexet.) Az állapotegyenlet (2.42) a következőképpen írható:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{n+1} &= \hat{\mathbf{x}}_n + \frac{1}{N} \bar{\mathbf{c}}_n \{y_n - \mathbf{c}_n^T \hat{\mathbf{x}}_n\} \\ \hat{y}_n &= \mathbf{c}_n^T \hat{\mathbf{x}}_n \end{aligned} \quad (2.53)$$

Az egyes csatornák működése úgy interpretálható, hogy a hibajelét először a vonatkozó $\bar{\mathbf{c}}_{k,n}$ függvény zérus frekvenciára keveri, majd integrálás után a $c_{k,n}$ függvény vissza az eredeti frekvenciára. Amennyiben a megfigyelő illeszkedik a jelmodellhez, az állapotváltozók nem változnak. Ha azonban eltérő frekvenciájú a bemenőjel, a keverés eredménye nem nulla frekvenciájú jel. Az állapotváltozó állandósult állapotban egy forgó komplex vektor, a forgás sebessége pedig megfelel az aktuális frekvenciakülönbségnek, és ez használható fel a frekvencia adaptálására. Ezt fejezi ki a következő egyenlet:

$$f_{1,n+1} = f_{1,n} + \frac{1}{2\pi N} \text{angle}(\hat{x}_{1,n+1}, \hat{x}_{1,n}) \quad (2.54)$$

ahol $\hat{x}_{1,n}$ az alapharmonikushoz tartozó állapotváltozó jelöli, “angle” pedig a két komplex szám mint vektor által bezárt szöveget adja meg. Ezzel, valamint (2.52) felhasználásával kifejezhető \mathbf{c}_{n+1} :

$$c_{k,n+1} = c_{k,n} e^{j2\pi f_{1,n+1}k} \quad (2.55)$$

A megfigyelőt mindig (2.53) alapján az aktualizált \mathbf{c}_n -nel kell működtetni. A (2.53) és (2.52) egyenlettel leírt rendszer véges impulzusválaszú. Ha azonban az alapharmonikus frekvenciája megváltozik, a (2.53) képletben álló $r_k = 1/N$ nem biztosítja a véges beállást. Új r_k készlet számítása viszont (vö. (2.43)) számítástechnikailag kedvezőtlen, mind numerikus okokból, mind pedig real-time működés szempontjából. Ha azonban az egyenletes rezonátor elhelyezkedéstől csak kissé térünk el, a rendszer még gyors marad. Széles tartományban változó alapharmonikusú jelek esetében ez úgy biztosítható, hogy a korábban (2.15)-ben leírt feltételt strukturális eszközökkel biztosítjuk, azaz az aktuális

frekvenciának megfelelően új rezonátorokat “léptetünk be” a rendszerbe, vagy az $f = 0.5$ felettieket megszüntetjük. Az új rezonátorok inicializálása a következő:

$$\begin{aligned}x_{L,n+1} = x_{-L,n+1} &= 0 \\c_{L,n+1} = c_{-L,n+1} &= 1\end{aligned}\tag{2.56}$$

Az AFA algoritmus egyébként részleteiben is szerepel [19]-ben és [21]-ben.

Ebben az alfejezetben az AFA algoritmus alapötletét és már a gyakorlatban is használt formáját ismertettem. Erre alapozva az adaptív Fourier analízátorok egy családja fejlődött ki. Az AFA változó frekvenciájú jel frekvenciáját csak konstans hibával becsüli, ezáltal a jelrekonstrukció sem hibátlan. A továbblépés egyik iránya, hogy változó frekvenciájú jel követésére is alkalmas legyen. [20] lineárisan, logaritmikusan és hiperbolikusan változó frekvencia követésére alkalmas AFA-t ír le. Az AFA algoritmus konvergenciája nem nyilvánvaló, és az analízis is bonyolult, a nemlineáris probléma miatt. A konvergencia kapcsolatba hozható a bemenőjel felharmonikus-tartalmával. Ebben az irányban [21] számol be konvergencia-analízis eredményekről, illetve javasol új struktúrákat. Ezekről a lehetőségekről, valamint a szerző ilyen vonatkozású eredményeiről bővebben a 3.7 alfejezetben lesz szó. Végül megemlítem, hogy a (2.54) egyenlet alapján [22] egy gyors struktúra felhasználásával oldja meg a változó frekvenciájú periodikus jelek analízisét.

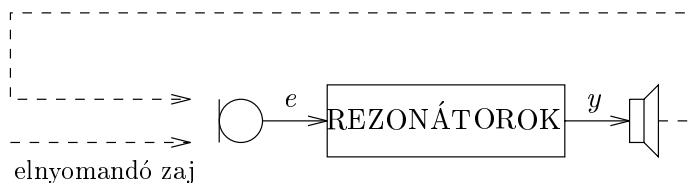
3. fejezet

Jelmodell alapú zajelnyomó rendszerek tervezése és vizsgálata

3.1 Bevezetés

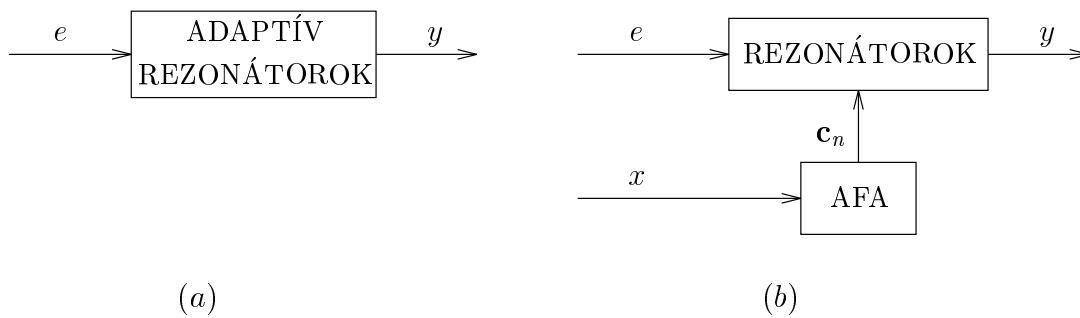
Az előző fejezetben ismertetett rezonátoros struktúra és különösen annak frekvenciaadaptív változata, az AFA, eredményesen alkalmazható olyan jelfeldolgozó rendszerekben, amelyek periodikus jeleket fogadnak, illetve a jelfeldolgozó algoritmus a Fourier-reprezentációhoz kötődő eljárást valósít meg. Ezeknek a rendszereknek az előnyei egyrészt a visszacsatolt rezonátorok révén megvalósuló igen pontos jelrekonstrukcióhoz, másrészt az egyszerű struktúrához kapcsolódó számítási nyereséghez kötődnek. Példaként említhető a precíziós mérés technikában használt vektorvoltmérő, áramváltó-hitelesítő, stb. (CALIN műszercsalád), [18]. A bemutatott elméleti eredmények és a gyakorlati tapasztalatok birtokában feltételezhető, hogy periodikus zavarhatások csökkentésére a periodikus jelmodell alapú struktúra az előzőekben bemutatott általános struktúráknál előnyösebben alkalmazható.

A rezonátoros struktúra (2.13. vagy 2.14. ábra) a bemenőjelet a (2.48) egyenletnek megfelelően nulla hibával rekonstruálja, amennyiben komponenseinek frekvenciái megegyeznek a rezonátorfrekvenciákkal. Ez úgy is interpretálható, hogy a rezonátoros struktúra a bemenőjel rezonátorfrekvenciáknak megfelelő komponenseit elnyomja. A rezonátoros struktúrát a 2.3. ábrával összevetve jól látszik, hogy a struktúra olyan zajelnyomó rendszer, amelyben $A(z) = 1$. Az aktív zajelnyomás alapfeladatának tehát az felel meg, hogy a rezonátoros struktúrának a fizikai rendszert reprezentáló $A(z)$ -vel szűrt kimenőjele kell megegyezzen a bemenőjellel, azaz a rezonátorok visszacsatolása egy "külső" hurkon keresztül valósul meg. Akusztikus zajelnyomás esetében a rezonátorok kimenőjelét a beavatkozó hangszóróra vezetjük, és az így keletkezett hang az elnyomandó hanggal interferál. Az interferencia eredményeként létrejött hangot a hibamikrofonnal érzékeljük, és ennek jelét vezetjük a rezonátorok bemenetére. Ezt szemlélteti a 3.1. ábra.



3.1. ábra. Akusztikus zaj elnyomása rezonátorokkal

A zajelnyomó rendszer megtervezése a rezonátoros struktúra adekvát kiegészítését jelenti. A kiegészítés során szem előtt kell tartani a Bevezetésben megfogalmazott kö-



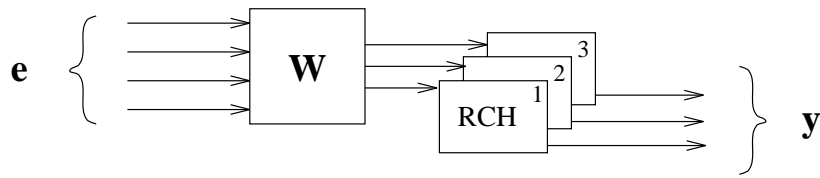
3.2. ábra. Rezonátorok adaptálása (a) a zajelnyomó hurokból (b) referenciajელre

vetelményeket: egyrészt olyan struktúrára van szükség, amely tetszőleges $A(z)$ esetén megoldja a zajelnyomási feladatot, másrészt a paraméterek megválasztásánál úgy kell eljárni, hogy a konvergenciasebesség megfelelően nagy legyen. Lényeges szempont még, hogy az adott eljárás reális számítási igényt támasszon. Ezek, valamint a bemutatott analógia alapján, a tervezés nem jelent mást, mint a rezonátoros struktúra paramétereinek meghatározását. A 3.4 alfejezetben a struktúra egy olyan kiegészítését mutatom be, amely a rendszer (elsősorban konvergencia-) tulajdonságait javítja.

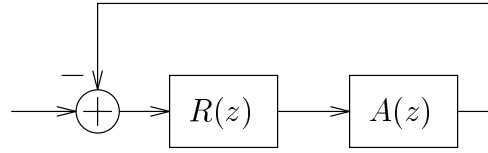
A maximális konvergenciasebesség érdekében a véges beállást (FIR rendszer) tűzöm ki célul. Az ilyen, “dead-beat” beállításnak nevezett, rendszerek ellen szól az esetek egy részében, hogy a tranziens során nagyok a túllövésiek, illetve az állandósult állapotbeli jellemzők érzékenyek a zajokra. Ezért egyes szabályozási stratégiák olyan költségfüggvényeket definiálnak, amelyek a túllövéseket is figyelembe veszik. A túllövések egyébként azért is veszélyesek, mert adott implementáció esetén túlcsoorduláshoz vezethetnek, amelyek nemcsak a konvergenciasebességet ronthatják, hanem a rendszer instabilitását is eredményezhetik. Az akusztikus rendszerekkel kapcsolatos tapasztalatok alapján azonban ez esetünkben nem reális veszély.

Természetesen zajelnyomás csak akkor lehetséges, ha a rezonátorokat pontosan a bemenőjel frekvenciáira hangoljuk. Erre a feladatra az AFA használható, de a felhasználás módja nem egyértelmű. Az egyik lehetőség az, hogy maga a zajelnyomó struktúra adaptív, ahogyan az a 3.2.a ábrán látható. Ebben az esetben a teljes hurok felel meg az AFA-nak, amelynek sebességét meghatározza a hurok sebessége, a frekvenciaadaptáció stabilitása pedig kérdéses. Ezért az AFA a 3.2.b ábra szerint az általában hozzáférhető referenciajel segítségével becsli a frekvenciát. Ennek a frekvenciabecslésnek a sebessége általában nagyságrendekkel nagyobb, mint a zajelnyomó hurok sebessége, ezért a teljes rendszer eredő sebessége is nagyobb. A 3.2. ábrán bemutatott két lehetséges struktúra a Bevezetésben elemzett visszacsatolt, illetve előrecsatolt rendszerrel mutat hasonlóságot. Zajelnyomásra tehát elsősorban a 3.2.b ábrán szereplő elrendezést javaslom, de a 3.7 alfejezetben olyan struktúrákat is bemutatok, amelyek külön referenciajel nélkül is működnek, anélkül, hogy a rendszer konvergenciatulajdonságaiban lényeges romlás következne be.

A zajelnyomó rendszer tehát tulajdonképpen egy vezérelt rezonátoros struktúra, amelynek konvergenciaviszonyait a frekvenciaadaptáció konvergenciája nem befolyásolja. A gyakorlatban elképzelhető olyan elrendezés is, ahol az alapharmonikus frekvenciája valamilyen előfeldolgozás következtében eleve rendelkezésre áll, ilyenkor az AFA-ra nincs szükség. Az AFA kedvező konvergenciaviszonyai és az előállított frekvenciabecslő pontossága azonban valószínűsítik, hogy más, hasonló pontosságú frekvenciabecslő eljárás sem lényegesen gyorsabb, illetve a beállási idők közötti különbség a zajelnyomó hurok beállási idejéhez képest elenyésző. A továbbiakban tehát a zajelnyomó hurok viselkedését mint adott rezonátorpozíciókkal rendelkező struktúra viselkedését vizsgálom.



3.3. ábra. Többcsatornás rezonátoros zajelnyomó rendszer



3.4. ábra. A zajelnyomó hurok blokkvázlata

Az eddigiekben bemutatott egycsatornás zajelnyomó struktúra alapján megkonstruálható annak többcsatornás változata is. A (2.26) egyenletet figyelembe véve a zajelnyomó rendszer kimeneti vektorának minden eleméhez tartozik egy független rezonátoros struktúra (RCH), ahol a rezonátorok bemenetére a különbségképzőkből érkezik jel. 4 bemenet és 3 kimenet esetére ezt szemlélteti a 3.3. ábra. A rezonátor pólusok beállítására továbbra is az AFA használható, amely most az összes rezonátort vezérli. A hibajelvektort (rezonátor csatornánként) a \mathbf{W} mátrix csatolja a rezonátorok bemenetére. A tervezés az egycsatornás esetben leírt szempontok szerint ennek a mátrix-készletnek a megtervezését jelenti.

Dolgozatomnak ez a fejezete igyekszik bemutatni a jelmodell alapú zajelnyomó rendszerek tervezésének minden aspektusát, a felmerülő elméleti és gyakorlati szempontokból egyaránt.

3.2 Egycsatornás rendszer tervezése

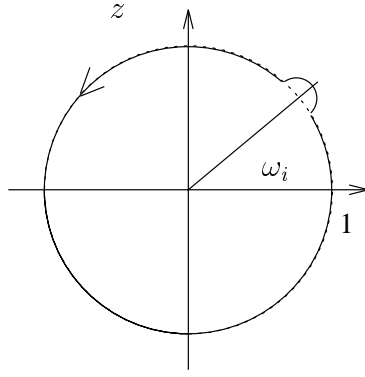
Az egycsatornás zajelnyomó rendszer megtervezése az előzőekben leírtak szerint elsőként a rezonátoros struktúra paramétereinek meghatározását jelenti. Az alábbiakban először megvizsgálom, hogy a teljes zajelnyomó rendszer milyen paraméterválasztással stabil, majd javaslatot teszek a paramétereknek a stabilitási feltételeket kielégítő megválasztására.

3.2.1 Stabilitás

A zajelnyomó hurok stabilitásának vizsgálatához tekintsük a 3.4. ábrát, ahol $R(z)$ jelöli a visszacsatolatlan rezonátoros struktúrát, azaz (2.45) alapján:

$$R(z) = \sum_{i=1}^N Q_i(z) = \sum_{i=1}^N \frac{r_i z_i}{z - z_i} \quad (3.1)$$

Amennyiben a rendszer stabil, és a rezonátorok hangolása megfelelő, a zajelnyomás állandósult állapotban teljes. Tehát minden, stabil rendszert biztosító r_i paraméterkészlet megfelelő. A rendszer azonban tetszőleges r_i választással nem stabil. Lehetőségként kínálkozik, hogy a hurokerősítést az adaptív rendszerekhez és a szokásos szabályozási körökhöz hasonló módon egy pozitív skalár paraméter segítségével biztosítsuk, oly módon, hogy azt kellően kicsire választva a visszacsatolt rendszer stabil legyen. Ennek az eljárásnak a háttere általában a következő: adott a stabil visszacsatolatlan rendszer



3.5. ábra. A Nyquist-út szemléltetése

nevezőjével és számlálójával:

$$F(z) = \alpha \frac{N(z)}{D(z)} \quad (3.2)$$

ahol α a konvergenciaparaméter. A negatívan visszacsatolt rendszer átviteli függvénye a következő:

$$F'(z) = \frac{F(z)}{1 + F(z)} = \frac{\alpha N(z)}{D(z) + \alpha N(z)} = \frac{\alpha N(z)}{D'(z)} \quad (3.3)$$

ahol $D'(z)$ már nem feltétlenül stabil. $D(z)$ gyökei stabilak, tehát van teljes egészében az egységkörbe eső környezetük. Bár az összefüggés erősen nemlineáris, és kis együttható-eltérésekhez is nagy gyök-eltérések tartozhatnak, globálisan igaz, hogy minél kisebb az α paraméter, $D'(z)$ gyökei annál közelebb esnek $D(z)$ gyökeihez, így az eredő rendszer is stabil. Ha azonban $D(z)$ rezonátorokat, azaz egységkörön lévő pólusokat is tartalmazott, tetszőlegesen kis környezetükben is lehet olyan pont, amely az egységkörön kívülre esik. Így, sajnos, rezonátorok esetében a fenti eljárás általánosságban nem vezet eredményre, bár a hurokerősítést változtató α paraméterre továbbra is szükségünk lesz, és az egyes rezonátorcsatornákhöz rendelt r_i szorzótényezőket a továbbiakban:

$$r_i = \alpha \omega_i \quad (3.4)$$

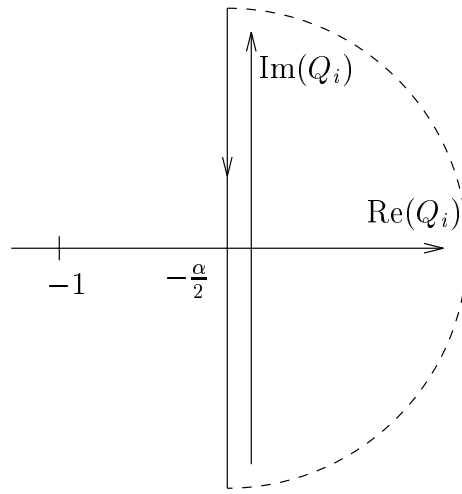
alakban keressük.

A rendszer stabilitásának vizsgálatához a Nyquist-kritériumot alkalmazzuk, amely diszkrét rendszerekre a folytonosakkal egyező módon mondható ki [23]. A rezonátorokat az egységkör belsejébe sorolva a Nyquist-kritérium szerint a stabilitás feltétele, hogy a nyílt hurok Nyquist-görbéje a -1 pontot ne ölelje körül. A nyílt hurok átviteli függvénye:

$$F(z) = A(z)R(z) = A(z) \sum_{i=1}^N Q_i(z) \quad (3.5)$$

A Nyquist-görbe meghatározásához először Nyquist-utat kell választani, amely szokásosan az egységkör. Ahhoz azonban, hogy a rezonátorokat is az egységkör belsejébe sorolhassuk, a rezonátorok környezetében a Nyquist-útnak az egységkörön kívül kell haladnia. Egy rezonátor környezetére ezt szemlélteti a 3.5. ábra, ahol $\omega_i = 2\pi f_i$. Mivel $F(z)$ összeg alakjában adott, először az egyes tagok frekvenciafüggését vizsgáljuk, a $z = e^{j\omega}$ helyettesítéssel. Először tekintsük egy rezonátor átviteli függvényét (az r_i szorzótényező nélkül):

$$Q'_i(\omega) = \frac{e^{j\omega_i}}{e^{j\omega} - e^{j\omega_i}} \quad (3.6)$$



3.6. ábra. Egy rezonátor Nyquist-görbéje

amelyen a következő átalakításokat elvégezve viszonylag egyszerű eredményre jutunk:

$$\begin{aligned} \frac{e^{j\omega_i}}{e^{j\omega} - e^{j\omega_i}} &= \frac{1}{e^{j(\omega-\omega_i)} - 1} = \frac{1}{e^{j\frac{\omega-\omega_i}{2}} [e^{j\frac{\omega-\omega_i}{2}} - e^{-j\frac{\omega-\omega_i}{2}}]} = -j \frac{e^{-j\frac{\omega-\omega_i}{2}}}{2 \sin \frac{\omega-\omega_i}{2}} = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{j(\cos \frac{\omega-\omega_i}{2} - j \sin \frac{\omega-\omega_i}{2})}{\sin \frac{\omega-\omega_i}{2}} = -\frac{1}{2} (1 + j \operatorname{ctg} \frac{\omega - \omega_i}{2}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Határértékben:

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_i \pm 0} Q'_i(\omega) = -\frac{1}{2} \mp j\infty \quad (3.8)$$

Eldöntendő még, hogy hogyan záródik a görbe $\omega = \omega_i$ -ban. Ezt természetesen a Nyquist-út határozza meg, amely itt az egységkörön kívül halad. Így itt az eredeti (3.6) egyenletben a $z = \rho e^{j\omega}$ helyettesítést kell alkalmazni, ahol ρ valós. A (3.7) egyenletben alkalmazott átalakításokhoz hasonlóan:

$$Q'_i(\rho e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega_i}}{\rho e^{j\omega} - e^{j\omega_i}} = \frac{\rho \cos(\omega - \omega_i) - 1}{\rho^2 - 2\rho \cos(\omega - \omega_i) + 1} - j \frac{\rho \sin(\omega - \omega_i)}{\rho^2 - 2\rho \cos(\omega - \omega_i) + 1} \quad (3.9)$$

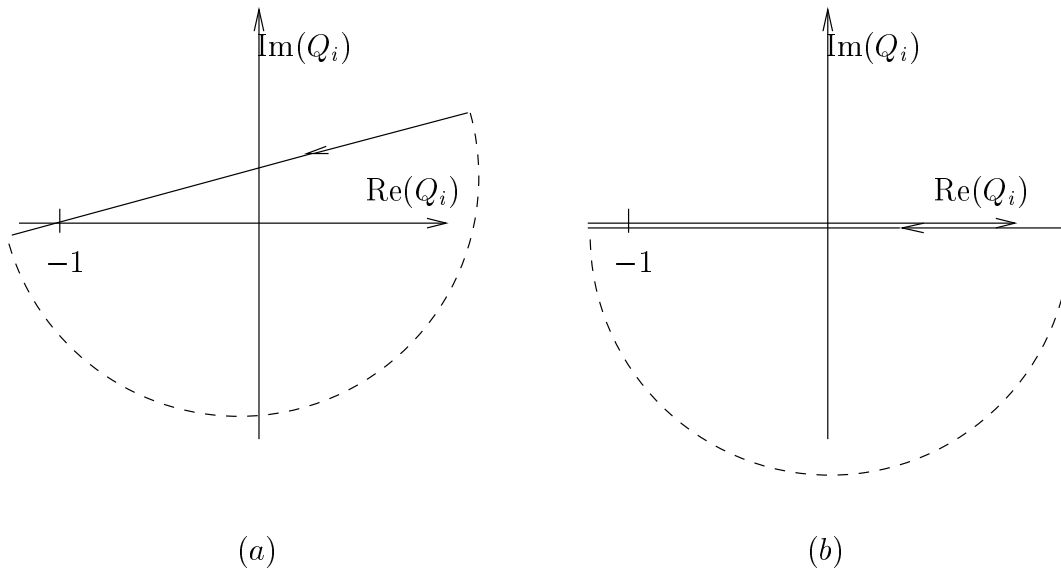
A jobboldal valós részét vizsgálva:

$$\frac{\rho \cos(\omega - \omega_i) - 1}{\rho^2 - 2\rho \cos(\omega - \omega_i) + 1} > -\frac{1}{2}, \text{ ha } |\rho| > 1 \quad (3.10)$$

Ez utóbbi egyenlet azt fejezi ki, hogy akárhogyan is kerüli el (az egységkörön kívül) a Nyquist-út a rezonátor pólust, a Nyquist-görbe valós része a (3.7) egyenlettel adott $z = -1/2$ egyenletű egyenes jobboldalán marad. A (3.7), (3.8) és (3.10) összefüggések segítségével felrajzolható egy rezonátor Nyquist-görbéje (3.6. ábra). Az ábrán a későbbiek kedvéért szerepel az α paraméter is, amely a rezonátorcsatornák közös szorzótényezője.

Alkalmazzuk most a rezonátorcsatornán a (3.4) egyenlettel adott szorzótényezőt is, úgy, hogy $|w_i| = 1$. w_i egy origó körüli forgatást valósít meg, míg α origó középpontú nyújtást. Ezt szemlélteti a 3.7.a ábra. Az ábra a stabilitás határhelyzetét ábrázolja. A (3.7) egyenletet is figyelembe véve világos, hogy ha a görbe elfordul, α csökkentésével még stabilizálni lehet a visszacsatolt rezonátort. Ha azonban a 3.7.b ábrának megfelelően $|\operatorname{arc}(w_i)| = \pi/2$, a stabilitás "abszolút" határhelyzetében vagyunk. Tehát α segítségével a rezonátor akkor és csak akkor stabilizálható, ha:

$$-\pi/2 < \operatorname{arc}(w_i) < \pi/2 \quad (3.11)$$



3.7. ábra. Stabilitási határhelyzetek (a) $|\text{arc}(w_i)| < \pi/2$ (b) $|\text{arc}(w_i)| = \pi/2$

Ezek után rátérhetünk a teljes hurok vizsgálatára. A nyílt hurok átviteli függvénye az egyes tényezőket kifejtve (3.5), (3.4) és (3.7) alapján:

$$F(\omega) = \frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^N A(\omega) w_i (1 + j \text{ctg} \frac{\omega - \omega_i}{2}) \quad (3.12)$$

Ha $\omega \neq \omega_i$, az összeg minden tagja véges, tehát megfelelő α segítségével a Nyquist-kritérium a fázistolástól függetlenül betartható. A rezonátorfrekvenciák környezetében azonban:

$$|F(\omega)| > 1 \quad (3.13)$$

tetszőleges α mellett. A környezetek nagysága természetesen függ α értékétől, w_i -től és $A(\omega)$ -től. Ha α értékét csökkentjük, ezek a környezetek egyre kisebbek lesznek. Ezt szemlélteti az egyszerű $|A(\omega)| = |w_i| = 1$ esetre a 3.8. ábra. Ezekben a környezetekben $F(\omega)$ fázisának kell megfelelőnek lenni. (3.12) alapján egy adott rezonátorfrekvencia környezetében $F(\omega)$ fázisát dominánsan az adott rezonátorcsatorna és $A(\omega)$ határozza meg, ugyanis:

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_i} F(\omega) = \frac{\alpha}{2} \sum_{l=1, l \neq i}^N A(\omega_i) w_l (1 + j \text{ctg} \frac{\omega_i - \omega_l}{2}) + \alpha A(\omega_i) w_i \lim_{\omega \rightarrow \omega_i} (1 + j \text{ctg} \frac{\omega - \omega_i}{2}) \quad (3.14)$$

ahol a jobboldal első tagja α segítségével tetszőlegesen kicsinnyé tehető. A (3.11) feltétel tehát a következőképpen alakul:

$$-\pi/2 < \text{arc}(w_i) + \text{arc}(A(\omega_i)) < \pi/2; \quad i = 1..N \quad (3.15)$$

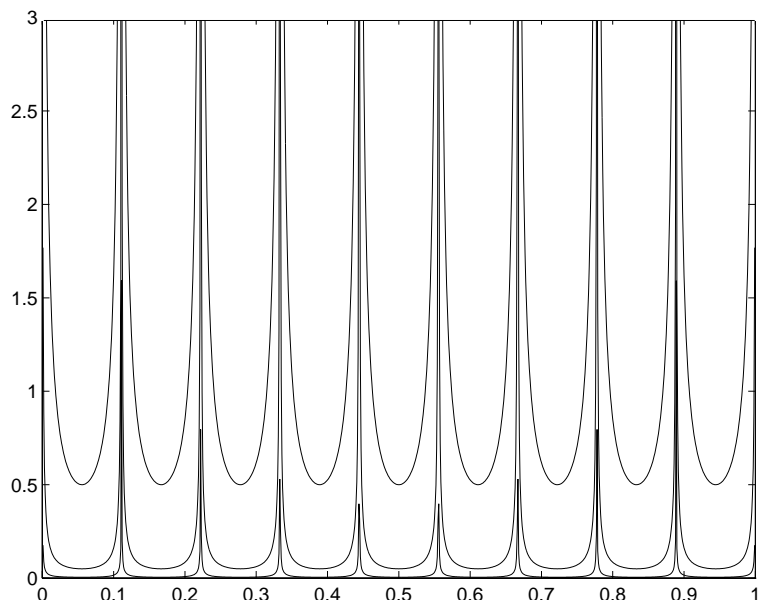
illetve kifejezve $\text{arc}(w_i)$ -t:

$$\text{arc}(w_i) \in (-\text{arc}(A(\omega_i)) - \pi/2; -\text{arc}(A(\omega_i)) + \pi/2); \quad i = 1..N \quad (3.16)$$

ahol (;) nyílt intervallumot jelent. Ez a stabilitás szükséges feltétele. Célszerű az

$$\text{arc}(w_i) = -\text{arc}(A(\omega_i)); \quad i = 1..N \quad (3.17)$$

beállítás, amely $\pi/2$ fázistartalékot biztosít. α értékét az szabja meg, hogy a kiadódó egynél nagyobb átvitelű intervallumokban $F(\omega)$ fázisa hogyan változik. Ha $A(\omega)$ magas



3.8. ábra. A nyílt hurok átviteli függvénye $|A(\omega)| = |w_i| = 1$ és $\alpha = 1, 0.1, 0.01$ mellett

fokszámú (pl. akusztikus átviteli függvény), a fázis gyorsan változik, és a pl. (3.17) egyenlet szerinti beállítás csak lokálisan érvényes, tehát csak kis α alkalmazható.

Az eredményeket összefoglalva tehát: a w_i paraméterek (3.16) szerinti beállításával, valamint az α konvergenciaparaméter megfelelő megválasztásával a zajelnyomó rendszer tetszőleges $A(z)$ mellett stabilizálható.

3.2.2 A paraméterek megválasztása

Az előző szakaszban megmutattam, hogy létezik olyan r_i készlet, amelyre a zajelnyomó rendszer stabil. Adott r_i készlet viszont egyértelműen meghatározza a visszacsatolatlan rezonátoros struktúra számlálóját. Ez a meghatározás egy-egy értelmű, azaz adott számlálópolinom egyértelműen meghatározza az r_i készletet. A következőkben megadom, hogy tetszőleges (esetleg a rezonátoros struktúrához nem kötődő eljárással adott) számláló esetén hogyan határozhatók meg az r_i paraméterek, majd javaslatot teszek egy konkrét beállításra.

Az r_i készlet meghatározása adott számláló esetén

A feladat megoldásához ismét az állapotváltozós leírást alkalmazzuk. (3.5) vagy a 3.9. ábra alapján az állapotváltozós leírás a következő:

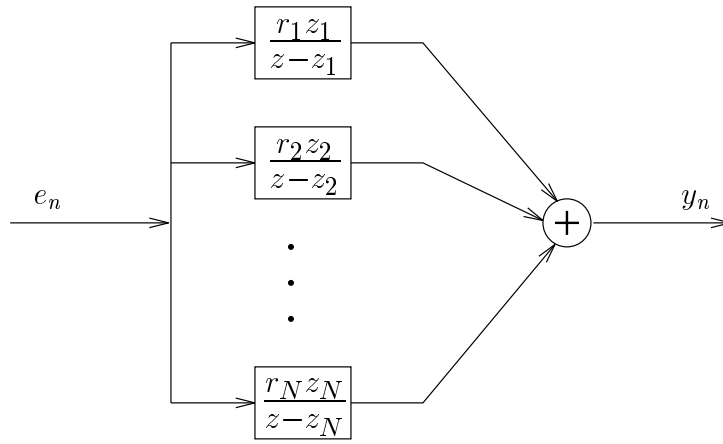
$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_n + \mathbf{b}e_n \\ \hat{y}_n &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}_n \end{aligned} \quad (3.18)$$

ahol \mathbf{x}_n jelöli az állapotvektort, és:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \langle z_i \rangle \\ \mathbf{b} &= \mathbf{g}; \quad g_i = r_i z_i; \quad i = 1 \dots N \\ \mathbf{c}^T &= [1, 1, \dots, 1] \end{aligned} \quad (3.19)$$

Az átviteli függvény kifejezése az alábbi:

$$R(z) = \mathbf{c}^T (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} = \frac{\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{c}^T) - \det(z\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A})} \quad (3.20)$$



3.9. ábra. Visszacatolatlan rezonátoros struktúra

ahol $\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{bc}^T)$ kifejtése (2.36) alapján már ismert. Így a teljes számláló a következőképpen írható:

$$\prod_{i=1}^N (z - z_i) \left[1 + \sum_{i=1}^N \frac{r_i z_i}{z - z_i} \right] - \prod_{i=1}^N (z - z_i) = N(z) \quad (3.21)$$

ahol $N(z)$ egy előírt, legfejebb $N - 1$ -edfokú polinom. Ebből leosztás után és a részlet-törtre alakítás szabályát alkalmazva kapjuk, hogy:

$$r_i = \frac{N(z_i)}{z_i \prod_{l=1, l \neq i}^N (z_i - z_l)} \quad (3.22)$$

amely egyenletes rezonátorelhelyezkedés esetén a következőképpen egyszerűsödik:

$$r_i = \frac{1}{N} N(z_i) \quad (3.23)$$

Az r_i készlet meghatározása $1/A(z)$ alapján

A Bevezetésben szerepelt, hogy az AFA az $r_i = 1/N$ paraméterkészlettel gyors beállású. Speciálisan, ha a rezonátorok egyenletesen helyezkednek el, a beállítás véges. Akár a 3.2.a, akár a 3.2.b ábrán látható elrendezést alkalmazzuk, a rezonátorok elhelyezkedése az AFA által meghatározott. A zajelnyomó hurokban azonban jelen van $A(z)$ is, így a beállítás általában nem véges, sőt, stabilitási problémák is jelentkeznek. Ha azonban a hurokban $1/A(z)$ -t alkalmazhatnánk, az így létrejövő rendszer az AFA-val megegyező sebességű lenne. Az inverz átviteli függvény azonban általánosságban nem stabil, így csak közelíteni lehet, amelyet a korábbiaknak megfelelően jelen esetben a visszacsatolatlan rezonátoros struktúra átviteli függvényének számlálójával tehetünk meg. Ez egy approximációs feladat, amelynek megoldásánál tekintetbe kell venni egyrészt a stabilitási követelményeket, másrészt azt a körülményt, hogy az inverz átviteli függvényt nem tetszőlegesen magas fokszámú polinommal közelítjük, a számlálópolinom fokszáma ugyanis az elnyomandó harmonikusok számától függ.

Az inverz átviteli függvény egy lehetséges közelítése a rezonátorpozíciókra támaszkodó Lagrange-interpolációs polinom. Ha a közelítés pontos (az inverz átviteli függvény egy legfejebb $N - 1$ -edfokú polinom), a beállítás az AFA-nak megfelelő, egyéb esetekben a közelítés hibája miatt ez nem teljesül, sőt, a rendszer labilis is lehet, így szükségünk van az α paraméterre. Ennek megfelelően a számlálópolinomot a következő alakban keressük:

$$N(z) = \alpha \sum_{k=1}^N \frac{1}{A(z_k)} L_k(z) = \alpha \sum_{k=1}^N \frac{1}{A(z_k)} \frac{\prod_{j=1, j \neq k}^N (z - z_j)}{\prod_{j=1, j \neq k}^N (z_k - z_j)} \quad (3.24)$$

Ezek után (3.22) segítségével meghatározhatók az egyes r_i paraméterek:

$$\begin{aligned}
r_i &= \frac{N(z_i)}{z_i \prod_{l=1, l \neq i}^N (z_i - z_l)} = \alpha \frac{\sum_{k=1}^N \frac{1}{A(z_k)} \frac{\prod_{j=1, j \neq k}^N (z_i - z_j)}{\prod_{j=1, j \neq k}^N (z_k - z_j)}}{z_i \prod_{l=1, l \neq i}^N (z_i - z_l)} = \\
&= \alpha \sum_{k=1}^N \frac{1}{A(z_k)} \frac{\prod_{j=1, j \neq k}^N (z_i - z_j)}{z_i \prod_{j=1, j \neq k}^N (z_k - z_j) \prod_{l=1, l \neq i}^N (z_i - z_l)}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Mivel:

$$\frac{\prod_{j=1, j \neq k}^N (z_i - z_j)}{z_i \prod_{j=1, j \neq k}^N (z_k - z_j) \prod_{l=1, l \neq i}^N (z_i - z_l)} = \begin{cases} 0 & \text{ha } k \neq i \\ \frac{1}{z_i \prod_{l=1, l \neq i}^N (z_i - z_l)} & \text{ha } k = i \end{cases} \tag{3.26}$$

(3.25) a következőképpen egyszerűsödik:

$$r_i = \alpha \frac{1}{A(z_i)} \frac{1}{z_i \prod_{l=1, l \neq i}^N (z_i - z_l)} \tag{3.27}$$

amely egyenletes rezonátorelhelyezkedés esetén tovább egyszerűsödik:

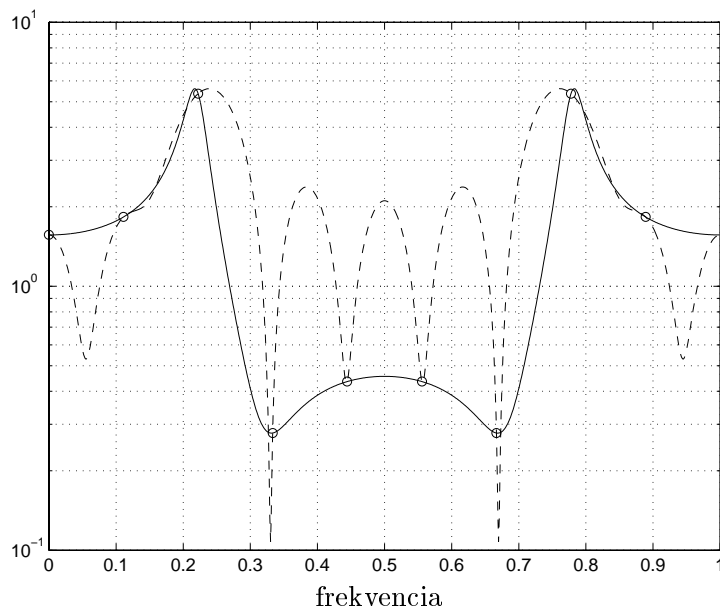
$$r_i = \frac{\alpha}{N} \frac{1}{A(z_i)} \tag{3.28}$$

Figyelembe véve, hogy az AFA az egyenletes rezonátorelhelyezkedést közelíti, a továbbiakban a (3.28) egyenlettel adott beállítást alkalmazzuk. Ez a beállítás egyébként megfelel a maximális fázistartalékot biztosító beállításnak is (ld. (3.17)), és ez független a rezonátorok elhelyezkedésétől. A gyakorlati megvalósítást figyelembe véve célszerű a (3.4) egyenletnek megfelelően a rezonátorcsatornákon a:

$$w_i = \frac{1}{A(z_i)} \tag{3.29}$$

súlyozást, míg a közös ágon az $1/N$ -nel és az α -val való szorzást alkalmazni. (Sok esetben célszerű $1/N$ -et α -ba beleírni.) Ebben az esetben úgy tekinthetjük, hogy az egyes rezonátorcsatornák valósítják meg az interpoláló alappolinomokat, és az interpoláció ezek w_i -vel súlyozott összegeként áll elő. A (3.29) egyenlet szemléletesen azt jelenti, hogy a w_i súlyozó együtthatókkal biztosítjuk, hogy legalább a rezonátorfrekvenciákon teljesüljön a véges, vagy közel véges beálláshoz szükséges -1 -es visszacsatolás.

A (3.28) szerinti beállítással $\alpha = 1$ mellett tehát a rezonátoros struktúra $N - 1$ -edfokú számlálópolinomja $1/A(z)$ -t közelíti. Amennyiben $A(z)$ -nek csak pólusai vannak (és legfeljebb $N - 1$), a rendszer véges impulzusválaszú lesz. (Ilyen $A(z)$ lehet pl. egy késleltetősor.) Ha $A(z)$ -nek $N - 1$ -nél több pólusa, vagy zérusai is vannak, a közelítés nem lesz hibátlan. A Lagrange-interpoláció a mintavételi pontokban hibátlan, ezért a stabilitás (3.16) szükséges feltétele mindig teljesül. Az interpoláció során az inverz átviteli függvényt csak néhány, a periodikus jel frekvenciáinak megfelelő pontban mintavételezzük, így a rezonátorfrekvenciák között az interpolációnak hibája van, mind az amplitúdó-, mind pedig a fázis karakterisztika közelítése hibával terhelt. A stabilitás feltételei egyrészt az interpoláló függvény kiemelési miatt, másrészt a rezonátorok környezetében a fázishiba miatt nem teljesülhetnek. Ezekben az esetekben a stabilitás α csökkentésével biztosítható, mivel a hurokerősítés csökkentésével a kiemelés megszűnik, illetve a rezonátorok nagy erősítésű környezete (ld. 3.8. ábra) leszűkül. α csökkentése viszont azt eredményezi, hogy az interpoláció a mintavételi pontokban sem lesz hibamentes. Amennyiben azonban az interpoláló polinom abszolút értéke az inverz átviteli függvény



3.10. ábra. Inverz átviteli függvény Lagrange-interpolációja. Folytonos vonal: az interpolálandó függvény; szaggatott vonal: az interpoláló függvény

valamely nagy abszolút értékű szakasza alatt van, az interpoláció hibájából nem következik α csökkentése. Az interpoláció javítására, amellyel a sebesség várhatóan növelhető, több lehetőség is kínálkozik, amelyekkel a 3.4 alfejezetben foglalkozom.

Az interpoláció hibáját szemlélteti a 3.10. ábra. A megvalósítandó átviteli függvény:

$$\frac{1}{A(z)} = \frac{z^2 + 0.6627z + 0.6414}{z^2 - 0.3373z + 0.8100} \quad (3.30)$$

Az ábrán folytonos vonal jelöli az interpolálandó függvényt, szaggatott az interpoláció eredményét, a mintavételi pontokat ($N = 9$) pedig körök. Bár az interpolálandó függvény csak egy másodfokú IIR szűrő átvitele, amelynek dinamikája kicsi, az amplitúdókarakterisztika közelítésének hibája jelentős. Az interpoláló alappolinom átviteli karakterisztikája miatt (ld. (2.50), 2.16. ábra), egyes rezonátorfrekvenciák között az interpoláló függvény abszolút értéke jelentősen meghaladja az interpolált függvény abszolút értékét, ezért elengedhetetlen α csökkentése, különben a rendszer nem stabil. A rendszer sebessége α választásától is függ, ezért azt úgy kell megválasztani, hogy a leggyorsabb beállást érjük el. (α megválasztása részletesen a 3.5.2. szakaszban szerepel.) A továbbiakban, ha zajelnyomó rendszerek sebességét hasonlítjuk össze, mindig feltételezzük α optimális beállítását.

Ha a rezonátorok nem egyenletesen helyezkednek el, az r_i paraméterek (3.28) szerinti megválasztása (3.27)-nek csak jó közelítése, tehát a struktúra számlálója nem az inverz átviteli függvényt approximálja. Ugyanakkor ebben az esetben a véges beálláshoz nem is ez tartozik, hanem annak egy súlyozott változata, amelyhez $1/A(z)$ és a véges beálláshoz szükséges (2.43) egyenlettel adott paraméterkészlet segítségével juthatunk, és (3.27) csupán az AFA-ban alkalmazott közelítésből származtatható pontos kifejezés. Másfelől ezekben az esetekben (3.27) nem biztosítja a maximális fázistartalékot, így (3.28) ebből a szempontból kedvezőbb beállítás. Mindezeket figyelembe véve a továbbiakban azzal az egyszerűsítéssel élünk, hogy zajelnyomó rendszerekben a (3.28) paraméterválasztás a leggyorsabb (véges) beállást biztosító inverz átviteli függvény approximációjából származik. Ezzel egyenértékű az, hogy a rezonátorokat mindig egyenletes elhelyezkedésűeknek tekintjük. Az ebből az egyszerűsítésből származó hiba egyébként általában elhanyagolható ahhoz a hibához képest, ami a kis számú pontra támaszkodó interpolációból adódik.

Ez az elhanyagolás tulajdonképpen azzal a már említett tulajdonsággal függ össze, hogy a zajelnyomó rendszer sebessége általában jóval kisebb, mint az AFA sebessége.

3.2.3 Konvergenciasebesség

A zajelnyomó rendszer sebességének döntő szerepe van az algoritmus minőségének megítélésében. Az előző szakaszban megmutattam, hogy a rezonátoros zajelnyomó struktúra r_i paramétereinek $1/A(z)$ alapján történő megválasztása egyes egyszerű esetekben tökéletes megoldást nyújt, azaz a rendszer az AFA-nak megfelelően közel véges beállású, általánosságban pedig a fázistartalék maximális. Kérdés azonban, hogy hogyan alakul a rendszer sebessége azokban az esetekben (és az esetek túlnyomó többsége ilyen), amelyekben az interpoláció hibával terhelt. Ennek a kérdésnek a megválaszolásához szükség van egy, a rendszer sebességét jellemző mennyiségre, illetve egy ennek alapján megfogalmazható követelményre. A következőkben először a leggyorsabb beállítására vonatkozó követelmény, és az ebből következő feladat megfogalmazására kerül sor, majd pedig annak elemzése következik, hogy a korábban javasolt paraméterbeállítás ezt a feladatot hogyan oldja meg.

A feladat megfogalmazása

Az $1/A(z)$ alapján történő együtthatótervezés azon alapult, hogy lineáris invariáns diszkrét idejű rendszerekben a véges beállást triviálisan az adott struktúra melletti leggyorsabb beállásnak tekintjük. A véges impulzusválaszú rendszerek sajátértékei a nilpotens állapotmátrix miatt zérusok, ezért sebesség szempontjából célszerű a rendszer legnagyobb abszolút értékű sajátértéke abszolút értékének a minimalizálása. Ha azonban a sajátértékek nem az origóban vannak, nem is feltétlenül egyenlők, így az, hogy a rendszer sebessége állapotmátrixának legnagyobb sajátértékével ragadható meg, bizonyításra szorul. Az állítás bizonyítása az A függelékben szerepel, alapgondolata pedig a következő: a rendszer tranziens válasza a sajátértékek hatványfüggvényeinek összege, ahol az egyes hatványfüggvények együtthatói a rendszer állapotváltozóinak kezdeti értékeitől függenek. Ebből az összegből viszont elegendően sok lépés után – az együtthatóktól függetlenül – dominánssá válik a legnagyobb sajátértékhez tartozó tag. Másfelől, tetszőleges kezdeti értéket tekintve, legrosszabb esetben az összes sajátértékhez tartozó együttható zérus, kivéve a legnagyobbhoz tartozót. A tranziens lecsengésének a legnagyobb sajátértékkel való becslése worst-case becslés, amely azonban indokolt. Pl. akusztikus zajelnyomás esetén a bemenőjel harmonikusainak amplitúdói, tehát az állapotváltozók kezdeti értékei az akusztikus átviteli függvények miatt igen változatos eloszlásúak lehetnek.

Rezonátoros zajelnyomó rendszerek esetében a feladat általánosságban úgy fogalmazható meg, hogy adott rezonátorpólusok és $A(z)$ mellett keresett az az r_i paraméterkészlet, amely a teljes visszacsatolt rendszer legnagyobb abszolút értékű sajátértékének abszolút értékét minimalizálja.

A javasolt paraméterválasztás verifikálása

A fenti feladat megoldásához szükségünk van a teljes rendszer állapotmátrixára. $A(z)$ állapotváltozós leírása legyen a következő:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{n+1}^a &= \mathbf{A}^a \mathbf{x}_n^a + \mathbf{b}^a s_n \\ y_n^a &= \mathbf{c}^a \mathbf{x}_n^a + d^a s_n \end{aligned} \quad (3.31)$$

ahol az a felső index utal $A(z)$ -re. Ezt és a visszacsatolatlan rezonátoros struktúra (3.18) alatti állapotváltozós leírását felhasználva az állapotegyenlet a következő:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{n+1} \\ \mathbf{x}_{n+1}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{z} \rangle - \alpha d^a \mathbf{g} \mathbf{w}^T & -\mathbf{g} \mathbf{c}^a \\ \alpha \mathbf{b}^a \mathbf{w}^T & \mathbf{A}^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_n \\ \mathbf{x}_n^a \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

ahol:

$$\mathbf{z} = [z_i]; \quad \mathbf{g} = \frac{1}{N}[z_i]; \quad \mathbf{w} = [w_i]; \quad i = 1..N \quad (3.33)$$

ahol most w_i ismeretlen paraméterkészletet jelöl (és természetesen α is ismeretlen). A (3.32) alatti hipermátrix blokkjai nem kommutatívák, ezért nem lehet megadni az ismert paraméterekkel olyan hasonlósági transzformációt, amely a mátrixot diagonalizálná [24]. A hipermátrix, sajnos, semmilyen speciális tulajdonsággal sem rendelkezik, így a sajátérték-feladatot teljesen általánosan kell megoldani. A spektrálfelbontás után pedig minimalizálni kell a karakterisztikus polinom maximális abszolút értékű gyökét a paramétervektor függvényében. A felmerült matematikai feladat megoldására nem került sor, csak numerikus vizsgálatokra. A paraméterek meghatározásának matematikai problémája érdekes további kutatási irányt jelöl ki. Minthogy azonban az $1/A(z)$ alapján történő együtthatótervezés az ideális inverz átviteli függvény egy approximációja, amely egyes egyszerű esetekben zérus minimális sajátértéket eredményez, feltételezhető, hogy általánosságban is a minimális sajátértékhez tartozó paraméterkészlet jó közelítést jelent.

A paraméterek legkedvezőbb beállítására vonatkozó feltételezés numerikus vizsgálatokkal támasztható alá. Ezen vizsgálatok elvégzésére a MATLAB hatékony környezetet biztosít. Az 5. fejezet részletesen tartalmazza az aktív zajelnyomáshoz kapcsolódó szimulációs környezet bemutatását, valamint példákkal demonstrálja az egyes algoritmusok működését. Ott szerepelnek a jelen feladatra vonatkozó példák is, így itt csak egyetlen példát közlök, a vizsgálati módszer bemutatása céljából.

A szimulációs program a (3.32) alatti állapotmátrix sajátértékeit, illetve ezek közül a maximális abszolút értékűt határozza meg. A függvény bemenete a w_i paraméterkészlet, valamint α , és a legnagyobb abszolút értékű sajátérték abszolút értékét mint α függvényét adja vissza. Ily módon egy w_i készlettel paraméterezett görbesereghez juthatunk, és az a w_i készlet a legkedvezőbb, amelyhez tartozó görbe minimuma az összes görbe minimumának a minimuma. A paramétertér nagy mérete miatt vizsgálatainkhoz a w_i paraméterek (3.29) szerinti megválasztásából indulhatunk ki, és a görbesereg egy elemét a módosított:

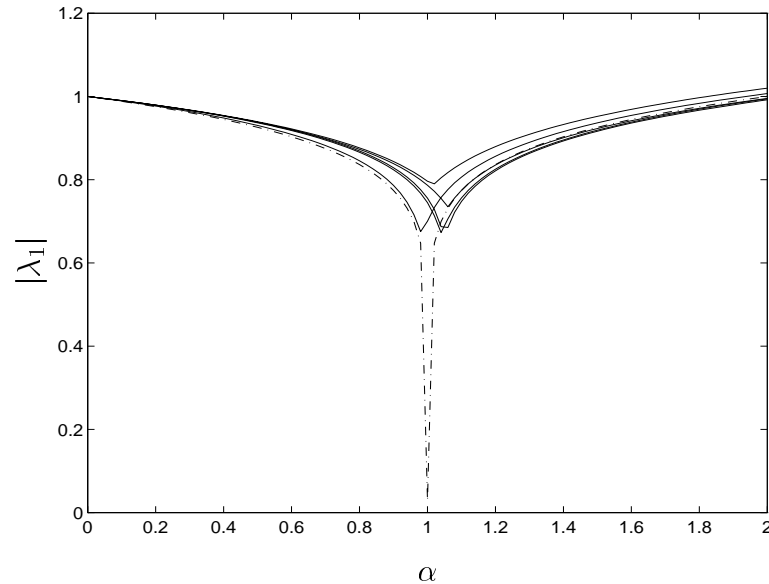
$$w_i = \zeta_i w_{0,i} \quad (3.34)$$

készlettel számíthatjuk ki, ahol $w_{0,k}$ a kiindulási paraméterkészlet és ζ_i komplex valószínűségi változó, úgy, hogy:

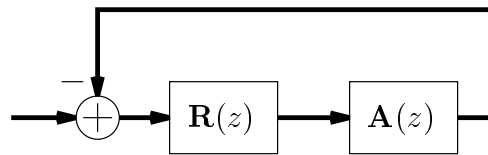
$$E\{|\zeta_i|\} = 1; \quad E\{\text{arc}(\zeta_i)\} = 0 \quad (3.35)$$

Ezzel a paramétertér “bejárásának” mértéke attól függ, hogy milyen ζ eloszlása, illetve mekkora a szórása. A szórást kicsinyre választva jól tesztelhető, hogy az adott $w_{0,i}$ készlet lokális optimum-e. A paramétertér teljes bejárása irreális, de véletlenszerűen egy-egy beállítás nagy szórást alkalmazva vizsgálható.

A vizsgálati módszer demonstrálása céljából tekintsük az egyszerű $A(z) = z^{-1}$ esetet, $N = 9$ egyenletesen elhelyezett rezonátorral. Ekkor a korábbiak szerint a rezonátoros zajelnyomó a paraméterek (3.29) szerinti megválasztásával véges beállítású, tehát a rendszer valamennyi sajátértéke zérus. A 3.11. ábrán láthatók az egyes kísérletekhez tartozó maximális sajátértékek α függvényében. A pontozott görbe tartozik a (3.29) szerinti beállításhoz, míg a folytonos görbék olyan beállításokhoz, ahol ζ_i egyenletes eloszlású



3.11. ábra. A zajelnyomó rendszer legnagyobb sajátértéke α függvényében. Pontozott vonal: a (3.29) szerinti beállítással; folytonos vonalak: a paraméterek kismértékű megváltoztatásával



3.12. ábra. Többcsatornás zajelnyomó hurok blokkvázlata

valós valószínűségi változó a $[0.85; 1.15]$ intervallumban. Jól látható, hogy a maximális sajátérték a javasolt paraméterállítással $\alpha = 1$ mellett zérus, míg más w_i készlettel ez egyéb α érték mellett sem teljesül.

Az ilyen módon elvégzett (és az 5. fejezetben több példával is bemutatott) vizsgálatok eredményét összegezve, valamint figyelembe véve, hogy (3.29) a véges beállást biztosító inverz átviteli függvény approximációjából adódik, valószínűsíthető, hogy a w_i paraméterek beállítására vonatkozó javaslat a rezonátoros zajelnyomó rendszer sebessége szempontjából optimális.

3.3 Többcsatornás rendszer tervezése

A többcsatornás rendszerek tervezése során alapozhatunk az előző alfejezetben megfogalmazott állításokra. Az egycsatornás rendszerekre való visszautalás miatt a stabilitásról, a paraméterek megválasztásáról, illetve a rendszer sebességéről szóló szakaszok a korábbiaknál rövidebbek. Új szempontként jelenik meg viszont a bemenetek és kimenetek különböző számából adódó esetek diszkussziója, a zajelnyomás állandósult állapotának vizsgálata pedig külön szakaszban szerepel.

3.3.1 Stabilitás

Az egycsatornás rendszer vizsgálatához hasonló módon tekintsük először a 3.12. ábrát. Az ábrán a vastag vonalak utalnak arra, hogy az egyes jelek vektorok. A rendszer nyílt

hurkú átviteli függvénye (3.5) és (3.6) felhasználásával:

$$\mathbf{F}(z) = \mathbf{A}(z) \sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i Q'_i(z) \quad (3.36)$$

ahol \mathbf{R}_i a hibajelvektort a rezonátorok bemeneteire csatoló mátrix. Ha (a Bevezetésben alkalmazott jelöléseket használva) $\mathbf{A}(z)$ mérete $L \times M$, akkor $\mathbf{R}_i \in \mathbf{C}^{M \times L}$. A rezonátorokat továbbra is az egységkör belsejéhez sorolva a többdimenziós rendszerek stabilitására vonatkozó Nyquist-kritérium szerint a negatívan visszacsatolt rendszer akkor stabil, ha $\mathbf{F}(\omega)$ sajátértékei (amelyek szintén frekvenciafüggőek) közül egyik sem öleli körül a -1 pontot [25]. (3.36) a (3.4) egyenletet a

$$\mathbf{R}_i = \alpha \mathbf{W}_i; \quad \mathbf{W}_i \in \mathbf{C}^{M \times L} \quad (3.37)$$

alakban felhasználva a következő:

$$\mathbf{F}(\omega) = \alpha \mathbf{A}(\omega) \sum_{i=1}^N \mathbf{W}_i Q'_i(\omega) \quad (3.38)$$

A stabilitás feltétele, hogy a

$$\lambda_l(\omega) = \lambda_l \left(\alpha \mathbf{A}(\omega) \sum_{i=1}^N \mathbf{W}_i Q'_i(\omega) \right); \quad l = 1..L \quad (3.39)$$

sajátértékek közül egyik sem öleli körül a -1 pontot, amely a rezonátorfrekvenciák között α megválasztásával teljesíthető, hiszen

$$\lambda_l \left(\alpha \mathbf{A}(\omega) \sum_{i=1}^N \mathbf{W}_i Q'_i(\omega) \right) = \alpha \lambda_l \left(\mathbf{A}(\omega) \sum_{i=1}^N \mathbf{W}_i Q'_i(\omega) \right); \quad l = 1..L \quad (3.40)$$

és α -t kellően kicsinyre választva, mivel $A(\omega)$ és $Q'_i(\omega)$ véges, $\mathbf{F}(\omega)$ sajátértékei is eleendően kicsik lehetnek. Az egysatosornás rendszerekhez hasonló megfontolással adódik, hogy a rezonátorfrekvenciák környezetében $\mathbf{F}(\omega)$ -ban az adott frekvenciához tartozó rezonátor átvitele dominál, azaz $Q'_i(\omega)$ (3.7) alatti kifejezését is behelyettesítve (3.14) mintájára:

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_i} \lambda_l(\omega) = \frac{\alpha}{2} \lambda_l \left(\sum_{k=1, k \neq i}^N \mathbf{A}(\omega_i) \mathbf{W}_k (1 + j \operatorname{ctg} \frac{\omega_i - \omega_k}{2}) + \mathbf{A}(\omega_i) \mathbf{W}_i \lim_{\omega \rightarrow \omega_i} (1 + j \operatorname{ctg} \frac{\omega - \omega_i}{2}) \right) \quad (3.41)$$

A k -adik rezonátor átvitelét kiemelve adódik, hogy:

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_i} \lambda_l(\omega) = \frac{\alpha}{2} \lim_{\omega \rightarrow \omega_i} (1 + j \operatorname{ctg} \frac{\omega - \omega_i}{2}) \lambda_l(\mathbf{A}(\omega_i) \mathbf{W}_i) \quad (3.42)$$

Ezek után (3.11), (3.15) és (3.42) alapján megfogalmazható a többcsatornás zajelnyomó hurok stabilitásának szükséges feltétele:

$$\begin{aligned} -\pi/2 < \operatorname{arc}(\lambda_{l,i}) < \pi/2 \\ \lambda_{l,i} &= \lambda_l(\mathbf{A}(\omega_i) \mathbf{W}_i); \quad l = 1..L, \quad i = 1..N \end{aligned} \quad (3.43)$$

azaz a sajátértékek valós része legyen pozitív.

A rezonátoros zajelnyomó rendszer tervezése során tehát meg kell határozni \mathbf{W}_i -t, úgy, hogy a fenti stabilitási feltétel kielégüljön. Amennyiben $M = L$, azaz a kimenetek száma megegyezik a bemenetek számával, a feladat megoldhatósága nem kérdéses.

Ha $M > L$, azaz a kimenetek száma nagyobb, mint a bemeneteké, a feladat szintén megoldható, hiszen (az elfajuló esetektől eltekintve) $\text{rank}(\mathbf{A}(\omega_i)) = \text{rank}(\mathbf{W}_i) = L$. A gyakorlati szempontból oly fontos $M < L$ esetben azonban, tehát, ha a kimenetek száma kisebb, mint a bemeneteké, $\text{rank}(\mathbf{A}(\omega_i)) = \text{rank}(\mathbf{W}_i) = M$, így az L sajátérték nem állítható be tetszőlegesen. Ebben az esetben $\mathbf{F}(\omega)$ M diád összege, ezért (lineárisan független diádokat feltételezve):

$$\lambda_{l,i} = 0; \quad l = M + 1..L, \quad i = 1..N \quad (3.44)$$

Ezek a sajátértékek a zajelnyomó rendszer struktúrájából adódóan pontosan zérusok, így stabilitási problémát nem okoznak. A feladat tehát ebben az esetben is megoldható.

3.3.2 A paraméterek megválasztása, konvergenciasebesség

Az egycsatornás rendszerek esetében javasolt paraméterválasztás előnyeit ismerve legyen:

$$\mathbf{W}_i = \mathbf{A}^\#(\omega_i); \quad i = 1..N \quad (3.45)$$

ahol $\mathbf{A}^\#(\omega_i)$ az $\mathbf{A}(\omega_i)$ mátrix pszeudoinverzét jelenti. A stabilitás (3.43) feltételét ez a választás a következőképpen teljesíti:

1. $M = L$ esetén

$$\mathbf{W}_i = \mathbf{A}^{-1}(\omega_i); \quad i = 1..N \quad (3.46)$$

a pszeudoinverz helyett a közönséges inverz is számítható, és

$$\mathbf{A}(\omega_i)\mathbf{W}_i = \mathbf{A}(\omega_i)\mathbf{A}^{-1}(\omega_i) = \mathbf{I}_M \quad (3.47)$$

ahol \mathbf{I}_M M -edrendű egységmátrix, tehát a sajátértékek valósak, a stabilitási feltélt triviálisan kielégítik.

2. $M > L$ esetén a (3.45) képlettel kell számolni, és

$$\mathbf{A}(\omega_i)\mathbf{W}_i = \mathbf{A}(\omega_i)\mathbf{A}^\#(\omega_i) = \mathbf{I}_M \quad (3.48)$$

Az előző esethez hasonlóan a stabilitási feltétel kielégül.

3. $M < L$ esetén pedig

$$\mathbf{A}(\omega_i)\mathbf{W}_i = \mathbf{A}(\omega_i)\mathbf{A}^\#(\omega_i) = \mathbf{P}_M = \mathbf{U} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_M & \\ & \mathbf{0}_{L-M} \end{bmatrix} \mathbf{V}^H \quad (3.49)$$

egy L -edrendű, M -edrangú hermitikus projektorhoz jutunk [24], amelynek sajátértékei a (3.44) egyenlettel összhangban szintén kielégítik a stabilitás feltételét.

A fenti paraméterválasztással tehát a stabilitás (3.43) feltétele maximális fázisstartalékkal kielégül. Az $M \geq L$ esetben $\mathbf{F}(\omega_i)$ M -edrendű egységmátrix. Ez azt jelenti, hogy a többszatornás zajelnyomó rendszer a rezonátorfrekvenciákon szétszétolódik M független egycsatornás rendszerre. Az alábbiakban a zajelnyomó rendszer javasolt paraméterbeállítás melletti sebességviszonyait elemzem.

A (3.36) egyenlet és a 3.3.2 szakasz eredményei alapján a rezonátoros struktúra átviteli mátrixa olyan mátrix, amelynek minden eleme z -nek legfeljebb $N - 1$ -edfokú polinomja. A \mathbf{W}_i mátrix (3.45) szerinti megválasztása $\mathbf{A}^{-1}(z)$ Lagrange-interpoláción alapuló közelítését jelenti. Amennyiben $M \geq L$, és az inverz átviteli függvény mátrix elemei valóban z -nek legfeljebb $N - 1$ -edfokú polinomjai, a közelítés pontos, és a

többszatszornás zajelnyomó rendszer M független egyszatszornás rendszerre csatolódik szét. Mivel ilyenkor

$$\mathbf{F}(z) = \mathbf{I}_M Q'_i(z) \quad (3.50)$$

a rendszer (illetve rendszerek) beállása az AFA-nak megfelelő. Sajnos, általánosságban nem teljesül, hogy az átvitel inverze polinomelemű mátrix lenne, így a közelítés hibával terhelt. ($\mathbf{A}^{-1}(z)$ általában még akkor sem polinomelemű, ha $\mathbf{A}(z)$ elemeinek egyébként csak pólusai voltak.) További problémát jelent az, hogy az $M < L$ esetben $\mathbf{F}(z)$ nem diagonálmátrix, és a rendszer nem csatolódik szét.

A többsatszornás zajelnyomó rendszer \mathbf{W}_i mátrixának (3.45) szerinti megválasztása tehát stabilitási és sebességi szempontból az egyszatszornás rendszerekhez hasonló, tehát az optimálist közelítő megoldást nyújt. A következő pontban ennek a beállításnak az $M < L$ esetre vonatkozó előnyét ismerhetjük meg.

3.3.3 Az állandósult állapot jellemzése

Az eddigiekben a stabilitási vizsgálatokhoz a nyílthurkú átviteli függvényt vizsgáltuk. Ebben az alfejezetben a zárt rendszert elemezzük. A Bevezetésben alkalmazott jelölésekkel a rezonátoros zajelnyomó rendszer átvitele a következőképpen írható fel:

$$\mathbf{y}(\omega) = \alpha \sum_{i=1}^N Q'_i(\omega) \mathbf{W}_i \mathbf{e}(\omega) = \alpha \sum_{i=1}^N Q'_i(\omega) \mathbf{W}_i [\mathbf{d}(\omega) - \mathbf{A}(\omega) \mathbf{y}(\omega)] \quad (3.51)$$

amely $\mathbf{y}(\omega)$ -ra rendezve:

$$\left(\alpha \sum_{i=1}^N Q'_i(\omega) \mathbf{W}_i \mathbf{A}(\omega) + \mathbf{I}_M \right) \mathbf{y}(\omega) = \alpha \sum_{i=1}^N Q'_i(\omega) \mathbf{W}_i \mathbf{d}(\omega) \quad (3.52)$$

Általánosságban a zárójeles kifejezés invertálható, ezért:

$$\mathbf{y}(\omega) = \left(\alpha \sum_{i=1}^N Q'_i(\omega) \mathbf{W}_i \mathbf{A}(\omega) + \mathbf{I}_M \right)^{-1} \left(\alpha \sum_{i=1}^N Q'_i(\omega) \mathbf{W}_i \mathbf{d}(\omega) \right) \quad (3.53)$$

Ezek után képezni kell az $\omega \rightarrow \omega_k$ határértéket. Ehhez (3.53)-t a következőképpen írhatjuk:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(\omega) &= \left(\alpha \sum_{i=1}^N Q'_i(\omega) \mathbf{W}_i \mathbf{A}(\omega) + \mathbf{I}_M \right)^{-1} \left(\alpha \sum_{i=1, i \neq k}^N Q'_i(\omega) \mathbf{W}_i \mathbf{d}(\omega) + \alpha Q'_k(\omega) \mathbf{W}_k \mathbf{d}(\omega) \right) = \\ &= \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C} \end{aligned} \quad (3.54)$$

ahol az \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} mátrixok természetesen ω függvényei. Ezzel:

$$\mathbf{y}(\omega_k) = \lim_{\omega \rightarrow \omega_k} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C} = \lim_{\omega \rightarrow \omega_k} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C} \quad (3.55)$$

ugyanis \mathbf{A}^{-1} zérushoz tart, \mathbf{B} elemei pedig végesek. Behelyettesítve újra $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{C}$ kifejezését:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(\omega_k) &= \lim_{\omega \rightarrow \omega_k} (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{C}) = \lim_{\omega \rightarrow \omega_k} \left[\left(\alpha Q'_k(\omega) \mathbf{W}_k \mathbf{A}(\omega_k) + \alpha \sum_{i=1, i \neq k}^N Q'_i(\omega_i) \mathbf{W}_i \mathbf{A}(\omega_k) + \mathbf{I}_M \right)^{-1} \times \right. \\ &\quad \left. \times \alpha Q'_k(\omega) \mathbf{W}_k \mathbf{d}(\omega_k) \right] \end{aligned} \quad (3.56)$$

Kiemelve $\alpha Q'_k(\omega)$ -t:

$$\mathbf{y}(\omega_k) = \lim_{\omega \rightarrow \omega_k} \left[\frac{1}{\alpha Q'_k(\omega)} \left(\mathbf{W}_k \mathbf{A}(\omega_k) + \sum_{i=1, i \neq k}^N \frac{Q'_i(\omega_k)}{\alpha Q'_k(\omega)} \mathbf{W}_i \mathbf{A}(\omega_k) + \frac{\mathbf{I}_M}{\alpha Q'_k(\omega)} \right)^{-1} \alpha Q'_k(\omega) \mathbf{W}_k \mathbf{d}(\omega_k) \right] \quad (3.57)$$

A határértékképzést elvégezve:

$$\mathbf{y}(\omega_k) = (\mathbf{W}_k \mathbf{A}(\omega_k))^{\#} \mathbf{W}_k \mathbf{d}(\omega_k) \quad (3.58)$$

A közönséges inverz helyett ismét megjelent a pszeudoinverz, hiszen a közönséges invertálás $M > L$ esetben nem végezhető el. A 2.3 alfejezetből a (2.26) egyenlet alapján ismert $\mathbf{y}(\omega_k)$ optimális megoldása. Rezonátoros zajelnyomó esetén az egyes eseteket elkülönítve vizsgálhatjuk.

1. $M = L$ esetén az invertálást elvégezve:

$$\mathbf{y}(\omega_k) = \mathbf{A}(\omega_k)^{-1} \mathbf{W}_k^{-1} \mathbf{W}_k \mathbf{d}(\omega_k) = \mathbf{A}(\omega_k)^{-1} \mathbf{d}(\omega_k) \quad (3.59)$$

A megoldás egyértelmű, és a rezonátoros struktúra tetszőleges (a stabilitási feltételeket kielégítő) \mathbf{W}_k és α esetén az optimális megoldáshoz konvergál.

2. $M > L$ esetén a pszeudoinverzet kifejtve:

$$\mathbf{y}(\omega_k) = \mathbf{A}(\omega_k)^{\#} \mathbf{W}_k^{\#} \mathbf{W}_k \mathbf{d}(\omega_k) = \mathbf{A}(\omega_k)^{\#} \mathbf{I}_L \mathbf{d}(\omega_k) \quad (3.60)$$

A rezonátoros struktúra itt is az optimális megoldáshoz konvergál, tetszőleges (a stabilitási feltételeket kielégítő) \mathbf{W}_k és α esetén, amely szerint $\|\mathbf{y}(\omega_k)\|$ ebben az esetben minimális.

3. $M < L$ esetén az invertálás megintcsak elvégezhető:

$$\mathbf{y}(\omega_k) = (\mathbf{A}(\omega_k) \mathbf{W}_k)^{-1} \mathbf{W}_k \mathbf{d}(\omega_k) \quad (3.61)$$

amely, ha alkalmazzuk a javasolt $\mathbf{W}_k = \mathbf{A}(\omega_k)^{\#}$ beállítást, a következőképpen egyszerűsödik:

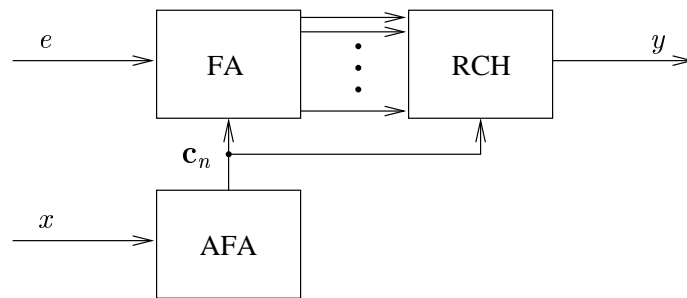
$$\mathbf{y}(\omega_k) = \mathbf{I}_M \mathbf{A}(\omega_k)^{\#} \mathbf{d}(\omega_k) \quad (3.62)$$

A fenti két egyenlet igen fontos és érdekes eredmény. Bár a javasolt paraméterválasztással a rezonátoros struktúra az optimális megoldáshoz konvergál, azaz minimalizálja a hiba normáját, ebben, a gyakorlat szempontjából kiemelkedő jelentőségű esetben nem választható meg tetszőlegesen \mathbf{W}_k . Ez az eredmény is igazolja a (3.45) paraméterválasztás helyességét. Ugyanakkor α értékétől (amelyet sokszor kísérletileg állapítanak meg) itt sem függ a maradó hiba.

Az eredményeket összegezve, a rezonátoros zajelnyomó struktúra a 3.3.2 szakaszban javasolt paraméterbeállítással állandósult állapotban a 2.3 alfejezetben megfogalmazott optimális megoldást adja.

3.4 A konvergenciasebesség növelése

A 3.2.2 és 3.2.3 szakaszokban megmutattam, hogy a zajelnyomó struktúra szabad paramétereit $1/A(z)$ alapján megválasztva az optimális megoldás egy közelítését kapjuk. Ez a közelítés hibával terhelt, több okból is. Egyrészt $1/A(z)$ realizálhatatlan, ha $A(z)$ nem minimálfázisú; másrészt azt a strukturális kötést alkalmaztuk, hogy az inverz átviteli függvényt a rezonátoros struktúra számlálója valósítja meg. Ez utóbbi választás



3.13. ábra. A hibajel Fourier-felbontásán alapuló zajelnyomó rendszer

összhangban van a 2.2 alfejezetben kifejtettekkel, és az adaptív szűrős zajelnyomó rendszerekhez képest – mint azt a 4. fejezetben megmutatom – nem jelent hátrányt. (Éppen az a probléma jelmodell alapú megközelítésének lényege, hogy a jelmodellhez kapcsolódó megfigyelő paramétereit kell meghatározni.) Lényeges még, hogy az ideális inverz átviteli függvényt csak néhány pontban mintavételezzük, és a pontok számát nem az approximálandó függvény, hanem az elnyomandó periodikus zaj harmonikusainak száma szabja meg. Van ennek egy érdekes következménye is: minél több harmonikus elnyomására kerül sor adott $A(z)$ mellett, annál gyorsabb lehet a rendszer (bizonyos határig). Ebben az alfejezetben a rezonátoros zajelnyomó struktúra olyan, a jelmodell alapú jelfeldolgozás alap gondolatát nem sértő – kanonikusnak is nevezhető – módosítási, illetve kiegészítési lehetőségeit mutatom be, amelyekkel az inverz átviteli függvény közelítése javítható, ezzel a rendszer sebessége növelhető.

Az $1/A(z)$ mintái alapján történő paraméterválasztás voltaképpen a frekvenciamintavételi eljárás alkalmazása. Az approximáció minőségének javítására így elsőként az alappontok számának növelése kínálkozik. Ezzel a megoldással kapcsolatban azonban több probléma is felmerül. Az adott struktúrában az alappontok számának a növelése a rezonátorok számának növelését jelenti. Ha tehát $1/A(z)$ alapján nagy pontszámú közelítést kell alkalmazni, az AFA oldaláról nézve ez “aláosztást” jelent, azaz a bemenő-jel szubharmonikusain, illetve azok felharmonikusain is kell működtetni rezonátorokat. $1/A(z)$ approximációjának ilyen növelésével a rezonátoros struktúra számításigénye jelentősen megnő, hiszen (vö. (2.55)) a legtöbb számítást a bázisfüggvények új értékeinek kiszámítása igényli.

A 3.2.2 szakaszban bemutatott példa elemzésében is szerepelt, hogy a Lagrange-interpoláció hibája az interpolálandó függvény kevés számú pontban való mintavételekor annak (is) köszönhető, hogy az egyes alappolinomok (2.50) a mintavételi ponthoz tartozó lokális információt viszonylag széles tartományban nagy súllyal szerepeltetik. Stabilitási okokból kedvezőtlen ugyanis, ha az interpoláló függvény abszolút értéke nagyobb, mint az interpolált függvény abszolút értéke, mert ebben az esetben a rendszer csak α csökkentésével stabilizálható, és így az interpoláció a mintavételi pontokban sem pontos, ami a sebesség további csökkenését eredményezi. Amennyiben azonban az interpoláló polinom abszolút értéke kisebb, mint az interpolálandó függvény, az interpoláció hibájából nem következik α csökkentése, így a rendszer sebessége azonos interpolációs hiba esetén az utóbbi esetben kevésbé csökken. Ez az aszimmetria felveti az approximációs feladat finomításának igényét. Abban az esetben, ha $1/A(z)$ (tehát $A(z)$) dinamikája nagy, célszerű olyan interpolációt alkalmazni, amelynek átvitele rezonátorfrekvenciákon továbbra is egységnyi, de a rezonátorfrekvenciák között kisebb. Kézenfekvő tehát a gondolat, hogy alappolinomként olyan polinomot válasszunk, amely a Lagrange-interpolációs alappolinomnál “gyorsabban csillapodik”. A következőkben egy ilyen interpolációt megvalósító megoldást ismertetek.

A 3.13. ábrán látható rendszer az eddigiektől annyiban különbözik, hogy a hibajelet

egy nem adaptív Fourier-analizátor (FA, 2.13. ábra) komponenseire bontja, és a zaj-elynyomást megvalósító (RCH-val jelölt) rezonátorok bemeneteire ezek a komponensek kerülnek. Mindkét struktúra rezonátorait az AFA hangolja a referenciajel alapján. FA egy szűrőbankot valósít meg, ahol egy csatorna átvitele a (2.49) egyenlettel adott. Ez az átvitel egyébként véges beállítás esetén az adott rezonátorelrendezéshez tartozó Lagrange-féle interpoláló alappolinom, a kauzalitásnak megfelelően z^{-N} -nel szorozva. FA paramétereit a zajelnyomó huroktól függetlenül, a 2.5 alfejezetben leírtak szerint kell beállítani, tehát a beállítás általánosságban nem véges, de gyors. Ennek megfelelően $T_i(z)$ karakterisztikája sem felel meg a Lagrange-féle interpoláló alappolinomnak, de annak jó közelítése. Az RCH-hoz tartozó r_i paramétereket továbbra is a 3.2.2 szakaszban leírtak szerint lehet beállítani, ugyanis:

$$T_i(z_i) = 1 \quad (3.63)$$

A (3.29) szerinti paraméterbeállítás mellett (3.24) egyenlet jelöléseit is felhasználva ez a struktúra $1/A(z)$ -t a következő alakban állítja elő:

$$\frac{1}{A(z)} \approx \sum_{i=1}^N \frac{1}{A(z_i)} L_i(z) T_i(z) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{A(z_i)} L_i^2(z) z^{-N} \quad (3.64)$$

ahol $L_i(z)$ egyenletes rezonátorpozíciók esetén a Lagrange-féle interpoláló alappolinom, amelynek abszolút értéke a (2.50) egyenlettel adott. A fenti interpoláció alappolinomként a Lagrange-féle interpoláló alappolinom négyzetét tekinti. A $T_i(z)$ -ben szereplő z^{-N} miatt a fázis approximációja romlik, de (3.63) miatt stabilitási problémát nem okoz. Mivel az adott hurokban RCH csatornáinál révén már van késleltetés, megtehető, hogy FA-ból a késleltetők elől csatolunk ki. Ekkor a (2.49) a következőképpen módosul:

$$T_i'(z) = \frac{z Q_i(z)}{1 + \sum_{l=1}^N Q_l(z)} \quad (3.65)$$

Mivel azonban:

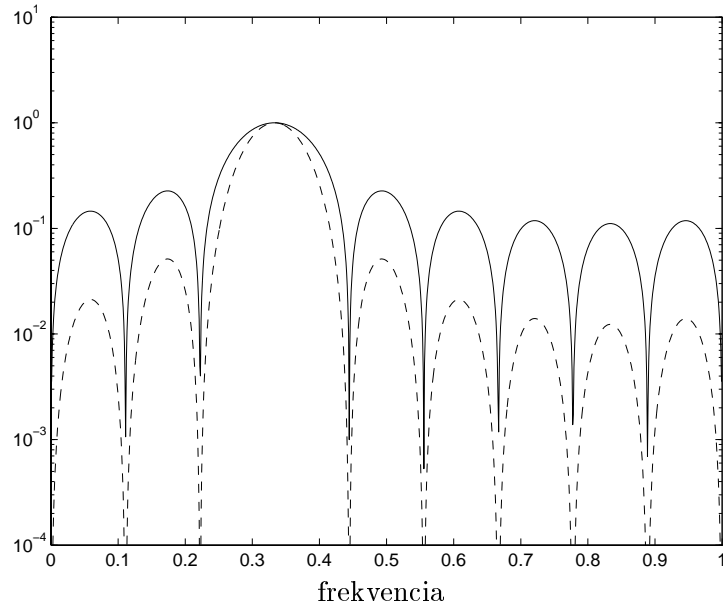
$$T_i'(z_i) = z_i \quad (3.66)$$

az egyes csatornákon egy z_i szorzótényezővel kompenzálni kell. Ebben az esetben a (3.64) egyenlet a következő alakú:

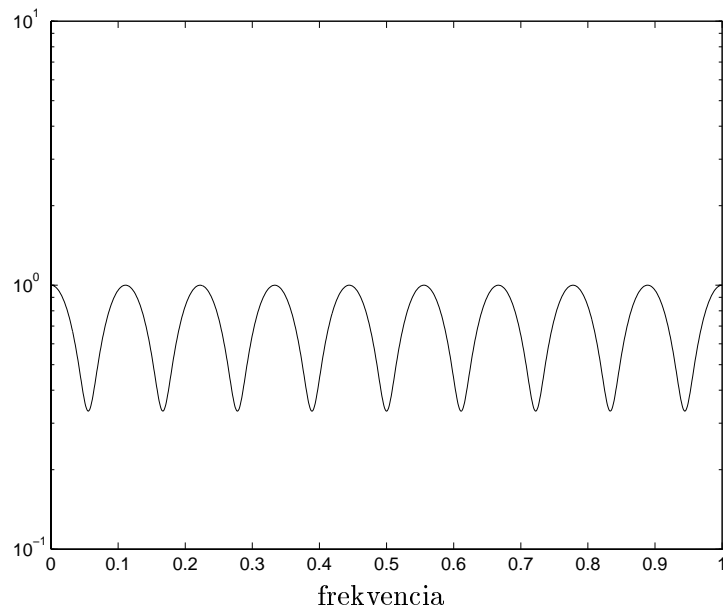
$$\frac{1}{A(z)} \approx \sum_{i=1}^N \frac{1}{A(z_i)} L_i^2(z) z^{-(N-1)} \quad (3.67)$$

amely a sebesség kismértékű további növekedését teszi lehetővé. Amint azonban a következő példák segítségével bemutatom, a négyzetes Lagrange-interpoláció előnyei az interpoláló alappolinomok abszolút értékéből erednek.

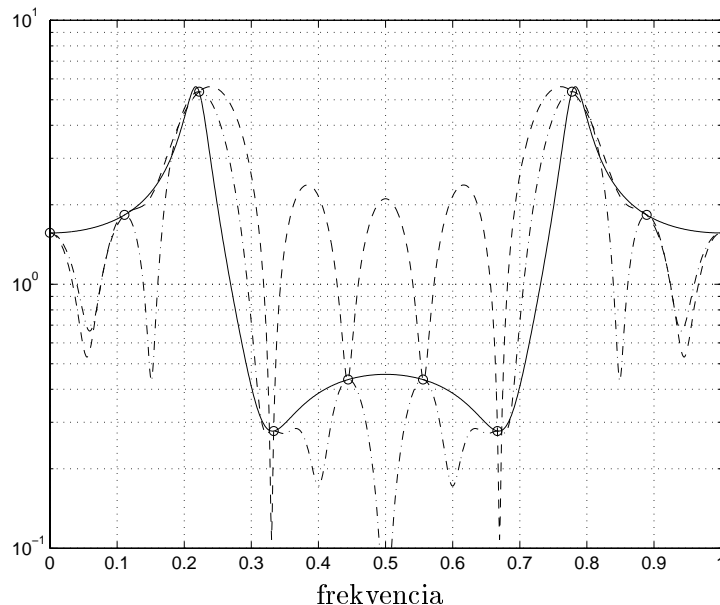
A 3.14. ábra a kétféle alappolinom abszolút értékét ábrázolja a $i = 4$, $N = 9$ esetre. (Az ábrán folytonos vonal jelöli $|L_i(f)|$ -et és szaggatott $|L_i^2(f)|$ -et.) Az N -edfokú Lagrange-interpoláció egy $N - 1$ -edfokú polinomot nulla hibával interpolál. Speciálisan, az azonosan egy függvényt az alappolinomok összege adja. Amennyiben (3.64) szerint az interpoláció alappolinomja a megfelelő Lagrange-polinom négyzete, ez már nem teljesül, ezt mutatja a 3.15. ábra. Ez az általánosságban káros tulajdonság esetünkben hasznos, mert éppen a rezonátorfrekvenciák közötti átvitel elnyomása a cél. Az interpoláció további tulajdonságait a 3.2.2 szakaszban is bemutatott példa segítségével elemezhetjük. Az interpolálandó függvény tehát a (3.30) képlettel adott átviteli függvény. Az interpoláció eredményét az egyszerű Lagrange-interpolációval együtt a 3.16. ábra mutatja. Az ábrán folytonos vonal jelöli az interpolálandó függvényt és a szaggatott a Lagrange-interpoláció eredményét. A pontozott vonal tartozik a négyzetes Lagrange-interpolációhoz. Az ábra alapján a négyzetes Lagrange-interpoláció az adott inverz átviteli függvény



3.14. ábra. A Lagrange-féle interpoláló alappolinom (folytonos vonal) és négyzete (szaggatott vonal)



3.15. ábra. $A(z) \equiv 1$ interpolációja az $L_i^2(f)$ polinomok összegeként



3.16. ábra. Inverz átviteli függvény Lagrange- és négyzetes Lagrange-interpolációja. Folytonos vonal: az interpolálandó függvény; szaggatott vonal: Lagrange-interpoláció; pontozott vonal: négyzetes Lagrange-interpoláció

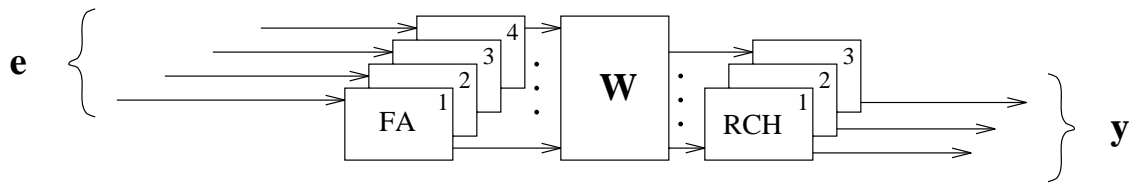
jobb közelítést adja, elsősorban azért, mert jobban követi az inverz átviteli függvény dinamikáját, ezért nincs szükség a stabilitás érdekében α olyan drasztikus csökkentésére, mint az egyszerű Lagrange-interpoláció esetében. Lényeges különbség még, hogy a négyzetes Lagrange-interpoláció esetében a mintavételi pontokban az interpoláló függvény abszolút értékének deriváltja mindig zérus.

Ennek az interpolációnak, azaz a 3.13. ábrán látható struktúrának ott van létjogosultsága, ahol $1/A(z)$ egy $N - 1$ -edfokú polinommal nem írható le. A struktúra alkalmazásával a rezonátorfrekvenciák közötti elnyomás révén jobban követhető $1/A(z)$ dinamikája, de elvész a polinomalakban megadható átviteli függvény hibamentes approximációjának képessége. A konkrét zajelnyomási feladattól függ, hogy melyik rendszert érdemes alkalmazni. Akusztikus zajelnyomás esetén azonban, $1/A(z)$ bonyolultsága miatt, célszerű alkalmazni. $1/A(z)$ dinamikájának követése egyes esetekben tovább javítható, ha a [26]-ban leírt módon nemcsak kétszeres, hanem M -szeres rezonátor pólusokat valósítunk meg. Ekkor alappolinomként a Lagrange-féle interpolációs alappolinom M -edik hatványát kapjuk.

A w_i paraméterek (3.29) szerinti megválasztása továbbra is az adott peremfeltételek melletti leggyorsabb beállást célozza. Mivel ezt a struktúrát hangsúlyozottan azokban az esetekben alkalmazhatjuk, amelyekben $1/A(z)$ egy $N - 1$ -edfokú polinommal nem írható le, a paraméterbeállítás helyessége csak szimulációkkal mutatható meg. A szimulációk alapjául a teljes visszacsatolt rendszer állapotegyenlete szolgál, amelyet a (3.32) és (3.31) egyenleteket is felhasználva írhatunk fel:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{n+1}^1 \\ \mathbf{x}_{n+1}^2 \\ \mathbf{x}_{n+1}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{z} \rangle - \mathbf{g}\mathbf{c}^T & -\alpha d^a \mathbf{g}\mathbf{w}^T & -\mathbf{g}\mathbf{c}^a \\ \langle \mathbf{g} \rangle - \langle \frac{1}{N} \rangle \mathbf{g}\mathbf{c}^T & \langle \mathbf{z} \rangle - \alpha d^a \langle \frac{1}{N} \rangle \mathbf{g}\mathbf{w}^T & -\langle \frac{1}{N} \rangle \mathbf{g}\mathbf{c}^a \\ \mathbf{0} & \alpha \mathbf{b}^a \mathbf{w}^T & \mathbf{A}^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{n+1}^1 \\ \mathbf{x}_{n+1}^2 \\ \mathbf{x}_{n+1}^a \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

ahol az 1-es, illetve 2-es indexű állapotváltozók rendre az FA-val, illetve az RCH-val jelölt rezonátoros struktúrához tartoznak, valamint: $\mathbf{c}^T = [1, 1, \dots, 1]$. Az elvégzett szimulációkra példa az 5. fejezetben található. A numerikus kísérletek alapján valószínűsíthető, hogy a (3.29) szerinti paraméterbeállítás itt is az adott peremfeltételek melletti optimális



3.17. ábra. A hibajel Fourier-felbontásán alapuló többcsatornás zajelnyomó rendszer

megoldást adja.

A 3.13. ábrán látható struktúra alkalmazható többcsatornás zajelnyomásra is. Ebben az esetben minden különbségképzőhöz tartozik egy FA modul, és minden kimenethez egy RCH modul. A \mathbf{W}_i mátrixokat a két modul között lehet alkalmazni. Az elrendezést a 3.17. ábra szemlélteti. A csatornánkénti \mathbf{W}_i mátrixokat az egyszerűség kedvéért egyetlen \mathbf{W} blokk jelöli. Mivel az FA blokkok átviteli függvényei a 3.3 alfejezetben szereplő összefüggésekben mint $Q'(z)$, illetve $Q'(\omega)$ skalár szorzótényezői, a stabilitásra, a sebességre, illetve a maradó hibára ott tett megállapítások erre a rendszerre is ugyanolyan módon teljesülnek.

A hibajel Fourier-felbontásán alapuló rezonátoros zajelnyomó rendszer viszonylag csekély többletszámítás mellett nyújt jelentős sebességnövekedést. Egyes gyakorlati alkalmazásokban további előnyt jelent, hogy lehetőség van arra is, hogy a hibajel egyes komponenseit ne csatoljuk tovább a zajelnyomást megvalósító rezonátorokhoz. Akusztikus zajelnyomás esetén a mikrofonok, illetve hangszórók jele ideálisan AC jel, de az analóg rendszer miatt a hibajel sokszor DC komponenst is tartalmaz, amely egy FA-ban alkalmazott DC rezonátorral kiszűrhető. Hasonló feladat merül fel akkor, ha a zajelnyomási feladat egy nem nulla harmonikus torzítású szinuszjel felharmonikusainak elnyomása. Ebben az esetben célszerű FA-ban az alapharmonikuson is rezonátort működtetni. A frekvenciaadaptálás szempontjából a struktúrának elvi jelentősége is van, amelyről a 3.7 alfejezetben esik majd szó.

3.5 A tervezés gyakorlati kérdései

Az előző alfejezetekben javaslatot tettem periodikus zajelnyomást megvalósító struktúrákra, illetve ezek paramétereinek beállítására, valamint megvizsgáltam az elméleti szempontból releváns kérdéseket. Ebben az alfejezetben bemutatom, hogy a zajelnyomó rendszer a gyakorlatban hogyan valósítható meg, külön kitérve két fontos kérdésre: $A(z)$ mérésére, illetve a konvergenciaparaméter (α) megválasztására.

Zajelnyomásra tehát a feladatnak megfelelően a 3.2.b, 3.3., illetve a 3.13., 3.17. ábrákon szemléltetett struktúrákat használhatjuk. Az alapharmonikus becslésére szolgáló AFA csak a 3.2.b ábrán szerepel, a többi esetben ugyanolyan módon alkalmazható. Az érzékelők jelét a megfelelő kondicionálás után A/D átalakító alakítja digitálissá, illetve az algoritmus kimenetét D/A átalakító alakítja újra analóggá a beavatkozók számára. Az algoritmus megvalósítására, annak komplexitása miatt, általában jelprocesszort alkalmazhatunk, amely a két mintavételi időköz között (tehát on-line) végzi el a szükséges műveleteket. Ha $A(z)$ dinamikája nagy (pl. akusztikus átviteli függvények esetén 50..60 dB is lehet), célszerű lebegőpontos műveletek végzésére alkalmas processzort használni. Az elvégzendő műveletek számításigénye nem nagy (erre adatok pl. [18]-ban található), a memóriefoglalás jelentős részét az exponenciális függvények kiszámításához szükséges szinusztáblázat jelenti. A rezonátorok megvalósításával kapcsolatban a visszacsatolás miatt nem merül fel probléma.

3.5.1 Az átviteli függvény mérése és mintáinak felhasználása

A zajelnyomó rendszer az $A(z)$ -vel kapcsolatos információt a sokat hivatkozott (3.29), vagy (3.45) egyenletekkel adott paraméterekkel reprezentálja. Az ilyen módon történő paraméterbeállításhoz szükség van $A(z)$ valamilyen szintű identifikációjára, illetve elsőként mérésére. Mivel az elnyomandó zaj alaphfrekvenciája változik, a rezonátorfrekvenciáktól függően más és más paraméterkészletet kell alkalmazni. Bár egyes esetekben (pl. a hálózati 50 Hz-es alapharmonikushoz kapcsolódó zajelnyomási feladatok esetében) a rezonátorok által "bejárt" frekvenciaintervallum kicsiny, általánosságban úgy tekinthetjük, hogy tetszőleges frekvencián szükség van $A(z)$ -re. Ez azt jelenti, hogy $A(z)$ mérésénél úgy kell eljárni, hogy az identifikáció megfelelő pontossággal elvégezhető legyen. $A(z)$ (és különösen $\mathbf{A}(z)$) identifikálása viszont bonyolult feladat, figyelembe véve azt a feltételezést, hogy $A(z)$ (illetve $\mathbf{A}(z)$) magas fokszámú végtelen impulzusválaszú rendszer. Ha ezek után mégis meghatározható megfelelő biztonsággal $A(z)$ pl. a (3.30) egyenlettel adott alakban, a magas fokszámú racionális törtfüggvény on-line kiértékelése általánosságban nem lehetséges. Ha azonban $A(z)$ frekvenciaválaszának mintáit mérjük, amelyek abban az esetben, ha egy rezonátorfrekvencia megegyezik a mérési frekvenciával, direkt módon felhasználhatók, adódik a gondolat, hogy tetszőleges rezonátorfrekvenciák esetén a szükséges frekvenciához "legközelebbi" mérési frekvenciának megfelelő mintát (esetleg a minták valamilyen egyszerű interpolációját) használjuk. Ehhez arra van szükség, hogy $A(z)$ -t olyan "sűrűn" mérjük meg, hogy a stabilitás (3.15), illetve (3.43) feltétele tetszőleges rezonátorfrekvencia esetében teljesüljön. Ha tehát $A(z)$ mérése K pontban, a frekvenciatengelyen ekvidisztánsan történt, invertálás után rendelkezésre áll egy K elemű készlet:

$$v_k = \frac{1}{A(z_k)}, \quad \mathbf{V}_k = \mathbf{A}^\#(z_k); \quad k = 1..K \quad (3.69)$$

amellyel az aktuális paraméterkészlet a következő lehet:

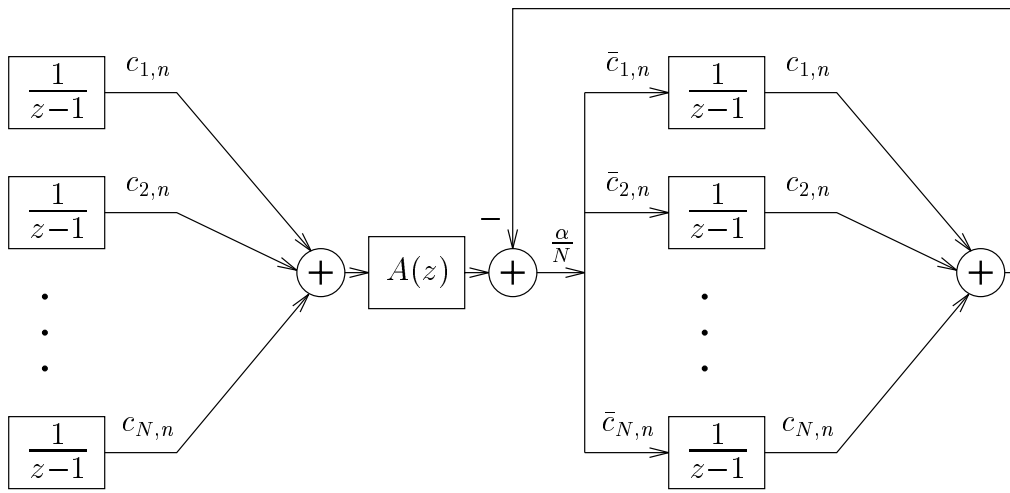
$$w_i = v_{k_i}, \quad \mathbf{W}_i = \mathbf{V}_{k_i}; \quad k_i = [f_i K + c] + 1; \quad i = 1..N \quad (3.70)$$

ahol $[\cdot]$ jelöli az egészrész-képzést, és $c = 0$ csonkolás, $c = 0.5$ kerekítés esetén, valamint f_i az adott rezonátor relatív frekvenciája. Természetesen egyéb lehetőségek is elképzelhetők, de ezek szükségessége, illetve kivitelezhetősége az adott feladattól függ. Az sem feltétlenül szükséges, hogy a minták egyenletes frekvenciafelosztáshoz tartozzanak, de általánosságban, egyéb ismeret nélkül nem célszerű ettől eltérni. K szükséges értéke a gyakorlatban akusztikus esetben néhány száz lehet. $A(z)$ mérése, és a megfelelő v_k (\mathbf{V}_k) készlet meghatározása off-line történhet. Itt nyílik lehetőség K meghatározására is a stabilitási feltételek alapján. A gyakorlati esetekben azonban K szükséges értéke gyakran kísérletileg dől el. A zajelnyomó rendszer működtetése során (tehát on-line) csak a (3.70) egyenletet kell kiértékelni, az AFA által becsült frekvencia alapján.

Az átviteli függvény mérése általános feladat, megoldására több lehetőség is kínálkozik. Az alábbiakban a teljesség igénye nélkül néhány módszert sorolok fel.

1. gerjesztés fehér zajjal, kiértékelés FFT-vel;
2. gerjesztés multiszínuszos jellel, kiértékelés FFT-vel;
3. adaptív szűrő (általában véges impulzusválaszú) paramétereinek beállítása a 2.2 alfejezetben az LMS algoritmus kapcsán vázolt módon.

Az 1. módszer jól alkalmazható, hátránya, hogy azokon a frekvenciákon, ahol $A(z)$ átvitele kicsi, esetleg nem gerjeszti eléggé a rendszert. A 2. módszer a kisebb variancia és



3.18. ábra. Átviteli függvény mérése rezonátoros struktúrával

gyorsasága miatt kedvelt, de a gerjesztőjel megkomponálása nem egyszerű feladat. Bár a sok (pl. 512) komponens tartalmú kis csúcstényezőjű gerjesztőjel off-line kiszámítható, a kimeneten ez a jel nem lesz optimális. A megfelelő, a kimenet csúcstényezőjét is figyelembe vevő gerjesztőjel megtalálása iteratív úton történhet. További hátrány, hogy az $A(z)$ kimenőjelét fogadó analóg rendszernek intermodulációs torzítása lehet (amely a gyakorlati esetekben nem ritka), ennek következtében egy adott frekvencián a kis amplitúdójú hasznos jelhez nagyobb amplitúdójú lekeveredő zavarójel adódik, meghamisítva ezzel a mérést. Mivel $A(z)$ dinamikája nagy, ez a mérésbe sokszor jelentős, nem korrigálható mérési hibát hoz be. Ennek elkerülése a gerjesztőjel komponenseinek megfelelő összeválogatásával oldható meg. A 3. módszert igen gyakran alkalmazzák, főként olyan rendszerekben, ahol maga a zajnyomó algoritmus is adaptív szűrőn alapul. Amennyiben véges impulzusválaszú szűrőt adaptálnak, a módszer tulajdonképpen az 1. módszer egy implementációja, hasonló előnyökkel és problémákkal. Megjegyzendő, hogy ebben az esetben a mérés tulajdonképpen már identifikációnak nevezhető. A következőkben egy, a rezonátoros struktúrára épülő módszert mutatok be, amelynek előnyei az előbbi módszerhez hasonlóan abból is fakadnak, hogy az adott zajnyomó környezetben egyszerűen megvalósítható.

Az átviteli függvény mérésére tehát a 3.18. ábrán látható elrendezés használható. A méréshez az integrátoros jelmodellt, illetve az ahhoz kapcsolódó megfigyelőt (2.9. és 2.14. ábrák) alkalmazzuk, mert ezek állapotváltozói állandósult állapotban a Fourier-együtthatókkal egyeznek meg. Ha a generátor és az analízator bázisfüggvényei az ábrán látható módon megegyeznek, állandósult állapotban $A(z_i)$ értékei kiszámíthatók:

$$A(z_i) = \frac{\hat{x}_i}{x_i}; \quad i = 1..N \quad (3.71)$$

illetve az $x_i = 1; \quad i = 1..N$ beállítással:

$$A(z_i) = \hat{x}_i; \quad i = 1..N \quad (3.72)$$

Az átviteli függvény fázisát ezzel a módszerrel csak a $0..2\pi$ tartományban tudjuk megmérni, de a zajnyomó rendszer működtetéséhez nincs is szükség az elvesző információra. Amennyiben a mérendő jel, azaz $A(z_i)$ kimenete zajmentes, a struktúra $\alpha = 1$ mellett működtethető, és a beállítás (egyenletes rezonátorelhelyezkedést figyelembe véve) véges. A mérési zaj elnyomására exponenciális átlagolást alkalmazhatunk, amelynek megvalósítása α beállításával történhet, oly módon, hogy az exponenciális átlagolás időállandója:

$$\lambda_{\text{exp}} = (1 - \alpha)^{1/N} \quad (3.73)$$

Ezzel a zajt fehérnek tekintve a zajelnyomás mértéke [28]:

$$\sigma_{\text{exp}}^2 \cong \sigma_0^2 \frac{\alpha}{2N} \quad (3.74)$$

ahol σ_0 a zaj szórása átlagolás előtt és σ_{exp} átlagolás után. A méréshez szükséges minták száma az időállandó segítségével az A Függelékben közölt módon becsülhető:

$$P \approx N \frac{\log \varepsilon}{\log(1 - \alpha)} \quad (3.75)$$

ahol ε jelöli a tranziens megengedett maximumát. A bemutatott struktúrával egyszerre nagy számú (pl. több száz) pontban a felmerülő nagy számítási igény miatt az átviteli függvény értéke nem határozható meg, ezért a rezonátorpozíciókat változtatni kell. Ugyanakkor a multiszinuszos gerjesztés itt is hasonló problémákat vet fel, mint az előző, a rezonátoros struktúrához nem kötődő eljárás esetében. Ezek miatt, továbbá azért, mert (3.75) alapján a mérési idő a rezonátorok (a komplex exponenciálisok) számával arányos, a méréshez egyetlen AC rezonátor pár alkalmazása célszerű. Az óhatatlanul előforduló ofszet miatt egy DC rezonátort is kell működtetni. Ezek után a mérés egyetlen AC rezonátor párral történik a K mérési frekvencián. Ebben az esetben a rezonátorok aszimmetrikusan helyezkednek el, ami a beállási idő növekedését okozza. Ez a növekedés azonban nem jelentős, mert az általában alkalmazott kis α esetén az abból eredő sebességcsökkenés a domináns. (Az aszimmetriából eredő hatás akkor lenne jelentős, ha a három rezonátor nagyon közel kerülne egymáshoz, azaz a mérési frekvencia kicsi lenne. A zajelnyomó rendszerben viszont akkor lenne szükség az ezeken a frekvenciákon mért adatra, ha az alapharmonikus a mintavételi frekvenciához képest igen kicsiny lenne, ami általában a rezonátorok maximális számára tett kötés miatt nem fordul elő.) A mérési eljárás tehát lassú, de nagy pontosságú mérést tesz lehetővé.

Többcsatornás zajelnyomás esetén párhuzamosan lehet működtetni a különbségképzők számának megfelelő számú struktúrákat. Gerjeszteni viszont csak az egyik kimeneten lehet, mert az egyes kimenetek felől érkező jelek nem megkülönböztethetők. (Elvileg lehetőség lenne arra, hogy az egyes kimeneteken más frekvencián gerjesszünk, és így az egyes kimenetek felől érkező jelek megkülönböztethetők lennének, de ez a megoldás a multiszinusszal kapcsolatos problémákat veti fel.) Ezzel a eljárással tehát $A(z)$ egy oszlopát lehet megmérni. A teljes mérési idő tehát:

$$T = KPM; \quad t = KPM \frac{1}{f_s} \quad (3.76)$$

ahol f_s jelöli a mintavételi frekvenciát.

A zajelnyomó rendszer működtetéséhez szükséges w_i , illetve \mathbf{W}_i paraméterek meghatározása tehát egy off-line előállított paraméterkészlet alapján történik (3.70) szerint, a rezonátorfrekvenciák segítségével. A paraméterkészlet elemei az $A(z)$, illetve $\mathbf{A}(z)$ átviteli függvények adott sűrűséggel megmért mintáiból a (3.29), illetve (3.45) egyenleteknek megfelelően invertálással adódnak. Az átviteli függvény mérését az adott környezetben a 3.18. ábrán látható rezonátoros elrendezéssel hatékonyan lehet elvégezni.

3.5.2 A konvergenciaparaméter megválasztása

A w_i , illetve \mathbf{W}_i paraméterek meghatározása után az α konvergenciaparaméter állítja be a zajelnyomó rendszer végleges tulajdonságait. A rendszer alapértelmezésben $\alpha = 1$ mellett stabil, és sebessége optimális. Az inverz átviteli függvény interpolációjának hibái miatt azonban ezt korrigálni, sokszor a stabilitás érdekében csökkenteni kell. α beállításánál arra kell törekedni, hogy a rendszer minél gyorsabb legyen. Bár sokszor a gyakorlatban α kísérleti úton egyszerűen meghatározható, bizonyos alkalmazásokban

szükség lehet arra, hogy a közel optimális sebességet, de mindenképpen stabil rendszert biztosító α értékét előre meghatározzuk. A feladat megoldásához egycsatornás esetben használható az a vizsgálati módszer, amely 3.2.3 szakaszban a w_i paraméterkészlet verifikálásával kapcsolatban szerepelt. Ez az eljárás a rendszer legnagyobb sajátértékét mint α függvényét határozza meg, így a diagramból kiolvasható a stabilitás határa (a maximális α), illetve az optimális α is (3.11. ábra). Ez az eljárás α meghatározására a gyakorlatban csak ritkán alkalmazható, ugyanis szükség van $A(z)$ állapotváltozás leírására, illetve legalább átviteli függvényére racionális törtfüggvény alakban. Az alábbiakban olyan eljárást ismertetek, amely a rendelkezésre álló mérési eredmények alapján ad becslést α -ra.

α meghatározásánál abból indulhatunk ki, hogy a rendszer súlyfüggvénye a stabilitás határhelyzetében nem csillapodik, illetve minimális energiájú tranziens esetén a rendszer gyors beállású. A súlyfüggvény helyett a Parseval-tétel alapján az átviteli függvényeket vizsgálhatjuk. Tegyük fel, hogy a rendszer nyílt hurkú, illetve zárt hurkú átvitele rendre a (3.2), (3.3) egyenleteknek megfelelően adott. Ekkor a rendszer tranziensének energiája:

$$S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f'_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \oint_{|z|=1} |F'(z)|^2 dz \quad (3.77)$$

ahol f'_n a zárt rendszer súlyfüggvénye. A továbbiakban úgy járunk el, hogy S csak az átviteli függvény pólusaitól függjön. Tegyük fel, hogy $F(z)$ nem áltört, azaz a nyílt hurok nevezője legalább eggyel nagyobb fokszámú, mint a számlálója, valamint írjunk a zárt hurok átviteli függvényének számlálója helyére 1-et:

$$X(z) = \frac{1}{D(z) + \alpha N(z)} = \frac{c}{\prod_{j=1}^J (z - z_j)} \quad (3.78)$$

$X(z)$ -nek csak pólusai vannak, ezért súlyfüggvényének energiája csak a pólusoktól függ. ($F'(z)$ esetében a számláló miatt ez α -tól közvetlenül is függött.) A feladat ezek után úgy fogalmazható meg, hogy keresett az az α , amely mellett az

$$S(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \oint_{|z|=1} |X(z)|^2 dz \quad (3.79)$$

integrál minimális. A körintegrál helyett természetesen a frekvencia szerinti integrálást alkalmazhatjuk:

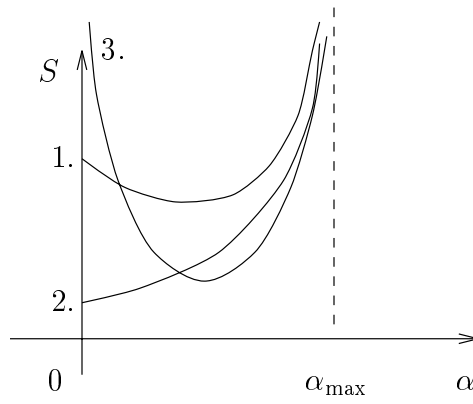
$$S(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=0}^{2\pi} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (3.80)$$

$S(\alpha)$ néhány lehetséges függvénymenete a 3.19. ábrán látható. A görbék csak a $[0, \alpha_{\max}]$ intervallumban érdekesek, hiszen definíció szerint $\alpha \geq 0$, valamint $\alpha > \alpha_{\max}$ esetén a rendszer labilis. Az ábrán látható görbék esetében α_{\max} közös, ahol $S(\alpha) \rightarrow \infty$. Az 1. görbéhez tartozó rendszer a visszacsatolással gyorsítható, a 2. görbéhez tartozó rendszer nem. A 3. görbéhez tartozó nyílt hurkú rendszer nevezőjének vannak egységsugarú körön kívüli pólusai, mert $\alpha \rightarrow 0$ mellett $S(\alpha) \rightarrow \infty$. Ez a 3. eset felel meg a rezonátoros zajelnyomónak.

Ez a módszer egyenlő súllyal reprezentálja az összes pólust, azaz a rendszer összes sajátértékét, szemben a 3.2.3 szakaszban megfogalmazott feltétellel, amely a rendszer sebességét csak a legnagyobb abszolút értékű sajátértéktől teszi függővé. Ez azonban reális kompromisszum, hiszen a Parseval-reláció révén a gyakorlatban is használható eljáráshoz jutunk.

Rezonátoros zajelnyomás esetén (3.78) és (3.5) jelöléseit felhasználva az integrandusz:

$$|X(z)|^2 = \frac{1}{|D_A(z)D_R(z) + \alpha N_A(z)N_R(z)|^2} \quad (3.81)$$



3.19. ábra. $S(\alpha)$ néhány lehetséges függvénymenete

ahol az “A” és “R” indexek utalnak $A(z)$ -re és $R(z)$ -re. Ebben a kifejezésben azonban még mindig külön szerepel $N_A(z)$ és $D_A(z)$, amelyek nem állnak rendelkezésünkre. Ezért osszuk le (3.81) nevezőjét $D_A(z)$ -vel, és a továbbiakban az így kapott függvényt integráljuk. A $D_A(z)$ -vel való leosztás megtehető, ugyanis $D_A(z)$ stabil, tehát az egységkörön kiértékelve sohasem zérus. Ezzel (3.80) kifejezése a következő:

$$S'(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=0}^{2\pi} \frac{1}{|D_R(\omega) + \alpha A(\omega) N_R(\omega)|^2} d\omega \quad (3.82)$$

$S'(\alpha)$ minimuma természetesen nem esik egybe $S(\alpha)$ minimumával, de $\alpha'_{\max} = \alpha_{\max}$, $D_A(z)$ stabilitása miatt, így a görbe jellege nem változik meg, azaz az $S'(\alpha)$ minimumához tartozó α továbbra is biztonságosan a stabilitási tartomány belsejében lesz.

Ezek után α meghatározása a következőképpen történhetik: integrál helyett integrálközelítő összeget számolhatunk, és $\alpha = 0$ -ból kiindulva keressük a görbe minimumát.

Többcsatornás rendszer esetében a zárt rendszer átviteli függvénye (3.36) felhasználásával a következő:

$$\mathbf{F}(z) = (\mathbf{I} + \mathbf{F}(z))^{-1} \mathbf{F}(z) \quad (3.83)$$

amiből a (3.78) egyenletnek megfelelő alakra úgy juthatunk, hogy $\mathbf{F}(z)$ nevezőjével bővítünk. Figyelembe véve, hogy $\mathbf{A}(z)$ pólusainak és zérusainak megtalálása nem egyszerű feladat [25], továbbá, hogy a kiértékelhetőség kedvéért $\mathbf{A}(z)$ nevezőjével vissza kell osztani, a továbbiakban a:

$$\mathbf{X}'(z) = ((D_R(z)) + \alpha N_R(z) \mathbf{A}(z))^{-1} \quad (3.84)$$

függvényt tekintjük, amely azonban mátrix, ezért tovább kell alakítani. Felhasználva, hogy:

$$((D_R(z)) + \alpha N_R(z) \mathbf{A}(z))^{-1} = \frac{\text{adj}((D_R(z)) + \alpha N_R(z) \mathbf{A}(z))}{\det((D_R(z)) + \alpha N_R(z) \mathbf{A}(z))} \quad (3.85)$$

α meghatározására a determinánst használhatjuk. Lényeges, hogy ezzel a megoldással is a valódi α_{\max} értéket határozzuk meg, hiszen az inverz mátrix akkor tart a végtelenhez, ha a determináns a zérushoz. Mindezeket figyelembe véve többcsatornás esetben a kiértékelendő függvény a következő:

$$S'(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=0}^{2\pi} \frac{1}{|\det((D_R(\omega)) + \alpha N_R(\omega) \mathbf{A}(\omega))|^2} d\omega \quad (3.86)$$

Az ismertett eljárás demonstráló példa az 5. fejezetben szerepel.

3.6 A modellezési hibák hatása

A jelmodell alapú zajelnyomó rendszer tervezése során a Bevezetés 2.1 szakaszában megfogalmazottakkal összhangban az elnyomandó jelet tisztán periodikusnak tekintettük, $A(z)$ -t pedig lineáris invariáns hálózatnak. Ezek a feltételezések egyfajta modellalkotásnak tekinthetők, a rendszer tervezése, illetve működtetése során ennek a modellnek a paramétereit határozzuk meg. A valóságos rendszer eltérése a feltételezett rendszertől ennél fogva modellezési hibának tekinthető. Ezekkel a modellezési hibákkal a tervezés szintjén (irodalmi adatokra és gyakorlati tapasztalatokra támaszkodva) nem foglalkoztunk, a megtervezett rendszert azonban ebből a szempontból is megvizsgáljuk. A javasolt zajelnyomó rendszert megvalósítottuk, így gyakorlati tapasztalatok és kísérleti eredmények is rendelkezésre állnak, elsősorban az akusztikus zajelnyomás témakörében. Mivel a modellezési hibák elméleti vizsgálata maga is modellalkotást igényel, és ezen modellek érvényességi köre is általában korlátozott, a modellezési hibák vizsgálatánál a gyakorlati tapasztalatokra támaszkodhatunk, illetve utalhatunk. A vizsgálatoknál továbbra is fő szempont a stabilitás, a sebesség és a maradó hiba. A zajelnyomás a periodikus zaj frekvenciáinak pontos becslésén alapul, amelyet a független AFA hajt végre. Az AFA frekvenciabecslésének hibája mint a jelmodell hibája jelentkezik, ezért hatása a zajelnyomásban is megjelenik, de a zajelnyomó hurok mint lineáris rendszer ettől függetlenül is vizsgálható. Ebben az esetben $A(z)$ modellezési hibái befolyásolják a hurok működését.

3.6.1 A jelmodell hibáinak hatása

A jelmodell hibája elsősorban azt jelenti, hogy az AFA az elnyomandó periodikus jel frekvenciáját csak adott hibával becsli, ezért a rezonátorpozíciók nem felelnek meg az elnyomandó jelkomponens frekvenciáinak. Ebben az esetben a zajelnyomás nem teljes, hiszen a hibajelre vonatkozó átviteli függvény zérusai nem a jel frekvenciáira esnek. Az átviteli függvény abszolút értéke jellegre a 2.15. ábrán látható karakterisztikának felel meg, de kis értékű konvergenciaparaméter esetén az egyes lyukszűrők keskenyebbek. A [27]-ben leírt rendszer esetében $\alpha \approx 10^{-2}$ volt, és $f_s = 1.3$ kHz, valamint $f_1 \approx 100$ Hz mellett néhány tized Hz-es elhangolás esetén már nem volt zajelnyomás tapasztalható.

Az elhangolásnak több oka is lehet. Amennyiben a referenciajel frekvenciája nem változik, az AFA frekvenciabecslése igen pontos, ezért alkalmazható a jelen fejezet bevezetésében említett vektorvoltmérőben, illetve a pontos frekvenciabecslést igénylő zajelnyomás esetében is. Ha azonban a referenciajel frekvenciája nem konstans, a becslésnek maradó hibája van. Ezen problémák megoldására [20] lineárisan, logaritmikusan és hiperbolikusan változó frekvenciájú jelek hibamentes Fourier-analízisére alkalmas AFA-t javasol, amely különösen forgó gépek keltette zaj esetén eredményes stratégia. Amennyiben a zajelnyomó rendszer a frekvenciainformációt egyéb módon kapja meg, az ezzel kapcsolatos hibák nem kézbe tarthatók.

A frekvenciabecslés hibájának oka lehet még a zajos referenciajel. Ebben az esetben a becsült frekvencia szór, és az elnyomás hibája ettől a szórástól függ. A frekvenciabecslő szórása úgy csökkenthető, hogy a (2.54) egyenletben $1/2\pi N$ helyett $\beta/2\pi N$ -et írunk, és β -t mint konvergenciaparamétert csökkentjük. $\beta < 1$ esetén a frekvenciabecslő szórása csökken, de a frekvenciaadaptáció sebessége is csökken, így a zajelnyomás csak akkor javul, ha a frekvencia csak lassan változik.

A zajelnyomó hurok a jelmodell által nem reprezentált összetevőket (pl. véletlen zajt) a 2.15. ábrának megfelelően szűri. Lineáris rendszer révén igaz a szuperpozíció, tehát ezek a figyelembe nem vett komponensek a rezonátorfrekvencián történő elnyomást nem befolyásolják.

A [27]-ben leírt kísérletek alapján az AFA frekvenciabecslésének hibájából adódó hiba nem kritikus. (Az elhangolásról szóló példa egy külön elvégzett kísérlet eredménye.)

3.6.2 A szakasz modellezési hibáinak hatása

Az $A(z)$, illetve $\mathbf{A}(z)$ átviteli függvények általában valamely analóg rendszer reprezentációját is tartalmazzák. Ennek a reprezentációnak a hibája nem jelenik meg, mert a zajelnyomó rendszer működtetéséhez csak $A(\omega)$, illetve $\mathbf{A}(\omega)$ mintáinak ismeretére van szükség, amelyek tetszőleges pontossággal mérhetők. A tervezés során két tulajdonságot feltételeztünk a fenti rendszerekről: az invarianciát, valamint a linearitást. Az alábbiakban a valódi rendszerek ettől a modelltől való eltérésének hatását mutatom be.

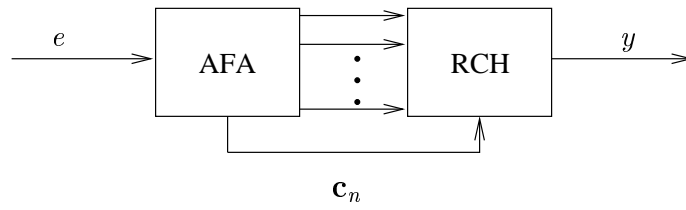
A zajelnyomó rendszer átviteli függvényeket reprezentáló paraméterkészletét a működés során nem adaptáljuk, így a rendszer aktuális tulajdonságai attól függenek, hogy az off-line módon beállított paraméterkészlet az előírásoknak mennyiben felel meg. Amennyiben a zajelnyomó rendszer kimeneteinek száma nem kisebb, mint a bemenetek száma, a zajelnyomás mindaddig teljes, amíg a rendszer stabil. Ha a kimenetek száma kisebb, mint a bemenetek száma, az átviteli függvény megváltozásának hatására a maradó hiba is megnő. A stabilitásra vonatkozóan a (3.15), illetve (3.43) egyenletek a mérvadók. Egysatornás esetben az aktuális átviteli függvény és a w_i paraméterek együttes fázistolása nem érheti el abszolút értékben a $\pi/2$ -et. Ez pl. akusztikus zajelnyomás esetén azt jelenti, hogy a mikrofont a hullámhossz negyedével elmozdítva a stabilitás határhelyzetébe kerülünk. Többcsatornás esetben a helyzet annyiban bonyolultabb, hogy az átviteli mátrix egyes elemeinek megváltozása nincs az egysatornás esethez hasonló közvetlen viszonyban a stabilitással. Ha azonban a mátrix egyik elemének sem tolódik el a fázisa $\pi/2$ -lél, a rendszer biztosan stabil. A paraméterek rossz fázisa miatt a fázistartalék lecsökken, így α -t csökkenteni kell. A rendszerek sebessége természetesen az átviteli függvény megváltozásának hatására (ha a stabilitás teljesül is) lecsökken. Megjegyzendő, hogy az átviteli függvény mérésekor, valamint a minták felhasználásakor elkövetett hiba is a fenti keretbe helyezhető.

Bár a dolgozat motivációját adó akusztikus zajelnyomás esetén az átviteli függvények nagyon jó közelítéssel lineárisak, általánosságban számolni kell a nemlinearitások jelenlétével. Akusztikus esetben itt említendő meg az analóg elektronika nemlinearitása (erősítők, hangszórók). A gyakorlati tapasztalatok alapján a "lineárisnak tervezett" rendszerek nemlinearitásai semmiféle problémát sem okoznak. A nemlinearitásokkal szembeni robusztusságra jó példa a villamos hálózat torzításának aktív csökkentésére elvégzett kísérlet, amelyhez transzformátorokat és teljesítményerősítőket, tehát nemlineáris elemeket tartalmazó eszközöket kellett használni. A kísérletet a 6. fejezetben ismertetem.

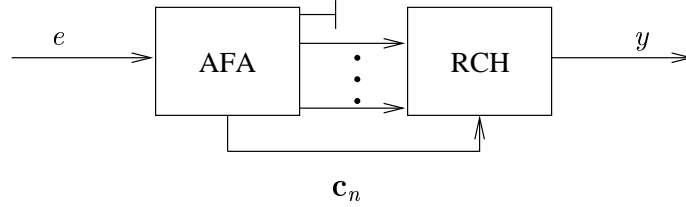
3.7 Frekvenciaadaptálási lehetőségek

A Bevezetés 2.5 alfejezetében részletesen ismertetett Fourier-analizátor eredményesen használható zajelnyomó rendszerekben, az előző alfejezetekben leírt módon. A gyakorlatban megvalósított zajelnyomó rendszerek a 3.4 alfejezetben ismertetett struktúrát alkalmazzák. Ez a struktúra felveti egyéb, az AFA-ra alapozott, de attól eltérő frekvenciaadaptálási mechanizmusok kialakításának lehetőségét, amelyek zajelnyomó rendszerekben előnyösek lehetnek, de frekvenciabecslésre általánosságban is eredményesen alkalmazhatók. Az itt ismertetendő eljárások működőképessége és jó tulajdonságai a gyakorlatban igazolódtak, de elméletileg csak részben megalapozottak. A javasolt változtatások további elméleti vizsgálatokat igényelnek, jelen dolgozatban való szerepeltesüket az aktív zajelnyomáshoz való erőteljes kapcsolódásuk indokolja.

Jelen fejezet bevezetésében szerepelt, hogy a frekvencia becslése a zajelnyomó hurok rezonátorai alapján általában nem lehetséges, mert a rendszer nem stabil. A 3.13. ábrán látható struktúrában azonban FA mint statikusan visszacsatolt rezonátoros struk-



3.20. ábra. Frekvenciaadaptálás a hibajelre



3.21. ábra. Frekvenciaadaptálás a nem elnyomott alapharmonikusra

túra működik, így frekvenciaadaptálásra alkalmas lehet. Nehézséget jelent viszont, hogy ennek a struktúrának a bemenőjele a hibajel, amely jó frekvenciabecslés esetén zérushoz tart, így az adaptációhoz felhasznált alapharmonikusra nézve a jel/zaj viszony szintén zérushoz tart. Ezt is figyelembe véve módosítani kell a frekvenciaadaptáció (2.54) képletét, úgy, hogy a frekvenciát módosító tagot az alapharmonikushoz tartozó állapotváltozó abszolút értékével súlyozzuk:

$$f_{1,n+1} = f_{1,n} + \frac{\gamma}{2\pi N} |\hat{x}_{1,n+1}| \text{angle}(\hat{x}_{1,n+1}, \hat{x}_{1,n}) \quad (3.87)$$

ahol γ konvergenciaparaméter, tipikusan $\gamma = 1$. Ezzel a megoldással lehetőség nyílik arra, hogy a zajelnyomó hurok külön referenciajel nélkül működjön. Ebben az esetben a különálló AFA modul is elhagyható, ami a módszer számításgényét csökkenti. Az elrendezés a 3.20. ábrán látható. Ez a megoldás eredményesen használható abban a 2.2. alfejezetben említett esetben is, amikor a referenciajelre visszahat a zajelnyomó rendszer kimenőjele. Ez a visszahatás sokszor instabilitást okoz, pl. akkor is, ha a különálló, (2.54) szerint adaptált AFA modul bemenőjele ilyen referenciajel. Ha azonban az adaptációs mechanizmus (3.87) szerinti, ilyen problémák nem lépnek fel.

Ez a struktúra a bemutatott esetekben eredményesen használható a frekvencia becslésére. Az elnyomandó zaj azonban sokszor nem csak a rezonátorok frekvenciáinak megfelelő periodikus komponenseket tartalmaz, így a hibajelben jelentős egyéb komponensek is megjelennek, amelyek zavarják az adaptációt. Nem merül fel ilyen probléma abban az esetben, ha az alapharmonikust nem kell elnyomni. Ilyen feladatra példaként említhető a 3.6.2 szakaszban hivatkozott aktív torzításcsökkentés. A 3.13. ábra tehát úgy módosul, hogy RCH nem tartalmaz rezonátort az alapharmonikus frekvenciáján, de FA igen. Az elrendezés a 3.21. ábrán látható. Állandósult állapotban (zajmentes esetben) a hibajel megegyezik az alapharmonikussal, így kis elhangolások esetén az itt működtetett AFA kis felharmonikus-tartalmú jelet kap. [21] az AFA konvergenciaviszonyait a bemenőjel felharmonikus-tartalmával hozza kapcsolatba, így a javasolt struktúra mindenképpen előnyös. Mivel ez az előny $A(z) = 1$ esetén is fennáll, ez a megoldás az adaptáció javítására nemcsak zajelnyomás esetén alkalmazható.

[21] dolgozatában többszörös rezonátorpólusokkal rendelkező AFA struktúrát ír le, amely kétszeres rezonátorok esetén az itt javasolt adaptív rendszerekhez hasonló megoldást jelent. Az ott javasolt adaptív Fourier analizátorok azonban az adaptációhoz a legkülső hurok állapotváltozóit használják.

A felsorolt megoldásokra példák az 5. fejezetben találhatóak.

4. fejezet

Az adaptív szűrős és a jelmodell alapú megközelítés kapcsolatrendszer

Az előző fejezetben részletesen bemutatott periodikus jelmodell alapú zajelnyomó rendszerek a kitűzött feladatot a rezonátoros alapstruktúra adekvát kiegészítésével hatékonyan oldják meg. Ez a megközelítés a szintézis és az analízis eszközeit tekintve különbözik a hagyományosnak nevezhető, a Bevezetésben bemutatott, adaptív szűrős megoldásoktól. Ennek ellenére a kétféle megoldás összevetése elkerülhetetlen, hiszen csak ilyen úton győződhetünk meg arról, hogy a jelmodell alapú rendszer tervezésének a 3. fejezet bevezetésében feltételezett előnyei megvalósulnak-e. A visszacsatolt, illetve előrecsatolt struktúra közül az utóbbi egyértelműen előnyösebben alkalmazható periodikus zavarhatások elnyomására, tehát referenciastruktúráként ezt alkalmazhatjuk. Az összevetés során a korábbiakkal összhangban a rendszerek konvergenciaviszonyait, illetve többcsatornás zajelnyomás esetén az állandósult állapotbeli jellemzőket kell megvizsgálni. Az összehasonlítás alapjául a diszkrét Fourier-transzformáció és az LMS algoritmus közötti alapvető összefüggés szolgál. Ezt a gondolatmenetet folytatva a periodikus zaj elnyomására szolgáló adaptív szűrő és adaptációs algoritmus transzformálható egy rezonátoros struktúrába, és ezzel a reprezentáns rezonátoros struktúrával már összehasonlíthatók a 3. fejezetben részletezett megoldások. Az egyes zajelnyomó rendszerek összehasonlítása során természetesen figyelembe kell venni a megvalósítással összefüggő kérdéseket is.

4.1 A rezonátoros alapstruktúra és az LMS algoritmus kapcsolata

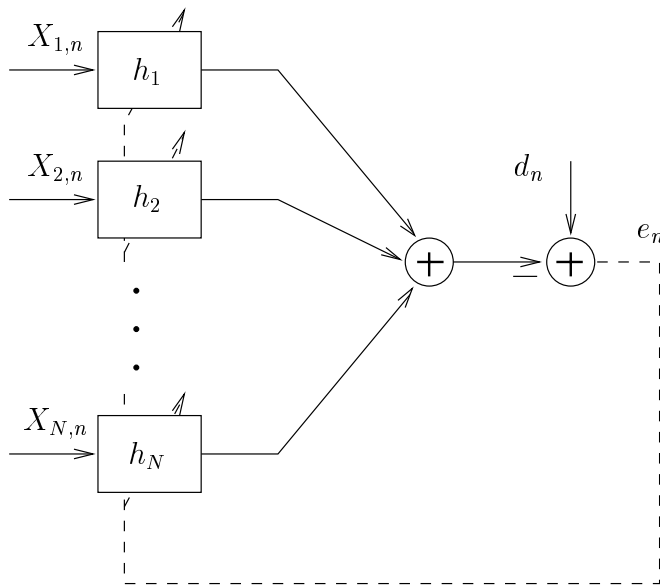
Ez az alfejezet a rezonátoros alapstruktúra és az LMS algoritmussal adaptált transzverzális szűrő közötti kapcsolatot adja meg, amelyeket a zajelnyomó rendszerek közötti kapcsolat feltárására alkalmazhatunk. A kapcsolat feltárásának alapját a [29]-ben leírt, a DFT és az LMS algoritmus közötti összefüggés adja meg.

Elsőként tekintsük a 4.1. ábrát! Az ábra egy szűrőbankot ábrázol, egy szűrőhöz csak egyetlen súly tartozik, ezeket jelöli h_i ; $i = 1..N$. A szűrők bemenetén az X_i jeleket alkalmazzuk. Az adaptáció a komplex LMS algoritmussal történik. A (2.2), (2.3) és (2.4) egyenletek formálisan továbbra is igazak:

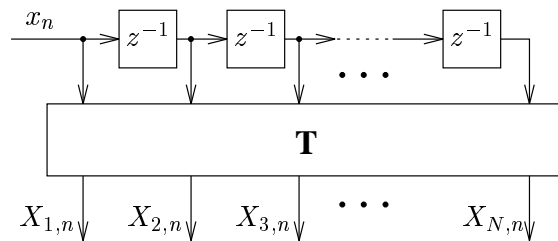
$$y_n = \mathbf{h}_n^T \mathbf{X}_n \quad (4.1)$$

$$e_n = d_n - y_n \quad (4.2)$$

$$\mathbf{h}_{n+1} = \mathbf{h}_n + \alpha e_n \bar{\mathbf{X}}_n \quad (4.3)$$



4.1. ábra. LMS alapú Fourier-analizátor



4.2. ábra. Transzformált tartománybeli referenciajel előállítás

de \mathbf{h}_n az egyes szűrők súlytényezőiből képzett vektor, \mathbf{X}_n pedig nem a bemenet késleltetett értékeiből, hanem az egyes bemenetek adott időpillanatbeli értékeiből áll. Ha most bemenőjelként komplex exponenciálisokat alkalmazunk (2.14) szerint:

$$\mathbf{X}_n = \mathbf{c}_n \quad (4.4)$$

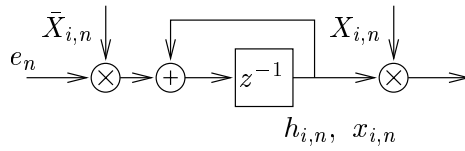
a szűrőbank súlyai a d jel Fourier-együtthatóihoz konvergálnak. Ugyanakkor (4.2)-t behelyettesítve (4.3)-ba, felismerhető, hogy ez az egyenlet megfelel (2.53)-nak,

$$\alpha = \frac{1}{N} \quad (4.5)$$

mellett. Ha \mathbf{c}_n (2.52) szerinti, a diszkrét Fourier-transzformációhoz jutunk. Tehát a rezonátoros megfigyelő és az LMS alapú Fourier-analizátor ugyanaz a struktúra, amelyben a bázisfüggvények megfelelnek a referenciajeleknek, az állapotváltozók pedig a súlytényezőknek. A következő lépés a transzverzális szűrőstruktúra és az LMS alapú Fourier-analizátor közötti összefüggés megadása.

Az LMS algoritmus által adaptált szűrő általában a 2.7. ábrán látható struktúrájú. A 4.1. ábrán bemutatott szűrőbank ugyanazt a szűrést az ún. transzformált tartományban hajtja végre, tehát a referenciajel-vektor az eredeti referenciajel transzformáltja. A 4.2. ábra a transzformált tartománybeli referenciajel előállítását mutatja. Az LMS algoritmus konvergenciája a referenciajel autokorrelációs mátrixától, illetve annak sajátértékeitől függ [4]. Ha a \mathbf{T} transzformáció olyan, hogy:

$$\mathbf{R} = \mathbf{T} \langle \lambda_k \rangle \mathbf{T}^{-1} \quad (4.6)$$



4.3. ábra. A transzformált tartománybeli adaptív szűrő (vagy a rezonátoros alapstruktúra) egy csatornája

a transzformált tartománybeli szűrő konvergenciaviszonyai nem változnak meg, tehát azonos α mellett ugyanakkora maximális sebességet lehet elérni. Ha az autokorrelációs mátrix sajátértékei megegyeznek, α segítségével beállítható a véges beállítás. Ezért lehet előnyös a transzformált tartománybeli szűrés: a transzformált tartománybeli referenciajeleken teljesítménynormalizálást végezve a kiadódó diagonálmátrix elemei egyenlők lesznek, és megfelelő α segítségével beállítható a véges beállítás, amelyet az eredeti struktúrával nem lehetett elérni. A \mathbf{T} transzformáció a referenciajeltől függ, és kiszámítása általánosságban irreális számításigényt támaszt. Mivel azonban a transzformáció közelítése is hasznos, a gyakorlatban a transzformált tartománybeli szűrést kiterjedten alkalmazzák. Ha a referenciajelet egy \mathbf{U} unitér (valós esetben ortogonális) transzformációval transzformáljuk, akkor a transzformált tartománybeli referenciajel-vektor autokorrelációs mátrixának sajátértékei nem változnak meg [24]. A csatornánkénti teljesítmény-normalizálással ebben az esetben is javítható a konvergencia, attól függően, hogy a referenciajelet a transzformáció mennyire bontja független komponensekre [30], [31].

Periodikus zaj elnyomása esetén a referenciajel – mint az korábban szerepelt – a megfelelő komplex exponenciálisok összege, az együtthatók száma pedig egyenlő a komplex exponenciálisok számával. Elsőként tételezzük fel, hogy az egyes komplex exponenciálisok abszolút értéke megegyezik, és az alapharmonikus frekvenciája $1/N$, ekkor az \mathbf{U} transzformáció a Fourier-transzformáció:

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{N}} [e^{j\frac{2\pi}{N}in}]; \quad i, n = 1..N \quad (4.7)$$

Ezt felhasználva, ha az eredeti jel komplex exponenciálisok összege (2.52) szerint:

$$x_n = \sum_{i=1}^N c_{i,n} \quad (4.8)$$

akkor

$$X_{i,n} = \sqrt{N} c_{i,n} \quad (4.9)$$

A transzformált tartománybeli adaptív szűrő (vagy a rezonátoros alapstruktúra) egy csatornája a 4.3. ábrán látható. Az eddigiek alapján:

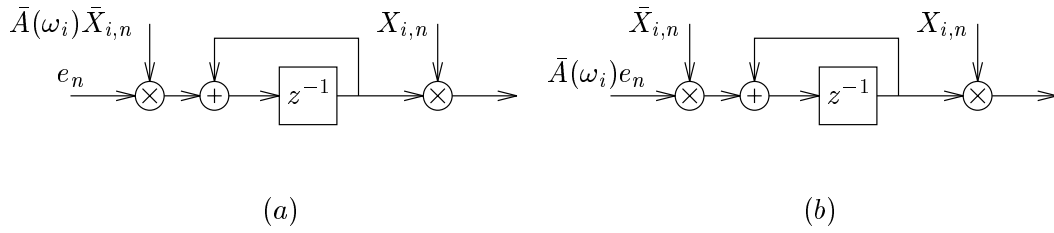
$$X_{i,n} = \begin{cases} c_{i,n} \\ \sqrt{N} c_{i,n} \end{cases} \quad (4.10)$$

rezonátoros struktúra, illetve adaptív szűrő esetén. Az ábra alapján belátható, hogy a hurokerősítés adaptív szűrő esetén N -szeres, ennek következtében a transzverzális szűrőre (4.5) felhasználásával:

$$\alpha = \frac{1}{N^2} \quad (4.11)$$

és ebben az esetben a rendszer véges beállítású.

Amennyiben az alapharmonikus frekvenciája nem $1/N$, a Fourier-komponenseket előállító transzformáció nem unitér, sőt, nem is állandó, ezért a fenti egyértelmű megfeleltetés a transzverzális struktúra és a rezonátoros struktúra között nem adható meg.



4.4. ábra. Egy rezonátorcsatorna (a) az XLMS szerint (b) rezonátoros reprezentációban

Ebben az esetben α segítségével nem állítható be a véges beállítás egyik struktúrában sem. Rezonátoros struktúra esetében azért nem, mert a (2.44) egyenlet alapján az egyes csatornák súlyozása nem egyforma, sőt, nem is valós; a transzverzális struktúra esetében pedig azért nem, mert az autokorrelációs mátrix sajátértékei nem egyenlők. Ha azonban a harmonikusok száma az AFA-nak megfelelő, a rezonátorok elhelyezkedése az egyenletet közelíti, a beállítás közel véges mindkét struktúrában. (A zajelnyomó rendszerek közötti később megmutatandó markáns különbség miatt a megfeleltetés fenti bizonytalansága elhanyagolható.)

4.2 Rezonátoros reprezentáció

A 2.2 alfejezet alapján a rezonátoros zajelnyomó rendszert a hasonlóan széleskörben használható előreccatolt struktúrával kell összevetni. Az előreccatolt struktúra az adaptációhoz az XLMS algoritmust használja, míg többcsatornás zajelnyomás esetén a többcsatornás szűrő adaptálására az MLMS algoritmust alkalmazzák. Feladatunk tehát az XLMS, illetve MLMS algoritmus rezonátoros reprezentációja, amit a 2.6 alfejezet alapján a transzformált tartományban elegendő megtenni.

Elsőként az XLMS algoritmust vizsgáljuk. Tegyük fel, hogy $\hat{A}(z) = A(z)$, azaz a modellezés hibamentes, valamint, hogy a referencijel az egyes komplex exponenciálisokat egyenlő amplitúdóval tartalmazza. Az adaptációhoz a szűrt referencijelelet használjuk fel, a (2.6) és (2.7) egyenleteknek megfelelően, illetve a transzformált tartományban a szűrt referencijel-vektort. Mivel a referencijel-vektor elemei komplex exponenciálisok, a 2.6 alfejezet nagybetűs jelöléseit alkalmazva (2.7) a következőképpen írható:

$$R_{i,n} = A(\omega_i) X_{i,n} \quad (4.12)$$

Ezzel az adaptációs mechanizmus a (2.6) és (4.3) egyenleteket felhasználva:

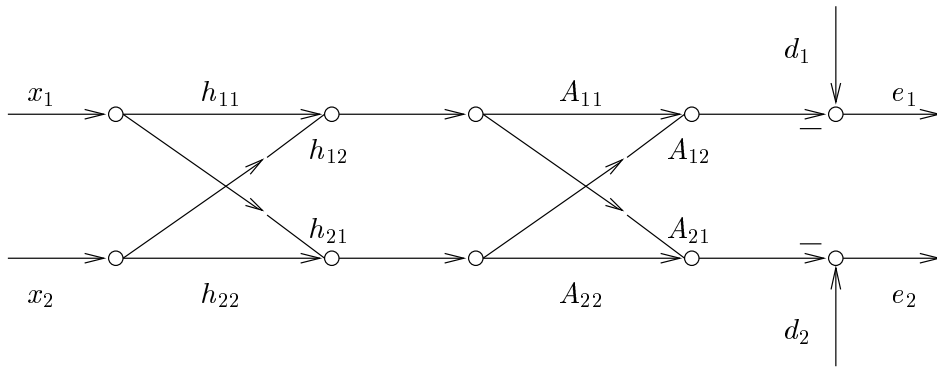
$$\mathbf{h}_{n+1} = \mathbf{h}_n + \alpha e_n \bar{\mathbf{R}}_n \quad (4.13)$$

A fenti egyenleteket összevetve pl. (2.53)-mal, látható, hogy az XLMS algoritmus az egyes rezonátorcsatornákon az $\bar{A}(\omega_i)$ szorzótényezőket alkalmazza. Ezt szemlélteti a 4.4. ábra. A 4.4.a ábra felel meg a (2.6) egyenletnek, a 4.4.b ábra pedig a rezonátoros reprezentációnak. Végeredményben tehát az előreccatolt struktúra esetében az XLMS algoritmus alkalmazásával olyan rezonátoros zajelnyomóhoz jutunk, amelyben

$$w_i = \bar{A}(\omega_i) \quad (4.14)$$

Az MLMS algoritmus esetében a transzformáció hasonlóan végezhető el. Itt is a transzformált tartományból indulunk ki, feltételezzük, hogy $\hat{\mathbf{A}}(z) = \mathbf{A}(z)$ és a komplex exponenciálisok amplitúdói megegyeznek. Mivel az adaptív szűrőmátrixban komplex exponenciálisokként itt is egyetlen súlytényező szükséges, (2.12) a következőképpen módosul:

$$h_{mk,i,n+1} = h_{mk,i,n} + \alpha \sum_{l=1}^L e_{l,n} \bar{R}_{lmk,i,n} \quad (4.15)$$



4.5. ábra. MLMS alapú kétcsatornás periodikus zajelnyomó rendszer

Mivel $\hat{\mathbf{A}}(z)$ bemenőjele komplex exponenciális, (2.11) is egyszerűsödik:

$$R_{lmk,i,n} = A_{lm,i} X_{k,i,n} \quad (4.16)$$

ahol $A_{lm,i}$ $\mathbf{A}(z)$ -nek a komplex exponenciális frekvenciáján való átvitelét jelenti. Viszszahelyettesítve (4.15)-be:

$$h_{mk,i,n+1} = h_{mk,i,n} + \alpha \sum_{l=1}^L e_{l,n} \bar{A}_{lm,i} \bar{X}_{k,i,n} \quad (4.17)$$

Ez mátrixalakban felírva a következő:

$$\mathbf{H}_{i,n+1} = \mathbf{H}_{i,n} + \alpha \mathbf{A}_i^H \mathbf{e}_n \mathbf{X}_{i,n}^H \quad (4.18)$$

Komplex exponenciálisok esetén nincs értelme csatornánként különböző amplitúdójú és fázisú, de azonos frekvenciájú referenciajeleket alkalmazni, elegendő egyetlen referenciajel, ezért a \mathbf{H} mátrix helyett \mathbf{h} vektor is írható:

$$\mathbf{h}_{i,n+1} = \mathbf{h}_{i,n} + \alpha \mathbf{A}_i^H \mathbf{e}_n \bar{X}_{i,n} \quad (4.19)$$

Lényeges, hogy akár a (4.18), akár a (4.19) egyenletben az \mathbf{A}^H mátrixszal nem a referenciajelet, hanem a hibajelet kell megszorozni. Figyelembe véve, hogy

$$\mathbf{e}(\omega) = \mathbf{d}(\omega) - \mathbf{A}(\omega)\mathbf{y}(\omega) \quad (4.20)$$

(3.37) és pl. (3.51) felhasználásával az előrecsatolt struktúra esetében az MLMS algoritmus alkalmazásával olyan rezonátoros zajelnyomóhoz jutunk, amelyben

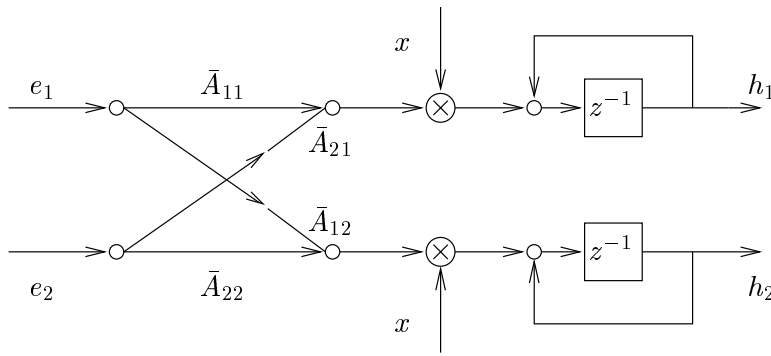
$$\mathbf{W}_i = \mathbf{A}^H(\omega_i) \quad (4.21)$$

Példaként tekintsük a $k, l, m = 2$ esetet. A szűrőt a 4.5. ábra szemlélteti. Az ábrán az egy harmonikus komponenshez tartozó jelút látható, a referenciajel-vektortól a hibajel-vektorig. Az ábrán a jobb áttekinthetőség kedvéért az időindex nem szerepel, hasonlóan nem szerepel az átviteli függvény ω_i indexe, az összeadókat pedig kis körök szimbolizálják. A (4.16) egyenletbe behelyettesítve:

$$\begin{aligned} r_{111} &= A_{11}x_1 & r_{112} &= A_{11}x_2 & r_{121} &= A_{12}x_1 & r_{122} &= A_{12}x_2 \\ r_{211} &= A_{21}x_1 & r_{212} &= A_{21}x_2 & r_{221} &= A_{22}x_1 & r_{222} &= A_{22}x_2 \end{aligned} \quad (4.22)$$

Ezeket a (4.15) egyenletbe behelyettesítve és az azonos referenciavektor elemhez tartozó tényezőket összevonva kapjuk:

$$\begin{aligned} h_{11,n+1} &= h_{11,n} + \alpha \bar{x}_1 (e_1 \bar{A}_{11} + e_2 \bar{A}_{21}) \\ h_{12,n+1} &= h_{12,n} + \alpha \bar{x}_2 (e_1 \bar{A}_{11} + e_2 \bar{A}_{21}) \\ h_{21,n+1} &= h_{21,n} + \alpha \bar{x}_1 (e_1 \bar{A}_{12} + e_2 \bar{A}_{22}) \\ h_{22,n+1} &= h_{22,n} + \alpha \bar{x}_2 (e_1 \bar{A}_{12} + e_2 \bar{A}_{22}) \end{aligned} \quad (4.23)$$



4.6. ábra. Kétcsatornás rendszer adaptációs mechanizmusa

Figyelembe véve, hogy a zajelnyomáshoz skalár referencijel is elegendő,

$$\begin{aligned} x_1, x_2 &\rightarrow x & h_{11}, h_{12} &\rightarrow h_1 \\ & & h_{21}, h_{22} &\rightarrow h_2 \end{aligned} \quad (4.24)$$

Ezzel (4.23) a következőképpen egyszerűsödik:

$$\begin{aligned} h_{1,n+1} &= h_{1,n} + \alpha \bar{x} (e_1 \bar{A}_{11} + e_2 \bar{A}_{21}) \\ h_{2,n+1} &= h_{2,n} + \alpha \bar{x} (e_1 \bar{A}_{12} + e_2 \bar{A}_{22}) \end{aligned} \quad (4.25)$$

Az adaptációs mechanizmus a 4.6. ábrán látható. Az időlépést ezen az ábrán sem jelöltük. Figyeljük meg, hogy a hibavektor valóban \mathbf{A}^H -val szorozódik.

Az adaptív szűrővel felépített előrecsatolt zajelnyomó rendszerek rezonátoros reprezentációja a (4.14) és a (4.21) egyenletekkel adott. Ezek segítségével a jelmodell alapú és az adaptív szűrős zajelnyomó rendszerek összevethetők.

4.3 Zajelnyomó rendszerek összevetése

Az egyes zajelnyomó rendszereket a következő szempontok alapján vethetjük össze:

- stabilitás
- konvergenciasebesség
- maradó hiba (amennyiben releváns)
- $A(z)$ reprezentálása
- $\hat{A}(z)$ felhasználása

Az utóbbi két szempont szerint azt kell megvizsgálni, hogy az adott zajelnyomó rendszer $A(z)$ -ről milyen modellt épít be a rendszerbe, illetve a működés során ezt hogyan használja fel. Ezekon a szempontokon kívül egyéb, elsősorban gyakorlati szempontok is figyelembe vehetők. A 3. fejezetben a rezonátoros zajelnyomó rendszereket a fenti szempontok alapján mutattam be, illetve vizsgáltam. Az alábbiakban az adaptív szűrős rendszereket a reprezentáns rezonátoros struktúra segítségével értékelem, illetve vetem össze a rezonátoros rendszerek 3. fejezetben feltárt tulajdonságaival. Az összehasonlítás során feltételezem, hogy a referencijel előállítás, illetve az AFA frekvenciabecslése ugyanolyan hosszú tranzienssel következik be, azaz a valódi vagy a reprezentáns rezonátoros struktúra rezonátorpozíciói azonos idő alatt állandósulnak. A korábbiakhoz hasonlóan azt is feltételezem, hogy a konvergenciaparaméterek optimálisan vannak beállítva, azaz a leggyorsabb konvergenciát biztosítják.

4.3.1 Egycsatornás rendszerek

A rezonátoros, illetve a reprezentáns rezonátoros struktúra paramétereinek beállítása (3.29) és (4.14) alapján a következő:

$$w_i = \begin{cases} 1/A(\omega_i) \\ \bar{A}(\omega_i) \end{cases} ; i = 1..N \quad (4.26)$$

A stabilitás (3.15) feltételét mindkét paraméterbeállítás

$$\varphi_t = \pi/2 \quad (4.27)$$

fázistartalékkal teljesíti. Ez az eredmény egyébként egybevág [9] 2.2 alfejezetben említett eredményével. Mivel az átviteli függvény változásaival szembeni robusztusság a fázistartalékkal függ össze, az adaptív szűrős és a rezonátoros rendszerek ebből a szempontból egyezőnek tekinthetők. Sebesség szempontjából a rendszerek azonban különböznek: míg a rezonátoros zajelnyomó paraméterbeállítása a 3.2.3 szakaszban leírtaknak megfelelően az optimális beállítást közelíti, addig az adaptív szűrős megoldás nem törekszik erre. Mivel a paraméterek fázisa a két rendszer esetében páronként megegyezik, a különbség a paraméterek abszolút értékében van. Az adaptív szűrős rendszer sokszor igen lassú beállású, az $A(z)$ -ben lévő nagy dinamika miatt. Szemléletesen ez úgy interpretálható, hogy ha $A(z)$ egy adott frekvencián elnyom, akkor $\bar{A}(z)$ révén a hurokban ennek az elnyomásnak a négyzete jelenik meg, és emiatt a rendszer lassú lesz. Hasonlóképpen, ha $A(z)$ egy adott frekvencián kiemel, a nagy hurokerősítés miatt a konvergenciaparamétert csökkenteni kell, amely egyéb frekvenciákon kis hurokerősítést eredményez, azaz a rendszer megintcsak lassú lesz. A rezonátoros zajelnyomó ezzel szemben az $1/A(z)$ alkalmazása révén ezeket a hatásokat csökkenteni igyekszik.

A rezonátorok végtelen hurokerősítése miatt a maradó hiba zérus. Ehhez a rendszereknek el kell érniük az állandósult állapotot. Ha az elnyomandó zaj frekvenciája változik, a maradó hiba nem zérus, de annál kisebb, minél gyorsabb a zajelnyomó rendszer, ezért előnyös a rezonátoros struktúra nagyobb sebessége.

Az adaptív szűrős rendszer $A(z)$ modelljét alkalmazza a referencijel szűrésére az időtartományban. Ez a modell többféle lehet, az előrecsatolt zajelnyomó rendszerek többnyire ebben különböznek egymástól. Ha feltételezzük, hogy $\hat{A}(z)$ transzverzális szűrő, minimálisan I együtthatóra van szüksége, annyira, ahány pontban a rezonátoros zajelnyomáshoz meg kell mérni $A(z)$ -t, hiszen különben nem teljesül a stabilitás szükséges feltétele. Ha $A(z)$ identifikációja 2.2 alfejezetben leírt módon, a szűrő előzetes adaptálásával történt, az együtthatók száma nagyobb lehet, $A(z)$ késleltetése miatt. ($A(z)$ mintái ugyanis nem tartalmaztak információt a 2π -nél nagyobb fázistolásról.)

A rezonátoros zajelnyomó rendszer $A(z)$ mintáit használja fel, de az aktuális minták száma az elnyomott harmonikusok számával egyezik meg. Ez a rendszer az $A(z)$ -vel kapcsolatos információt a frekvenciatartományban alkalmazza. Mivel általában $N \ll I$, ez a megoldás mindenképpen számítástechnikai nyereséget jelent. Az átviteli függvény mintáinak invertálása off-line végezhető. Az invertálás általában nem okoz problémát, ugyanis az a rendszer, amelyben az invertálandó minta nullához közeli, azt követelné meg, hogy a beavatkozó irreálisan nagy teljesítménnyel működjék, ennek következtében a fizikai rendszer rosszul megtervezett.

A rezonátoros zajelnyomó rendszer és az adaptív szűrő működtetése lényegében azonos számítási igényt jelent, hiszen a szükséges állapotváltozók, illetve együtthatók száma megegyezik. A különbség csak $\hat{A}(z)$ felhasználásában mutatkozik, így a teljes rendszert tekintve is igaz, hogy a rezonátoros struktúra számításigénye lényegesen kisebb, mint az adaptív szűrős struktúráé.

A hibajel Fourier-felbontásán alapuló rezonátoros zajelnyomó rendszer további előnyöket kínál, elsősorban sebesség tekintetében. Az ilyen rendszerek működtetéséhez szükséges számításgépi-többlet ellenére általában ez a megoldás is kedvezőbb, mint az adaptív szűrős struktúra. A hibajel Fourier-felbontásán alapuló rendszer olyan adaptív eljárással analóg, amely a hibajelet is a transzformált tartományban képi. Az ilyen struktúra alkalmazása akkor előnyös, ha a transzformált jel csatornánként jól leírható, ami periodikus jelek esetében teljesül [32].

4.3.2 Többcsatornás rendszerek

A rezonátoros, illetve a reprezentáns rezonátoros struktúra paramétereinek beállítása (3.45) és (4.21) alapján a következő:

$$\mathbf{W}_i = \begin{cases} \mathbf{A}^\#(\omega_i) \\ \mathbf{A}^H(\omega_i) \end{cases} ; i = 1..N \quad (4.28)$$

Adaptív szűrős zajelnyomó esetében vizsgálandók a

$$\mathbf{A}(\omega_i)\mathbf{A}^H(\omega_i) \quad (4.29)$$

mátrix sajátértékei. Mivel azonban a fenti mátrix pozitív definit, illetve $M < L$ esetben pozitív szemidefinit, sajátértékei pozitívak, illetve zérusok, így a stabilitás (3.43) feltételét a rezonátoros zajelnyomóval megegyező módon

$$\varphi_t = \pi/2 \quad (4.30)$$

fázistartalékkal teljesíti. A sebességre vonatkozóan az egycsatornás rendszerekre tett megállapítások igazak.

A maradó hiba az $M \geq L$ esetben itt is zérus, vizsgálandó azonban az $M < L$ eset. Ehhez a (3.61) egyenletbe kell behelyettesíteni:

$$\mathbf{y}(\omega_i) = (\mathbf{A}(\omega_i)\mathbf{A}^H(\omega_i))^{-1}\mathbf{A}^H(\omega_i)\mathbf{d}(\omega_i) \quad (4.31)$$

Mivel azonban ebben az $M < L$ esetben

$$\mathbf{A}^\#(\omega_i) = (\mathbf{A}(\omega_i)\mathbf{A}^H(\omega_i))^{-1}\mathbf{A}^H(\omega_i) \quad (4.32)$$

a rezonátoros zajelnyomóhoz hasonlóan ez a rendszer is a minimális normájú megoldáshoz tart. Hangsúlyozandó azonban, hogy a hiba normáját nem lehet tetszőleges, a stabilitási feltételt kielégítő \mathbf{W}_i mátrixszal minimalizálni.

Az átviteli függvény reprezentálásával és felhasználásával kapcsolatban a két rendszer viszonya az egycsatornás rendszerekéhez hasonlóan alakul. Az adaptív szűrős zajelnyomó rendszer az átviteli függvény mátrix minden elemét egy transzverzális szűrővel közelíti. I -vel jelölve a szükséges együtthatók számát, $I \times L \times M$, illetve K számú referenciajelet alkalmazva $I \times K \times L \times M$ együtthatós szűrést kell végrehajtani. Ezzel szemben a rezonátoros zajelnyomó az átviteli függvény mátrixot szintén I pontban mérve $N \times L \times M$ együtthatóval (ahol N a harmonikusok száma) végez szorzást. A rezonátoros struktúra számítási nyeresége ugyanolyan arányú, illetve, ha K referenciajelet alkalmaz az adaptív szűrő, ennél nagyobb, speciálisan, ha pl. $K = M$, ez a nyereség a kimenetek számával négyzetesen nő.

Az átviteli függvény mátrix transzponált konjugáltjának kiszámítása az adaptív szűrős rendszerekben nem okoz gondot. A pszeudinverz számítása a rezonátoros zajelnyomó esetében bonyolultabb feladat, de mivel off-line végezhető, szintén megoldható. Továbbra is igaz, hogy az inverz számítása akkor bizonytalan, ha az átviteli függvény

mátrix rosszul kondicionált, ebben az esetben viszont a fizikai rendszer rosszul megtervezett. A fizikai rendszer tesztelésére alkalmas az átviteli függvény mátrix mintái kondíciószámának kiszámítása. (A [27]-ben leírt kísérletekben ez a kondíciószám jellemzően néhány száz volt.)

A többcsatornás zajelnyomó rendszerek számításigény-viszonyai az egycsatornáséhoz hasonlóan alakulnak, tehát a rezonátoros zajelnyomó rendszer lényegesen kisebb számításigényű.

A számítási igényvel függ össze, de elvi jelentőségű, hogy a jelmodell alapú zajelnyomó rendszer a visszacsatoló átviteli függvénynek csak a periodikus zaj komponensei által meghatározott frekvenciákon vett mintáit alkalmazza. Ez azt jelenti, hogy adott bemenőjel frekvencia esetén egy magas (akár több száz) fokszámú függvényt csak néhány frekvenciapontban mintavételezve – tehát a visszacsatoló rendszert alulmodellezve – kínál az adaptív rendszerekkel megegyező, illetve kedvezőbb tulajdonságokat. Amennyiben a bemenőjel frekvenciája változik, az alkalmazandó paraméterkészlet is változik, ezért van szükség az átviteli függvény mintáinak megfelelő sűrűségű ismeretere. Az alulmodellezettség még a teljes off-line paraméterhalmazra is igaz lehet, ha a bemenőjel lehetséges frekvenciájáról a priori ismeret áll rendelkezésre (pl. 50 Hz).

Végezetül az egyes zajelnyomó rendszerek főbb tulajdonságait az alábbi táblázatban foglalhatjuk össze:

	adaptív előrecsatolt rendszer	rezonátoros
stabilitás	$\varphi_t = \pi/2$	
sebesség	<	
maradó hiba	0/min.	
$\mathbf{A}(z)$ reprezentálása	$\hat{\mathbf{A}}(z) \approx \mathbf{A}(z)$	$\hat{\mathbf{A}}(z_i) = \mathbf{A}(z_i)$
$\hat{\mathbf{A}}(z)$ felhasználása	$r_{lmk,n} = \sum_{i=0}^{l-1} \hat{a}_{lmi} x_{k,n-i}$	$\mathbf{W}_i = \hat{\mathbf{A}}^\#(z_i)$

A táblázatból is kitűnik, hogy a rezonátoros zajelnyomó rendszer sebességbeli, illetve számítástechnikai előnyöket kínál az adaptív szűrős rendszerekkel szemben, ezért előnyösen alkalmazható periodikus zavarhatások aktív csökkentésére.

4.3.3 Dualitás

A rezonátoros alapstruktúra és az LMS algoritmus között fennálló összefüggés nem tűnheti ki egyik struktúrát sem. Az egyes zajelnyomó rendszerek összehasonlításánál azonban – ahol ez szükséges volt – a reprezentáns rezonátoros struktúrát használtuk fel, hiszen az arra vonatkozó összefüggések a 3. fejezet alapján rendelkezésre álltak. Ebben a szakaszban azt mutatom meg, hogy a rezonátoros zajelnyomó struktúra paramétermegválasztása hogyan adódik az adaptív szűrős megközelítésből.

A periodikus referenciajel felveti a transzformált tartománybeli szűrés lehetőségét. A komplex exponenciálisokból álló referenciajel-vektorhoz transzformációval, vagy valamilyen egyéb, az adaptív rendszertől független eljárással juthatunk. Ezek után lehetőségünk van arra, hogy az adaptációt csatornánként tartsuk kézben, ezzel növelve a rendszer sebességét. Ennek a feladatnak a megoldására a teljesítménynormálás kínálkozik: az egyes csatornákon a bejövő jel teljesítményével osztani kell. A teljesítménynormálás az LMS algoritmus esetében az autokorrelációs mátrix sajátértékeit teszi egyenlővé, biztosítva ezáltal a véges beállást. Az XLMS algoritmus esetében a referenciajel autokorrelációs mátrixa helyett a referenciajel és az $A(z)$ -vel szűrt referenciajel keresztkorrelációs

mátrixát kell tekinteni [30]. Ha az adaptív szűrést a diszkrét Fourier-transzformációt felhasználva a frekvenciatartományban hajtjuk végre, az $A(z)$ -vel való szűrés az adott csatornán való szorzásnak felel meg. A teljesítménynormálás egyenlő amplitúdójú komplex exponenciálisokat feltételezve tehát nem jelent mást, mint $|A(z)|^2$ -tel való osztást. Végeredményben tehát a referenciajelet a

$$w_i = \frac{\bar{A}(\omega_i)}{|A(\omega_i)|^2} = \frac{1}{A(\omega_i)} \quad (4.33)$$

szorzótényezővel szoroztuk, amely megfelel az ismert (3.29) beállításnak. A rezonátoros struktúra és a hozzá kapcsolódó zajelnyomó algoritmus tehát úgy tekinthető, mint a fenti eljárás adekvát megvalósítása.

5. fejezet

Szimulációk

A jelmodell alapú zajelnyomó rendszerek 3. és 4. fejezetben bemutatott elméleti vizsgálatait szimulációk egészítik ki. Az itt bemutatandó példák célja egyrészt a javasolt módszerek és eredmények illusztrálása, másrészt a sebességgel kapcsolatos állításokhoz szimulációs eredmények közlése. A konkrét példák előtt bemutatom az egyes rendszerek vizsgálatához alkalmazott szimulációs környezetet. Ebben a dolgozatban nem cél a fejlesztéshez kapcsolódó programok részletes ismertetése, minthogy azonban általánosságban az új jelfeldolgozó algoritmusok kifejlesztésének fontos része a szimuláció, ezeknek az eszközöknek a rövid bemutatása indokolt.

5.1 A szimulációs környezet

A szimulációkat MATLAB programok segítségével végeztem. A MATLAB használata jelfeldolgozó algoritmusok vizsgálatára, szimulációjára általánosanak nevezhető. A zajelnyomó módszerek vizsgálata során különösen jól alkalmazható a többcsatornás rendszerekkel kapcsolatos mátrixműveletek, illetve az állapotmátrixszal kapcsolatos számítások elvégzésére. A 3. és a 4. fejezetben megfogalmazott célokkal összhangban a következő programok készültek el:

- Az egyes jelmodell alapú zajelnyomó algoritmusok vizsgálata az időtartományban. A programok a 3.2.b, 3.3., illetve 3.13., 3.17. ábrán látható rendszereket szimulálják. Az AFA adaptációs mechanizmusa is beállítható. A függvények bemenete a referencijel, illetve az elnyomandó jel, $A(z)$ ($\mathbf{A}(z)$) racionális törtfüggvény alakban, továbbá az α konvergenciaparaméter. Maga az algoritmus csak az átviteli függvény mintáit igényli, de a teljes rendszer szimulációjához szükség van az átviteli függvényre is. A szimuláció során a 3.5.1 szakaszban bemutatott átviteli függvény mérését a minták kiszámítása helyettesíti, a minták felhasználása teljesen megfelel az ott leírtaknak. A programok kimenetei különböző diagrammok, elsősorban a hibajel. Lényeges még az AFA mint alrendszer hibajele is, hiszen a zajelnyomó rendszer konvergenciája csak a helyes frekvenciabecslés után kezdődik, azaz amikor az AFA hibajele már zérus.
- A zajelnyomó algoritmusok vizsgálata az állapottérben. Erre a vizsgálatra a sebességgel kapcsolatos állítások indoklásához volt szükség, illetve jól használható az egyes algoritmusok sebességének összehasonlítására. A programok bemenetei a zajelnyomó rendszer paraméterei, illetve $A(z)$ állapotváltozós leírásának paraméterei. A többcsatornás rendszerek vizsgálatához ilyen program nem készült. A kimenet ebben az esetben a legnagyobb abszolút értékű sajátérték abszolút értéke a konvergenciaparaméter függvényében diagramm formájában. Ennek a szimulációnak a részletei megtalálhatók a 3.2.3 szakaszban.

- Az XLMS algoritmust megvalósító program. Ennek bemenetei megegyeznek a jelmodell alapú algoritmusok bemeneteivel, a kimenet pedig a hibajel.
- A konvergenciaparamétert becslő program. A program a 3.5.2 szakaszban leírt eljárást valósítja meg. A program bemenetei a zajelnyomó rendszer paraméterei, illetve $A(z)$ mintái. A kimenet ebben az esetben is egy diagramm, az integráلكészítő összeg a konvergenciaparaméter függvényében.

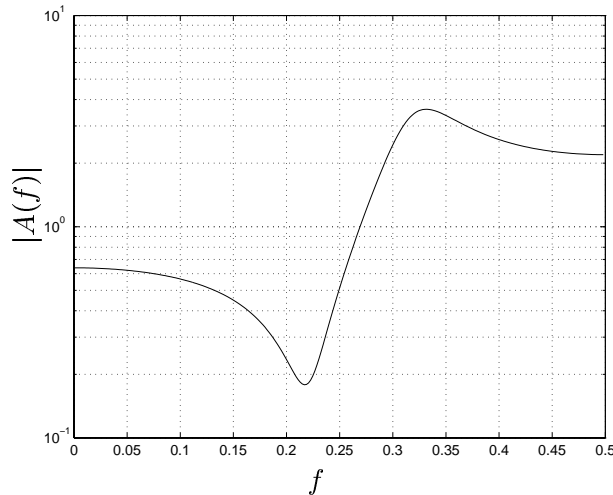
5.2 Példák

5.2.1 A jelmodell alapú zajelnyomó rendszerek jellemző időfüggvényei

A következő példákban a különböző jelmodell alapú zajelnyomó rendszerek jellemző időfüggvényeit mutatom be. Az elnyomandó jel $f = 1/10$ frekvenciájú szimmetrikus háromszögjel, a rezonátorok száma: $N = 9$. Az r_i paraméterek beállítása a (3.28) egyenlet szerinti. Az egyes rendszerekben természetesen α beállítása különböző. Az átviteli függvény, amelyen keresztül az elnyomást meg kell valósítani, a (3.30) képlettel adott, azaz:

$$A(z) = \frac{z^2 - 0.3373z + 0.8100}{z^2 + 0.6627z + 0.6414} \quad (5.1)$$

Az átviteli függvény abszolút értéke az 5.1. ábrán látható.



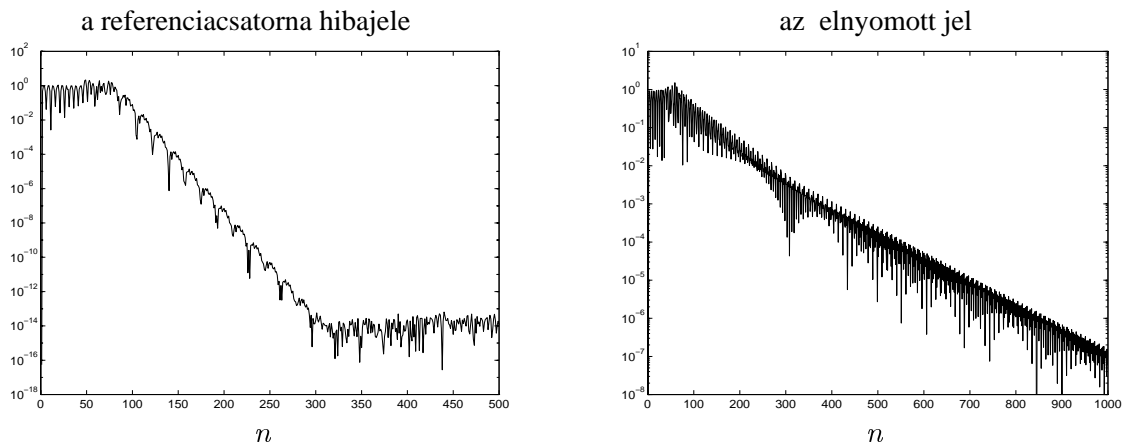
5.1. ábra. Az (5.1) képlettel adott átviteli függvény abszolút értéke

1. példa

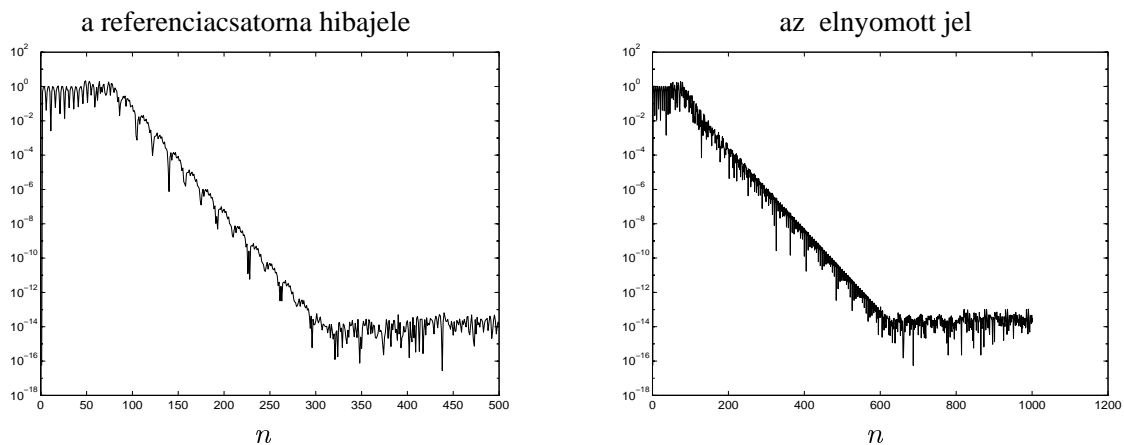
A zajelnyomó struktúra a 3.2.b ábra szerinti. Az AFA a rezonátorok frekvenciáját a (2.54) egyenlet szerint adaptálja. A konvergenciaparaméter értéke $\alpha = 0.3$. Az 5.2. ábrán a referenciacsatorna hibajele (az AFA hibajele), illetve az elnyomott jel látható. Az AFA hibája megközelítően 100 lépés után kezd el csökkenni, és 300 lépés után eléri a számítási hiba szintjét. Jól látható, hogy a zajelnyomás csak akkor kezdődik meg, amikor az AFA a referenciajelet jól rekonstruálja, azaz a frekvenciát helyesen becsli, ettől kezdve viszont az elnyomott jel exponenciálisan tart a nullához.

2. példa

A zajelnyomó struktúra a 3.13. ábra szerinti. Az AFA a rezonátorok frekvenciáját ismét a (2.54) egyenlet szerint adaptálja. A konvergenciaparaméter értéke $\alpha = 0.5$. Az 5.3. ábrán ismét a referenciacsatorna hibajele, illetve az elnyomott jel látható. Ebben az esetben az elnyomott jel kb. 600 lépés után éri el a számítási hiba szintjét. A két példában α értéke mindig az adott struktúra melletti leggyorsabb beállást biztosította, így jól



5.2. ábra. 1. példa. A referenciacsatorna hibajele és az elnyomott jel



5.3. ábra. 2. példa. A referenciacsatorna hibajele és az elnyomott jel

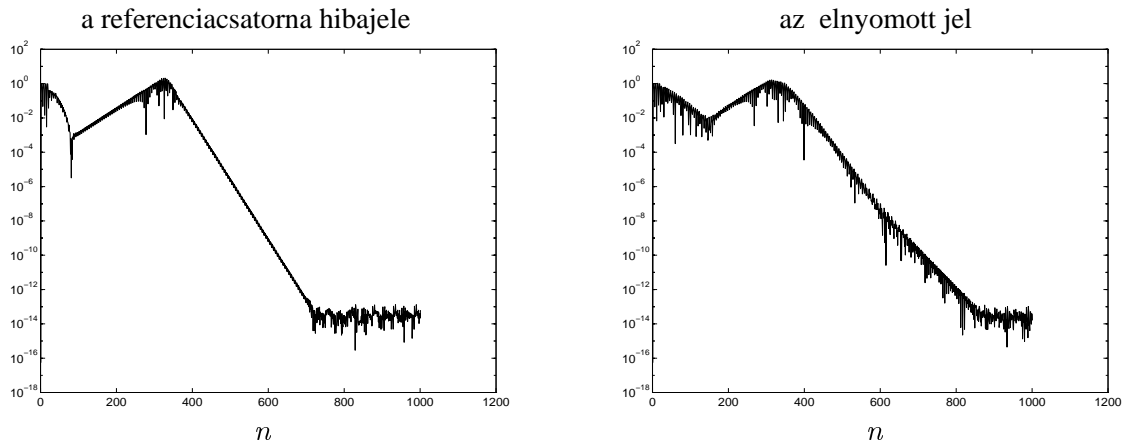
látható, hogy a második, a hibajelet Fourier-komponenseire bontó rendszer lényegesen gyorsabb.

3. példa

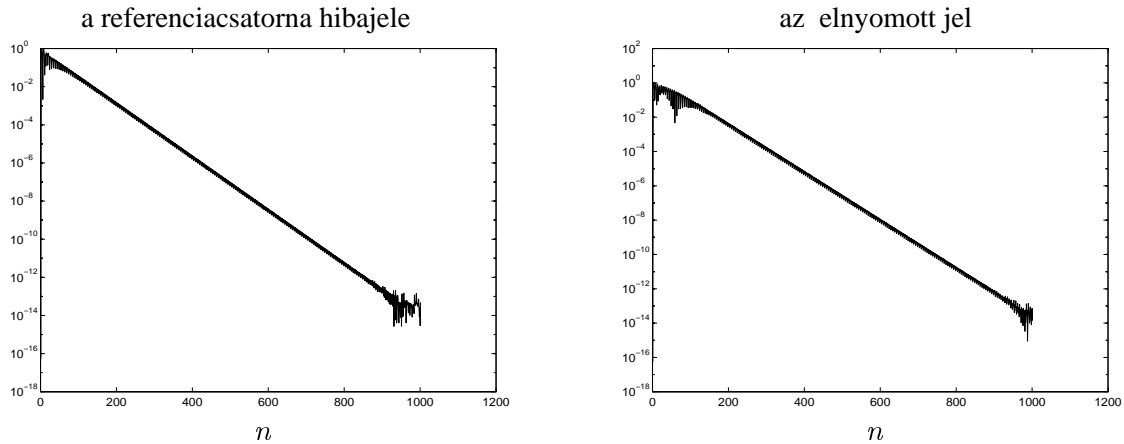
A zajelnyomó struktúra a 3.13 ábrán látható, de az AFA a rezonátorok frekvenciáját most a (3.87) egyenlet szerint adaptálja, azaz nincs szükség különálló referenciajelre. A konvergenciaparaméter értéke $\alpha = 0.5$. Az 5.4. ábrán ismét a referenciacsatorna hibajele, illetve az elnyomott jel látható. Jól látható, hogy a kezdeti gyors konvergencia után a hibajel exponenciálisan növekedve eléri a kezdeti értékét, és az újabb konvergencia csak ebben a pontban kezdődik. Ennek megfelelő az elnyomott jel időfüggvénye is. A jelenség oka az, hogy a kezdeti gyors konvergencia során az AFA a második rezonátort hangolta rá a jel alapharmonikusára. Ez kezdetben (a rossz frekvenciabecslés ellenére) biztosította a konvergenciát, de a számítási zaj kibillentette a rendszert ebből a labilis egyensúlyi helyzetből. A gyakorlatban az AFA bemenőjelében mindig jelen van olyan teljesítményű zaj, amely az ilyen jelenségeket megakadályozza. Amennyiben a konvergenciaparamétert csökkentjük, a rendszer lelassítása árán elkerülhető a hamis konvergencia. $\alpha = 0.2$ esetére a hibajelek időfüggvénye az 5.5. ábrán látható.

4. példa

A zajelnyomó struktúra a 3.17. ábrán látható többcsatornás rendszer, ebben az esetben két csatornával. Az AFA a rezonátorok frekvenciáját ismét a (2.54) egyenlet szerint



5.4. ábra. 3. példa. A referenciacsatorna hibajele és az elnyomott jel; $\alpha = 0.5$



5.5. ábra. 3. példa. A referenciacsatorna hibajele és az elnyomott jel; $\alpha = 0.2$

adaptálja. Az átviteli függvény mátrix a következő:

$$\mathbf{A}(z) = \frac{z^2 - 0.3373z + 0.8100}{z^2 + 0.6627z + 0.6414} \begin{bmatrix} 1 & 0.1z^{-6} \\ 0.1z^{-6} & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

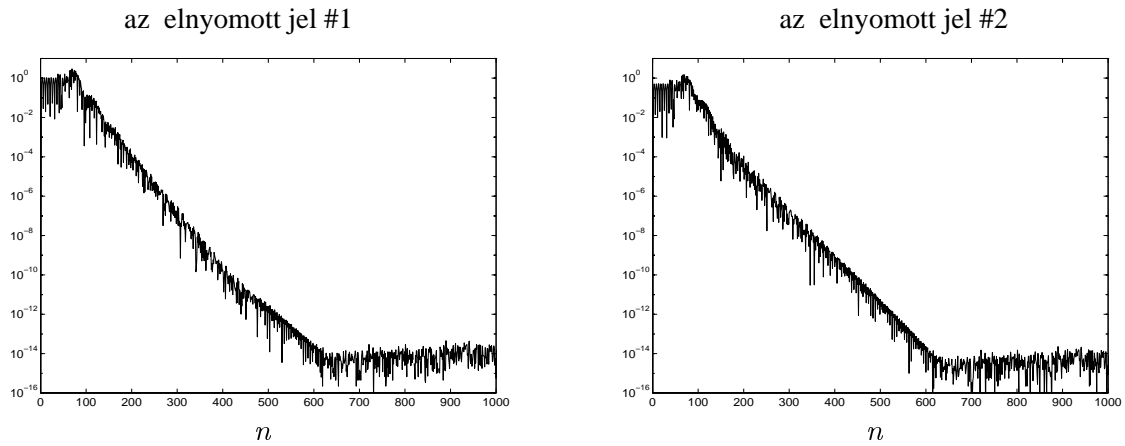
A konvergenciaparaméter értéke $\alpha = 0.5$. Az 5.6. ábrán csak a két csatorna jele látható.

5.2.2 A maximális abszolútértékű sajátértékek vizsgálata

Az itt következő példák az egyes rendszerek sebességviszonyainak bemutatására, illetve a (3.29) egyenlettel adott paraméterbeállítás verifikálására szolgálnak. Az eljárás részleteit a 3.2.3 szakasz tartalmazza. Az alábbi példákban a legnagyobb sajátértéket α függvényében az ábrákon látható intervallumokban 100 ekvidisztáns pontban határoztuk meg. A paraméterek kismértékű megváltoztatása a (3.34) egyenletnek megfelelően történt, úgy, hogy:

$$|\zeta_i| \in E[0.85, 1.15]; \quad \text{arc}(\zeta_i) \in E[-0.15, 0.15] \quad (5.3)$$

ahol $E[.]$ az adott intervallumban való egyenletes eloszlást jelöli. Minden esetben 10, a javasolt beállítástól eltérő paraméterkészletre határoztuk meg a maximális sajátértékeket. A példák mindegyikében a rezonátorok száma $N = 9$. A görbék minden esetben

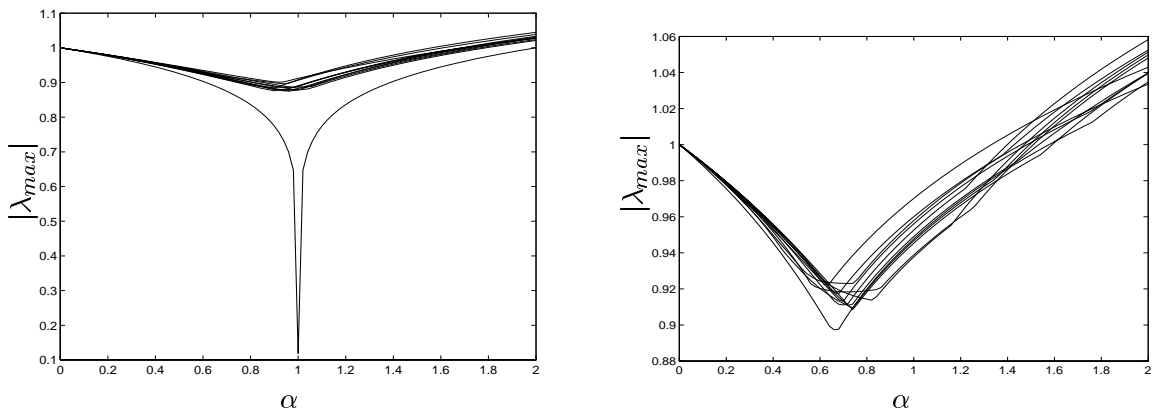


5.6. ábra. 4. példa. A két elnyomott jel

$\alpha = 0$ -ból indulnak, ahol $|\lambda_{\max}| = 1$, hiszen ebben az esetben nincs visszacsatolás, és az egyes részrendszerek megtartják a sajátértékeiket. $A(z)$ stabil, tehát ennek sajátértékei kisebbek 1-nél, a rezonátorok sajátértékei pedig éppen egységnyi abszolút értékűek. α növelésével (amennyiben a paraméterbeállítás teljesíti a stabilitás feltételét) a maximális sajátérték csökken, majd egy optimum elérése után újra növekedni kezd. A stabilitás határa az az α , amely mellett a maximális sajátérték újra egységnyi abszolút értékű lesz. A rendszer sajátértékei α változásával nem egyformán változnak, ezért nem mindig ugyanaz a sajátérték lesz a maximális. Ennek következtében a görbében törések következnek be ott, ahol a maximális sajátérték szerepét egy másik sajátérték veszi át.

5. példa

$A(z) = z^{-8}$, $f = 1/9$, illetve $f = 1/10$. A modellezett zajelnyomó rendszer a 3.2.b ábra szerinti. A szimulációk eredménye az 5.7. ábrán látható. Mivel az $A(z)$ -ben lévő késleltetések száma $N - 1$, egyenletes rezonátorelhelyezkedés esetén a javasolt paraméterbeállítással a rendszer véges beállású. $f = 1/10$ esetén a beállítás még a legkedvezőbb esetben sem véges, de a rendszer gyors. A javasolttól eltérő paraméterbeállításhoz tar-



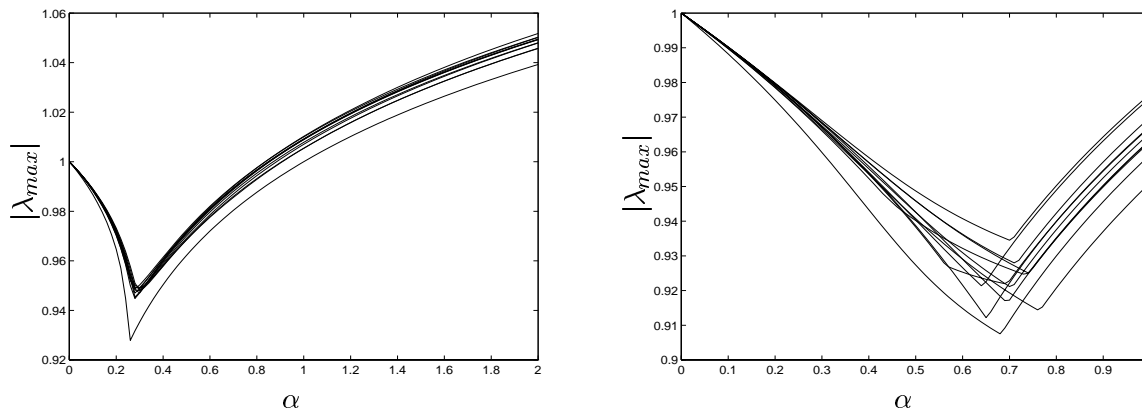
5.7. ábra. 5. példa. A maximális sajátértékek α függvényében, $f = 1/9$ és $f = 1/10$ esetén

tozó görbék egyértelműen nagyobb maximális sajátértéket eredményeznek.

6. példa

A modellezett zajelnyomó rendszer az előző, de $A(z) = z^{-9}$. A szimulációk eredménye az 5.8. ábrán látható. Mivel az $A(z)$ -ben lévő késleltetések száma N , egyenletes rezonátorelhelyezkedés esetén sem érhető el a véges beállítás. A két különböző frekvencia

esetén a minimumhely eltolódik, de a minimumok között nincs számottevő különbség. A javasolttól eltérő paraméterbeállításhoz tartozó görbék itt is egyértelműen nagyobb

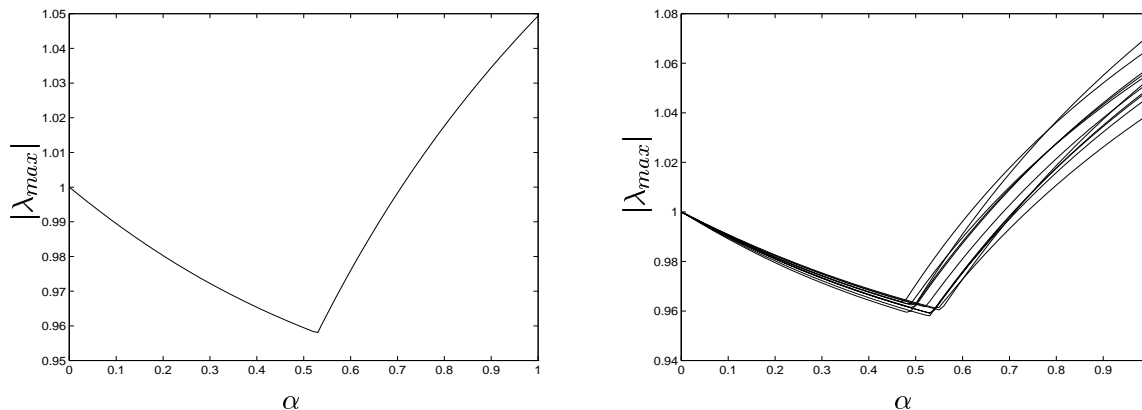


5.8. ábra. 6. példa. A maximális sajátértékek α függvényében, $f = 1/9$ és $f = 1/10$ esetén

maximális sajátértéket eredményeznek.

7. példa

A modellezett zajnyomó rendszer a 3.13. ábra szerinti. $A(z)$ az (5.1) egyenlettel adott, $f = 1/9$. A szimuláció eredménye az 5.9. ábrán látható. Ebben az esetben a ma-



5.9. ábra. 7. példa. A maximális sajátértékek α függvényében a javasolt paraméterkészlettel és annak (3.34) és (5.3) szerinti megváltoztatásával

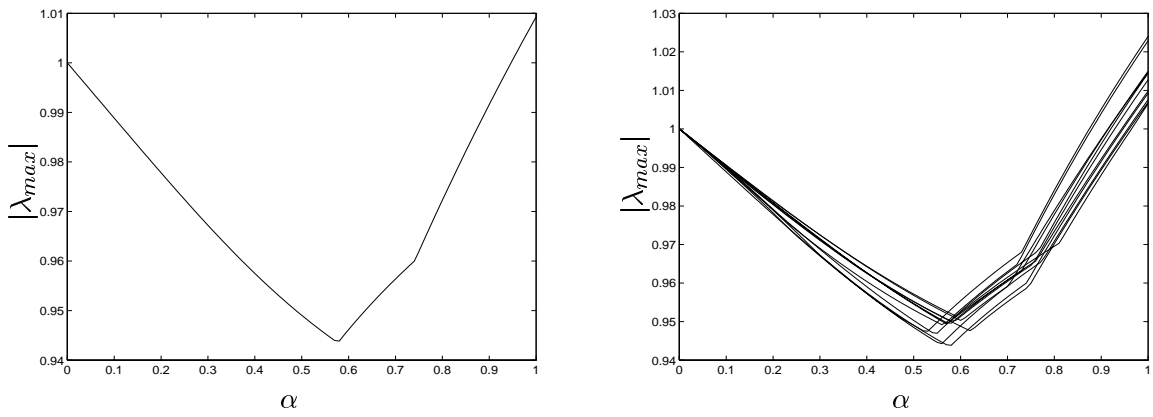
ximális abszolút értékű sajátértékek minimuma $\min(|\lambda_{\max}|) = 0.9581$ $\alpha = 0.53$ mellett. Jól látható, hogy a paraméterkészlet megváltoztatása lassabb rendszert eredményez.

8. példa

A modellezett zajnyomó rendszer a 3.13. ábra szerinti. $A(z)$ az (5.1) egyenlettel adott, $f = 1/10$. A szimuláció eredménye az 5.10. ábrán látható. Ebben az esetben $\min(|\lambda_{\max}|) = 0.9439$ $\alpha = 0.58$ mellett. A paraméterkészlet megváltoztatása ebben az esetben is lassabb rendszert eredményez. Lényeges, hogy a frekvencia megváltozásával a minimum és annak helye nem változott meg jelentősen.

9. példa

A modellezett zajnyomó rendszer a 3.13. ábra szerinti. $A(z)$ ebben a példában egy

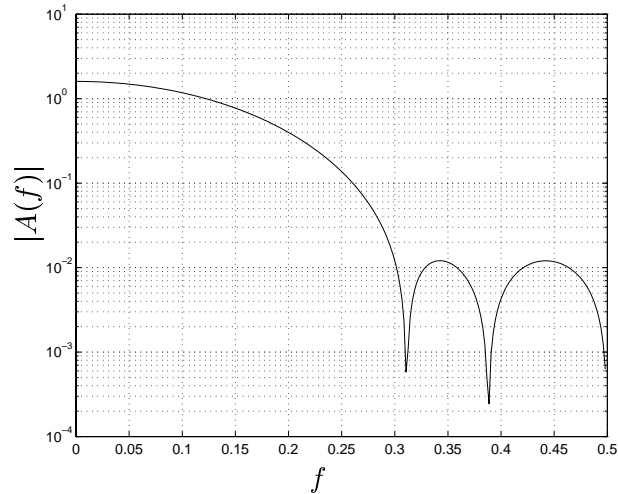


5.10. ábra. 8. példa. A maximális sajátértékek α függvényében a javasolt paraméterkészlettel és annak (3.34) és (5.3) szerinti megváltoztatásával

véges impulzusválaszú szűrő, amelynek együtthatói:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} -0.0010151 \\ 0.081295 \\ 0.27065 \\ 0.44980 \\ 0.44980 \\ 0.27065 \\ 0.081295 \\ -0.0010151 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Az átviteli függvény abszolút értéke az 5.11. ábrán látható. Legyen ismét $f = 1/9$. A

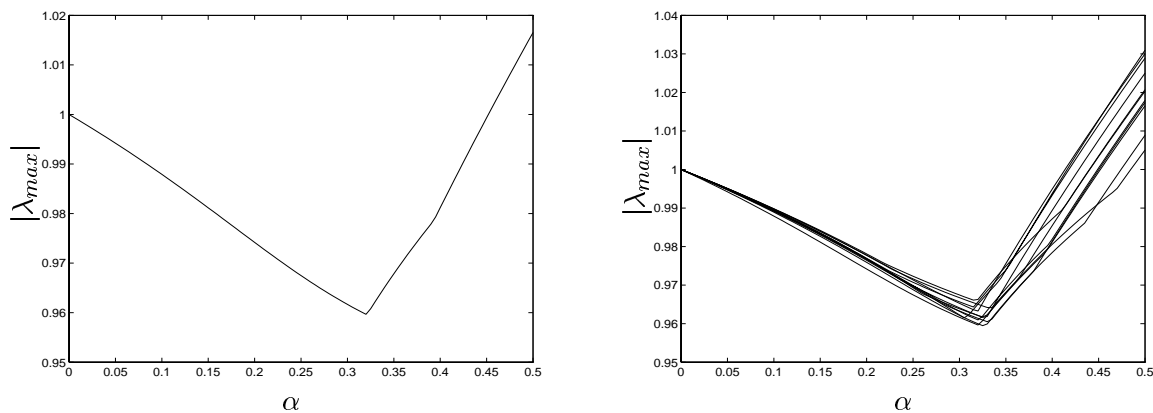


5.11. ábra. Az (5.4) együtthatókészlettel adott átviteli függvény abszolút értéke

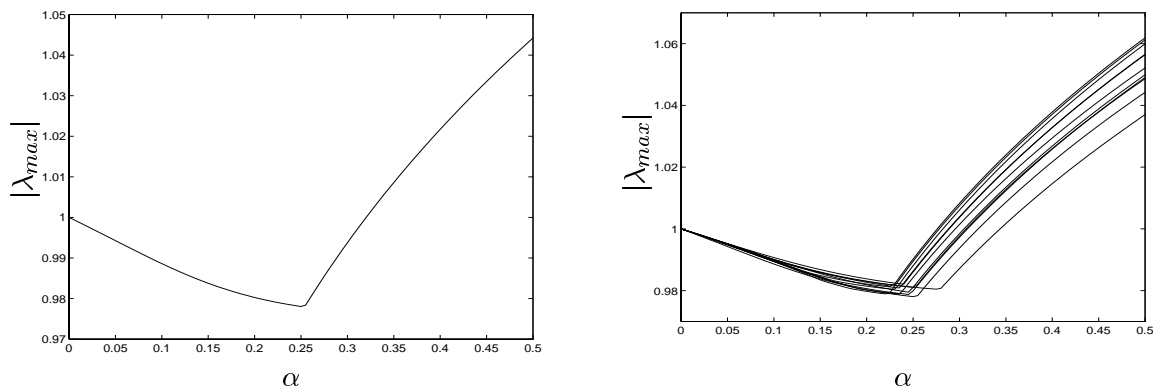
szimuláció eredménye az 5.12. ábrán látható. Ebben az esetben $\min(|\lambda_{\max}|) = 0.9597$ $\alpha = 0.32$ mellett. A paraméterkészlet megváltoztatása ebben az esetben is lassabbnak eredményez.

10. példa

A modellezett zajelnyomó rendszer a 3.13. ábra szerinti. $A(z)$ az előző példában szerepelt véges impulzusválaszú szűrő. A frekvencia $f = 1/10$. A szimuláció eredménye az 5.13. ábrán látható. Ebben az esetben $\min(|\lambda_{\max}|) = 0.9780$ $\alpha = 0.25$ mellett.



5.12. ábra. 9. példa. A maximális sajátértékek α függvényében a javasolt paraméterkészlettel és annak (3.34) és (5.3) szerinti megváltoztatásával



5.13. ábra. 10. példa. A maximális sajátértékek α függvényében a javasolt paraméterkészlettel és annak (3.34) és (5.3) szerinti megváltoztatásával

A paraméterkészlet megváltoztatása ebben az esetben is lassabb rendszert eredményez. Ebben az esetben is igaz, hogy a frekvencia megváltozásával a minimum és annak helye nem változott meg jelentősen.

5.2.3 Az XLMS algoritmus alkalmazása

Az összehasonlítás érdekében két fenti példára a zajelnyomást az előrecsatolt struktúrával is bemutatom. A rendszer a 2.5. ábrán látható. Az adaptáció az XLMS algoritmussal történik. Az adaptív szűrő bemenőjele (a referenciajel) mindkét esetben $f = 1/9$ frekvenciájú, az egyes komplex exponenciálisokat egyenlő amplitúdóval és nulla fázissal tartalmazó periodikus jel. Az elnyomandó jel $d = \sin 2fn$ volt. A példák elemzésére az egyes rendszerek összehasonlítása kapcsán térünk vissza.

11. példa

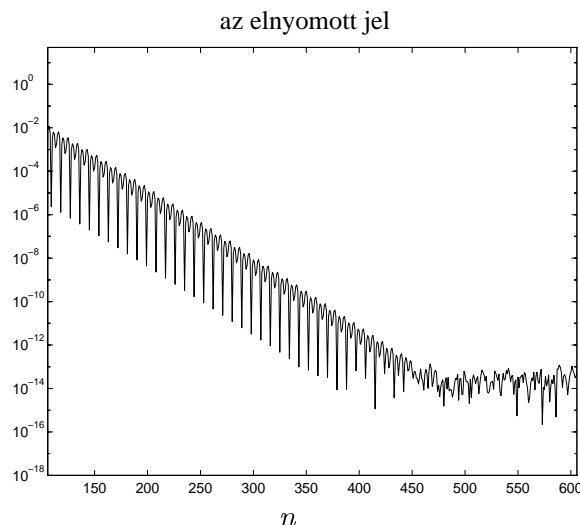
$A(z) = z^{-9}$, $\alpha = 0.003$. A szimuláció eredménye az 5.14. ábrán látható.

12. példa

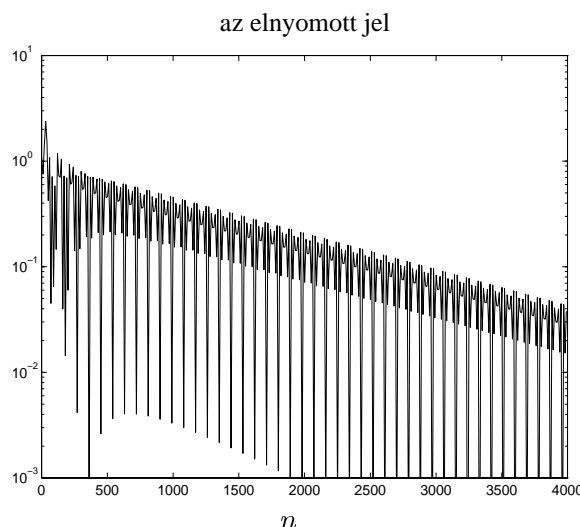
Az átviteli függvény az (5.1) szerinti, $\alpha = 0.0025$. A szimuláció eredménye az 5.15. ábrán látható.

5.2.4 Zajelnyomó rendszerek összehasonlítása

Az itt bemutatandó példák az adaptív szűrőt alkalmazó, és a kétféle (a hibajelet komponenseire bontó és fel nem bontó) rezonátoros zajelnyomó közötti különbségeket és



5.14. ábra. 11. példa. Az előrecsatolt struktúra elnyomott jele $A(z) = z^{-9}$ esetén



5.15. ábra. 12. példa. Az előrecsatolt struktúra elnyomott jele az (5.1) szerinti $A(z)$ esetén

hasonlóságokat tárják fel.

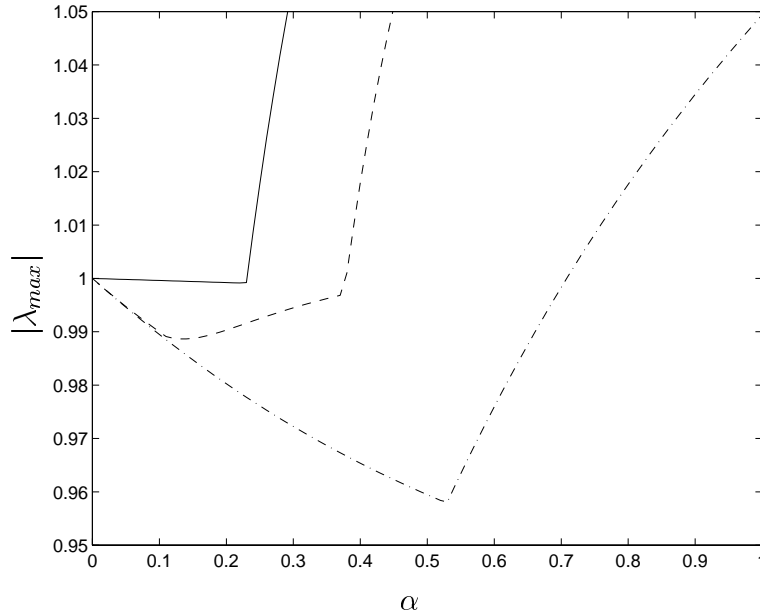
13. példa

Elsőként tekintsük azt az esetet, amelyben $A(z) = z^{-9}$ és $f = 1/9$. Mivel itt az átviteli függvény abszolút értéke egységnyi, az XLMS algoritmussal adaptált előrecsatolt rendszernek és a rezonátoros zajelnyomónak ugyanazt az eredményt kell adnia. Mivel $A(z)$ egyszerű rendszer, itt a hibajeleket közvetlenül felhasználó rezonátoros struktúrát alkalmazhatjuk. Erre az esetre a 6. példa (5.8. ábra) vonatkozik, ahol $\min(|\lambda_{\max}|) = 0.9259$ $\alpha_1 = 0.25$ mellett. Az XLMS algoritmusához a 11. példa (5.14. ábra) tartozik, ahol a konvergenciaparaméter $\alpha_2 = 0.003$. Az exponenciálisan nullához tartó görbe meredekségéből kiszámítható, hogy ennek a rendszernek a legnagyobb sajátértéke megegyezik a rezonátoros rendszer legnagyobb sajátértékével. A konvergenciaparaméterek közötti kapcsolat pedig (4.11) alapján $\alpha_1 = N^2\alpha_2$, amely a mi esetünkben teljesül is.

14. példa

Ebben a példában ismét az (5.1) szerinti IIR rendszert tekintjük, $f = 1/9$ esetén. Az 5.16. ábrán a következő rendszerek maximális sajátértékei szerepelnek: a folytonos

vonaltartozik az XLMS algoritmus adaptált szűrőhöz, a szaggatott az egyszerű rezonátoros struktúrához, a pontozott pedig a hibajel komponenseire bontó rezonátoros rendszerhez. Az XLMS algoritmus adaptált szűrő sajátértékeit a rezonátoros reprezen-



5.16. ábra. 14. példa. Az egyes zajelnyomó rendszerek összehasonlítása $f = 1/9$ esetén. folytonos vonal: XLMS; szaggatott vonal: egyszerű rezonátoros; pontozott vonal: a hibajel komponenseire bontó rezonátoros rendszer

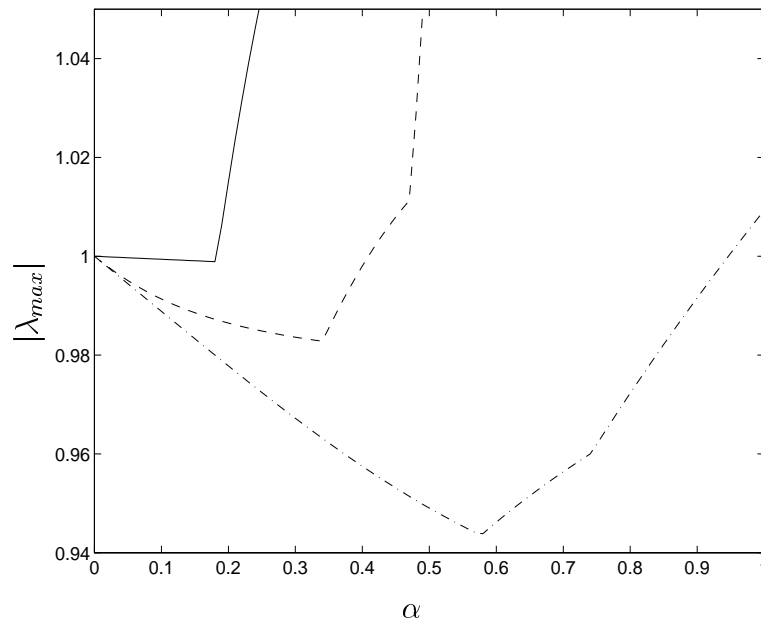
táció alapján határoztuk meg. A görbék minimumadatai az egyes rendszerekre a fenti sorrendben a következők: $\min(|\lambda_{1,\max}|) = 0.9991$ $\alpha_1 = 0.22$; $\min(|\lambda_{2,\max}|) = 0.9887$ $\alpha_2 = 0.14$; $\min(|\lambda_{3,\max}|) = 0.9581$ $\alpha_3 = 0.53$. Ha az elnyomandó jel amplitúdója kezdetben egységnyi, 1000 lépés után az elnyomott jel amplitúdója rendre 0.4, 10^{-5} és 10^{-18} . Az XLMS algoritmus esetében a konvergenciaparaméter $1/N^2$ -tel szorzandó, így kapjuk a 12. példában szereplő $\alpha = 0.0025$ értéket. Az ott bemutatott időfüggvény meredeksége is megfelel az itt kiszámított sajátértéknek.

Érdeemes továbbá visszanyúlni a 3.14. ábrához. A 3. fejezetben szerepelt, hogy a konvergenciaparamétert az interpoláció kiemelései miatt kell csökkenteni. Példánkban az egyes rezonátoros rendszerek éppen a 3.14. ábrán szereplő interpolációt hajtják végre. A Lagrange-interpoláció maximális kiemelése kb. tízszeres, és $\alpha_2 = 0.14$. A négyzetes Lagrange-interpoláció maximális kiemelése kb. kétszeres, és $\alpha_3 = 0.53$. Ezek az eredmények igazolják a korábbi megállapításokat.

15. példa

Az összehasonlításban résztvevő rendszerek és beállítások megegyeznek az előző példában bemutatottakkal, azzal a különbséggel, hogy $f = 1/10$. Az 5.17. ábra az előző példának megfelelően mutatja az egyes rendszerek legnagyobb sajátértékeit. A görbék minimumadatai az egyes rendszerekre a fenti sorrendben a következők: $\min(|\lambda_{1,\max}|) = 0.9989$ $\alpha_1 = 0.18$; $\min(|\lambda_{2,\max}|) = 0.9828$ $\alpha_2 = 0.34$; $\min(|\lambda_{3,\max}|) = 0.9439$ $\alpha_3 = 0.58$. Ebből az összehasonlításból a legfontosabb, hogy a hibajel Fourier-komponenseire bontó rezonátoros zajelnyomó rendszer jóval kevésbé érzékeny a frekvencia megváltozására, mint a hibajel közvetlenül felhasználó rezonátoros struktúra. Lényeges, hogy az előbbi rendszer optimuma is jóval messzebb esik a stabilitás határhelyzetétől, mint az utóbbi rendszer optimuma.

Ez a példa felel meg az 1. és a 2. példának. Az ottani időfüggvények időállandója megfelel az itt közölt optimumoknak.



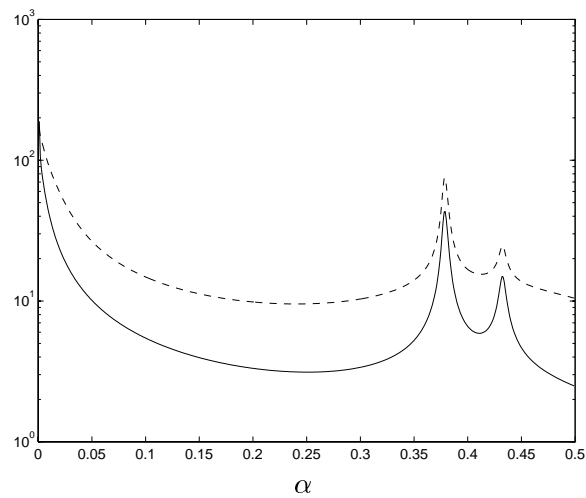
5.17. ábra. 15. példa. Az egyes zajelnyomó rendszerek összehasonlítása $f = 1/10$ esetén. folytonos vonal: XLMS; szaggatott vonal: egyszerű rezonátoros; pontozott vonal: a hibajelel komponenseire bontó rezonátoros rendszer

5.2.5 A konvergenciaparaméter meghatározása

Végezetül a konvergenciaparaméter meghatározására szolgáló, 3.5.2 szakaszban ismertett, eljárást demonstrálok. A konvergenciaparaméter meghatározása történhet $A(z)$ és $A(z)$ mintái alapján. A módszerek leírásánál megmutattam, hogy a két esetben a minimumok nem feltétlenül esnek egybe, de a stabilitás határhelyzetére mindkét esetben ugyanaz az érték adódik. A következő példákban a függvény $A(z)$ mintáit 256 pontban kapja meg. Mivel az integrál helyett mindenképpen csak az integrálközelítő összeget lehet kiszámítani, a stabilitás határhelyzeit, amikor valamelyik sajátérték az egységkörön található, nem feltétlenül mintavételezi a függvény, így az integrálközelítő összeg nem vesz fel végtelen nagy értéket. $\alpha = 0$ esetén a függvény a rezonátorok révén “végtelen” értéket vesz fel, majd csökken (akkor is, ha a paraméterkészlet nem biztosít stabil rendszert, hiszen a gyökök így is eltávolodnak az egységkörtől), és annál az α -nál válik ismét “végtelenné”, amely mellett valamelyik gyök ismét az egységkörre kerül. Amennyiben a paraméterkészlet kielégíti a stabilitás szükséges feltételét, a legkisebb nem zérus α , amely mellett a függvény “végtelenné” válik, tartozik a stabilitás határhelyzetéhez.

16. példa

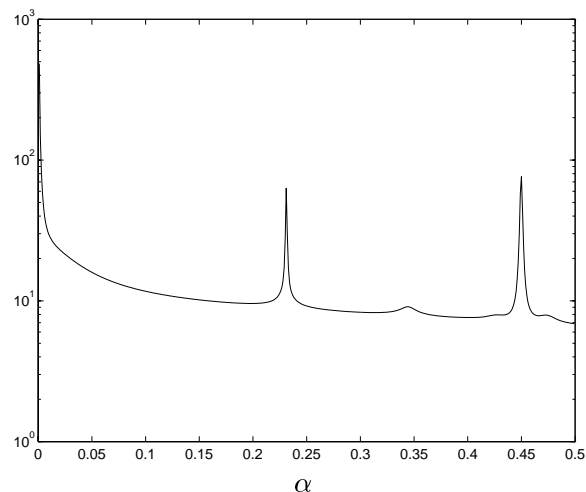
A vizsgált rendszer a hibajelel közvetlenül felhasználó rezonátoros struktúra. Az átviteli függvény az eddigi, (5.1) egyenlettel adott IIR szűrő, $f = 1/9$. Az 5.18. ábrán az integrálközelítő összeg szerepel, $A(z)$ törtfüggvény alakú megadása és mintái alapján, rendre szaggatott és folytonos görbével jelölve. A görbék nem esnek egybe, de jól látható, hogy a stabilitás határhelyzetének megfelelő maximumok ugyanott vannak. Ebben az esetben $\alpha_{\max} = 0.38$ adódik. Ez egybevág a 14. példa (5.16. ábra, szaggatott görbe) eredményével. Ebben a példában a minimumhelyek is megegyeznek a két esetre vonatkozóan. Ennek az az oka, hogy $A(z)$ pólusai nincsenek közel az egységkörhöz. Az is látható, hogy a görbe minimumhelye nem egyezik meg a maximális sajátértékek alapján számított minimumhellyel. Az időtartományban azonban ellenőrizhető, hogy a leggyorsabb beálláshoz a sajátértékek alapján számított konvergenciaparaméter tartozik.



5.18. ábra. 16. példa. A konvergenciaparaméter meghatározására szolgáló integrálközelítő összeg. folytonos vonal: $A(z)$ mintái alapján; szaggatott vonal: közvetlenül $A(z)$ alapján

17. példa

Az előző példa azzal a különbséggel, hogy a paraméterkészlet az XLMS algoritmusnak felel meg. Az 5.19. ábrán az integrálközelítő összeg szerepel, itt már csak $A(z)$ mintái alapján. Ebben az esetben $\alpha_{\max} = 0.23$. Ez is egybevág a 14. példa (5.16. ábra,



5.19. ábra. 17. példa. A konvergenciaparaméter meghatározására szolgáló integrálközelítő összeg

folytonos görbe) eredményével. Az eredeti, XLMS algoritmussal adaptált előrecsatolt struktúra esetében a stabilitás határhelyzetéhez tartozó konvergenciaparaméter az itt meghatározott $1/N^2$ -szerese.

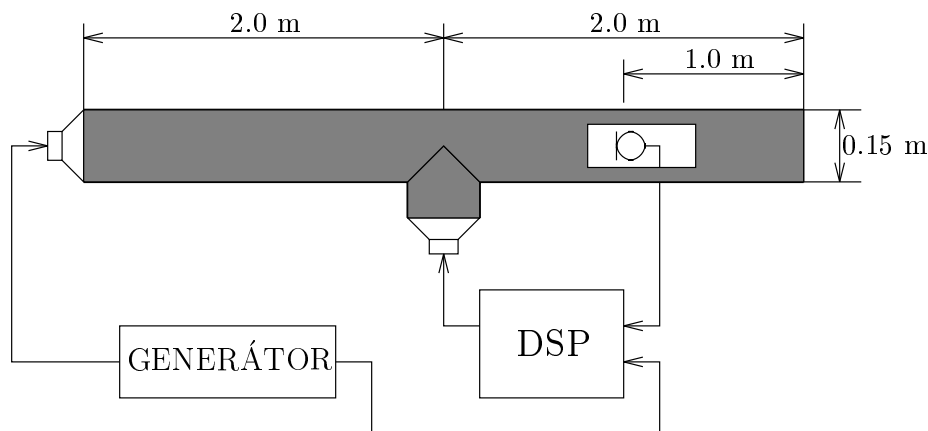
6. fejezet

Kísérleti eredmények

A 3. fejezetben bemutatott jelmodell alapú zajelnyomó rendszereket a gyakorlatban is teszteltük. Az algoritmusok implementálására digitális jelfeldolgozó processzort használtunk. A módszerek kipróbálására elsősorban az Előszóban említett akusztikus zajelnyomási probléma megoldása kapcsán került sor, ehhez kapcsolódik az első két alfejezet. A harmadik alfejezetben egy érdekes villamos alkalmazást ismertetek, amely a módszer nemlinearitásokat tartalmazó környezetben való használhatóságát demonstrálja. A kísérletek és a mérési eredmények leírása illusztratív jellegű.

6.1 Aktív zajcsökkentés egycsatornás akusztikus rendszerben

Egycsatornás akusztikus zajelnyomó rendszerben egy hibamikrofon és egy beavatkozó hangszóró található. Az általunk használt kísérleti elrendezés a 6.1. ábrán látható. Az



6.1. ábra. Kísérleti elrendezés akusztikus zaj aktív csökkentésére

akusztikus rendszer egy körkeresztmetszetű cső, amely pl. egy ventilációs csatorna jó modellje. A cső elején található hangszóró a zaj szimulálására szolgál, a közepén lévő a beavatkozásra. Az ábrán a járulékos elemeket (erősítők, stb.) nem jelöltük. A zajelnyomó algoritmust MOTOROLA DSP96002 alapú, sztereo 16 bites A/D és D/A átalakítót tartalmazó PC-s jelfeldolgozó kártyán valósítottuk meg. A mintavételi frekvencia 2 kHz volt, az átviteli függvény mintáit 5 Hz-es lépésekben 200 pontban mértük meg. A mérési eredmények kiértékelésére spektrumanalizátort, illetve digitális oszcilloszkópot használtunk. A zajelnyomásra általában a hibajel Fourier-felbontásán alapuló rendszert használtuk, de a hibajelet közvetlenül is felhasználó rendszert is teszteltük.

Az itt bemutatandó példában a generátor kimenőjele 105 Hz frekvenciájú szimmetrikus háromszögjel volt, ennek megfelelően 8 harmonikus komponens elnyomására került sor. Ez a hibamikrofon helyén az akusztikus rendszer miatt más felharmonikus-tartalmú jel volt. Az első kísérlet célja az állandósult állapotbeli elnyomás mérése volt, tehát a generátor kimenőjele változatlan volt. Állandósult állapotban nincs különbség a két-féle rendszer között, ezért csak egy mérés történt. A mérési eredmény a 77. oldalon található. A felső ábrán látható az elnyomandó, az alsón az elnyomott zaj spektruma.

Látható, hogy az elnyomás olyan mértékű, hogy a periodikus komponensek nem emelkednek ki a rendszerzajból. A marker alapján az elnyomás az alapharmonikuson közel 60 dB. A következő kísérlet célja az egyes rendszerek tranziens tulajdonságainak vizsgálata volt. Ebből a célból a generátor kimenőjének amplitúdóját egy alacsonyfrekvenciás (1 Hz-nél kisebb) négyszögjellel moduláltuk. A négyszögjel felfutó és lefutó élénél ennek megfelelően a zajelnyomó rendszernek egy-egy tranziense zajlott le. Az ábrákon az egyes csatornán a zajelnyomás tranziens jele látható, a kettes csatornán a generátor kimenőjelet moduláló négyszögjel egy felfutó éle. Az egyes rendszerek konvergenciaparamétereit úgy választottuk meg, hogy a beállítás a leggyorsabb legyen.

A mérési eredmények a 78. oldalon találhatóak. Az első ábrán a hibajel közvetlenül felhasználó struktúra tranziense látható, míg a másodikon a hibajel Fourier-felbontását alkalmazó struktúráé. A sebességbeli különbség jól látható. Fontos, hogy a közel optimális konvergenciaparaméter az utóbbi esetben a frekvenciától többé-kevésbé független, míg az előbbiben jelentősen függ. Nehezen mérhető, de a gyakorlat szempontjából fontos, hogy az utóbbi rendszer tranziensei akusztikusan is “kellemesebb” élményt nyújtanak.

Az elnyomandó zaj spektruma

Az elnyomott zaj spektruma

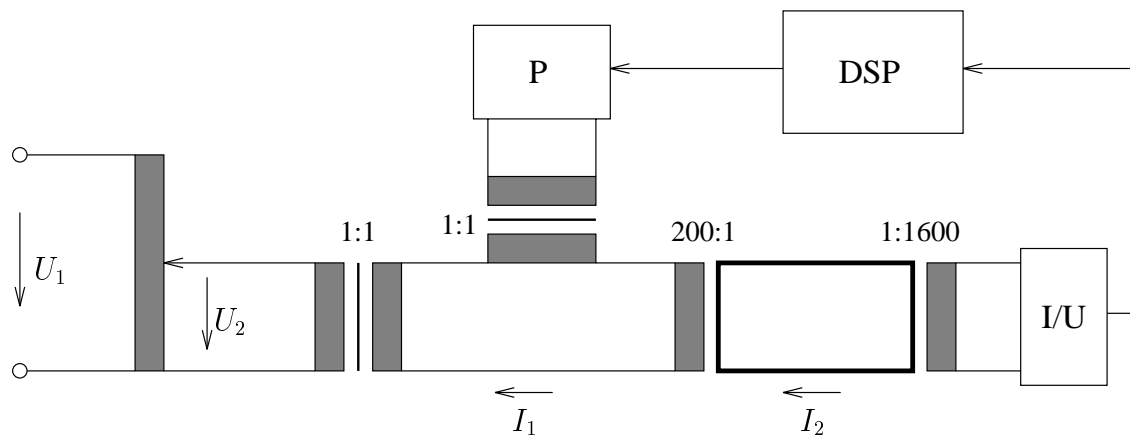
A hibajel közvetlenül felhasználó zajelnyomó rendszer tranziense

A hibajel komponenseit felhasználó zajelnyomó rendszer tranziense

6.2 Aktív zajcsökkentés többcsatornás akusztikus rendszerben

Az előző alfejezetben bemutatott zajelnyomó rendszer a többcsatornás zajelnyomás előtanulmányának tekinthető. Többcsatornás zajelnyomási kísérleteinkre a hollandiai Delftben, az Alkalmazott Fizikai Intézetben (TNO Institute of Applied Physics) került sor. A jelmodell alapú zajelnyomó rendszer tesztelése része volt annak a kísérletsorozatnak, amely adott zajelnyomási feladat megoldására több módszer összehasonlítását tűzte ki célul. A nemzetközi együttműködés igényeit figyelembe véve, a zajelnyomó eljárás kipróbálására még az elméleti vizsgálatok kezdeti stádiumában került sor. Nehézséget jelentett, hogy a módszer szokatlansága miatt kevés elméleti támogatást kaptunk. Mindezeket figyelembe véve a kísérletek elsődleges célja a jelmodell alapú zajelnyomó rendszer működőképességének vizsgálata, illetve bizonyítása volt. Az ott töltött idő jelentős részét a jelfeldolgozó programok fejlesztése tette ki, a működő rendszer tesztelése csak egy rövid kísérletsorozat keretében valósult meg. A kísérletsorozat a konkurenciába bocsátott zajelnyomó eljárások számára azonos volt, a mérési eredményeket digitális magnetofonon rögzítettük. Sajnos, az eredmények kiértékelésére az időközben felmerült anyagi nehézségek miatt nem került sor, de a folytatás lehetősége fennáll. A módszer elméleti alapjait, illetve az implementálással kapcsolatos tapasztalatainkat a [27] "Technical report"-ban foglaltuk össze. Ez az összefoglaló nem kapott "confidential" minősítést, így hozzáférhető. Az alábbiakban a kísérleti eszközöket, körülményeket és eredményeket mutatom be röviden.

Az akusztikus rendszer egy laboratóriumban felépített kabin volt, amelyet egy repülőgép utasteréhez hasonló módon alakítottak ki. A kabin mérete kb. $2\text{ m} \times 3\text{ m} \times 2\text{ m}$ volt, a falai nagy részben plexiből voltak. A kabinban körben helyezkedtek el a beavatkozó hangszórók, a hibamikrofonok az ülések háttámlájában, fülmagasságban voltak. A mikrofonok irányérzéketlen kondenzátormikrofonok voltak, amelyek jelei előerősítés után a jelfeldolgozó egység bemenetére kerültek. Az elnyomandó zajt a kabin hátsó falán elhelyezett hangszórók szolgáltatták, amelyeket a kísérletek során előírt frekvenciájú, felharmonikus-tartalmú és jel/zaj viszonyú jelekkel gerjesztettünk. A zajelnyomó rendszer sebességének tesztelésére adott sebességgel változó frekvenciájú gerjesztést alkalmaztunk. A zajelnyomó rendszer jelfeldolgozási feladatát egy TMS 320 C30 alapú rendszer látta el. Felépítéséből adódóan a maximális méretű rendszer, amelyet kipróbáltunk, 5 mikrofont és 4 hangszórót tartalmazott, de kisebb méretű rendszereket is teszteltünk. A mintavételi frekvencia 1300 Hz volt, az átviteli függvény értékeit az 50..400 Hz tartományban 275 pontban vettük fel. A nagy mérési zaj és a kb. 1 Hz sűrűségű mintavételezés miatt egy mérés (maximális méretű rendszer esetén) kb. 15 percet vett igénybe. A mérési eredmények alapján a v_i , illetve \mathbf{V}_i paraméterek számítása MATLAB program segítségével történt. A mérési eredményeket az amplitúdómenetek kirajzolásával, illetve az egyes átviteli mátrixok kondíciószámának kiszámításával ellenőriztük. Zajelnyomásra itt már csak a kedvezőbb tulajdonságokat mutató, a hibajelet komponenseire bontó struktúrát alkalmaztuk. A zajelnyomást egy-egy csatornán oszcilloszkóppal, illetve spektrumanalizátorral ellenőriztük. Az egyes csatornák jelei négyzetösszegének kiszámításával a zajelnyomás mértékére adott frekvencián on-line becslést adtunk. A mérési eredmények megfeleltek a várakozásnak: egyenlő számú mikrofon és hangszóró esetén az elnyomás a zajhatárig (50..60 dB) történik, egyébként kisebb. Ez utóbbi esetben az elnyomás adott helyen a frekvencia függvénye, de általában annál jobb, minél kisebb a "hiányzó" hangszórók száma. Természetesen akusztikus ismeretek hiányában az eredményeket közvetlenül értékelni nem tudtuk. Érdekes és eredményes kísérlet volt a levegő 10 °C – kal való felmelegítése, annak tesztelése céljából, hogyan viselkedik a rendszer a hőmérséklet-emelkedés hatására megváltozott átviteli függvényvel. A hosszabb



6.2. ábra. Kísérleti elrendezés a villamos hálózat torzításának csökkentésére

időre magára hagyott rendszer is megőrizte stabilitását, illetve kedvező tulajdonságait.

A mérési eredmények kiértékelésének hiánya ellenére a delfti kísérletek sikeresnek nevezhetők, és igazolják a jelmodell alapú zajelnyomó eljárás akusztikus környezetben való alkalmazhatóságát.

6.3 Villamos hálózat torzításának aktív csökkentése

A [33] dolgozatban többek között a rezonátoros struktúra villamos mérés technikában való felhasználhatóságáról olvashatunk, mesterséges impedancia megvalósítása kapcsán. Az ott vázolt probléma jelfeldolgozási szempontból megfeleltethető az aktív zajelnyomás alapfeladatának, és a felkínált megoldás hasznosítja a jelen dolgozatban leírt elméleti eredményeket. Tapasztalatai alapján a hivatkozott dolgozat szerzője javasolta egy olyan kísérlet elvégzését, amely a villamos hálózat harmonikus torzításának aktív csökkentésére irányult. Ebben az esetben az alapharmonikust nem kell elnyomni, csak a felharmonikusokat. A megépítendő rendszer bemenete tehát a hálózati feszültség, kimenete pedig az igényektől függően áram vagy feszültség. A módszer előnyei kézenfekvőek: kisebb igényű elektronika alkalmazásával is precíziós eszközt lehet építeni. Ha pl. 1 kW teljesítményigény mellett a bemenet torzítása 10 %, ezt a torzítást 10 W-os beavatkozás segítségével lehet elnyomni.

Az elvégzett kísérlet nagy áramú torzításmentes generátor létrehozására irányult. A kísérleti elrendezés a 6.2. ábrán látható. Az ábra baloldalán található toroid transzformátor az $U_1 = 230\text{V}$ 50Hz névleges feszültségű és frekvenciájú hálózati feszültséget az alkalmazott egyéb eszközöknek megfelelően a kisebb $U_2 \approx 100\text{V}$ feszültségre transzformálja, amelyet leválasztó transzformátorral földfüggetlenné teszünk. A középső hurokban lévő 1 : 1 átvitelű transzformátor szolgál a beavatkozásra. Az utána következő 200 : 1 átvitelű áramváltó szekunder tekerce (és egyben az 1 : 1600 átvitelű áramváltó primer tekerce) egy 10 mm átmérőjű sodrotterű rézkábel. Az ebben folyó I_2 áram torzításának aktív csökkentése volt a cél. Az I_2 áramot az 1 : 1600 átvitelű precíziós áramváltó segítségével érzékeljük, és ez az áramjel kerül (feszültséggé alakítva) a DSP bemenetére. A DSP kimenete a P teljesítményerősítőn keresztül hajtja meg a beavatkozó transzformátort. A kísérlethez az 1. alfejezetben használt DSP kártyát alkalmaztuk. A zajelnyomó algoritmus a 3.7 alfejezetben leírt, a 3.21. ábrán látható rendszer volt. A körben a kritikus elem a teljesítményerősítő, amelynek az alapharmonikuson visszarámot kell elviselnie. Az adott erősítővel a primer körben $I_1 \approx 0.5\text{A}$ áramig lehetett felmenni, ennek megfelelően a szekunder körben $I_2 \approx 100\text{A}$ folyt. A DSP bemenőjének torzítása állandósult állapotban 0.01 % nagyságrendű volt. Mivel az 1 : 1600 átvitelű precíziós

áramváltó vasmagot nem tartalmaz, feltételezhető, hogy a 100 A körüli áram torzítása is ebbe a nagyságrendbe esett.

A kísérlet jelentősége nemcsak abban áll, hogy a módszer egy másik területen is alkalmazhatónak bizonyult, hanem abban is, hogy egy nemlinearitásokat (teljesítményerősítő, vasmagos transzformátor) is tartalmazó rendszerben is megállja a helyét.

7. fejezet

Összefoglalás, kitekintés

Értekezésemben olyan aktív zajelnyomó eljárások tervezésével és vizsgálatával foglalkoztam, amelyek periodikus zajok, illetve zavarhatások elnyomására alkalmasak. A feladatot a már létező, elsősorban szélessávú zaj elnyomására kifejlesztett rendszerek is megoldják. Ezek a rendszerek azonban nem használják ki azt a lehetőséget, amely az elnyomandó periodikus zaj mint speciális jel modellezéséből fakad. Céлом az volt, hogy az elnyomandó zajról alkotott ún. koncepcionális jelmodell integrálása révén a szokásos rendszereknél kedvezőbb tulajdonságokat mutató zajelnyomó rendszert tervezek.

A téma irodalmának áttekintése után bemutattam a zajelnyomásra javasolt egycsatornás és többszatornás jelmodell alapú struktúrákat, elemeztem azok konvergenciaviszonyait. A javasolt zajelnyomó rendszerek elméleti vizsgálatát kiegészítettem a gyakorlati megvalósítás kérdéseinek megválaszolásával. Megmutattam, hogy az így felépített zajelnyomó rendszer hogyan kapcsolódik a feladat megoldására az eddigiekben leghatékonyabban használt adaptív szűrőt alkalmazó megoldásokhoz. A javasolt módszerek működését szimulációs példákkal és kísérleti eredményekkel demonstráltam.

A dolgozat motivációját az akusztikus zajok aktív elnyomása adta, a kísérleti eredmények nagyrészt ehhez a témához kötődnek. Ennélfogva az értekezés eredményei a gyakorlatban közvetlenül hasznosíthatók. Általában véve minden olyan esetben alkalmazható a dolgozatban javasolt zajelnyomó eljárás, ahol a zavarhatás periodikus, és a beavatkozásra valamilyen fizikai rendszeren keresztül nyílik lehetőség.

A további kutatómunka lehetséges irányai a következők:

- A periodikus jelmodell alapú zajelnyomó rendszer előnyei jelentős mértékben az átviteli függvény inverzének reprezentálásához kötődnek. Ez a megoldás (a rezonátoros reprezentációt figyelembe véve) speciális megvalósítása a [30]-ban nemrégiben közzétett "filtered error" LMS algoritmusnak. A hibajel szűrése itt az adaptációs hurokban lévő átviteli függvény inverzével történik, amennyiben az megvalósítható. Egyéb esetekben az ún. képlettetett inverz alkalmazható, ennek megfelelően a referencijeleket is képlettetni kell. Amennyiben periodikus referencijeleket alkalmazunk, a rendszer alkalmas periodikus zajok elnyomására. További kutatási feladat tehát a kétféle, az inverz átviteli függvényt célzó, zajelnyomó rendszer viszonyának vizsgálata.
- Az átviteli függvény inverzének Lagrange-interpolációja a felmerült approximációs feladatnak az adott környezetben célszerű, de nem egyedüli megoldása. Bár a szimulációs vizsgálatok alapján valószínűsíthető, hogy az inverz átviteli függvény rezonátorfrekvenciákon vett mintáinak alkalmazása adja a beállási idő szempontjából legkedvezőbb megoldást, az optimális paraméterkészlet közvetlen meghatározása további matematikai feladatot jelent. A hibajel Fourier-felbontásán alapuló zajelnyomó rendszer felveti a többszörös rezonátorpólusok adta további lehetőségek

kiaknázását. Megvizsgálendő [26], [21] alapján az Hermite-interpoláció alkalmazhatósága a felmerült approximációs feladat megoldására.

- A gyakorlati esetek jelentős részében az elnyomódó zaj szélessávú komponenst is tartalmaz. Ezekben az esetekben a dolgozatban bemutatott periodikus jelmodell alapú zajelnyomó rendszer a szélessávú zajt nem nyomja el, illetve a hibajelre vonatkozó átviteli függvénynek megfelelően modulálja. Kérdés, hogy a periodikus zajelnyomó rendszerekkel kapcsolatos elméleti és gyakorlati tapasztalatok birtokában lehetséges-e a szűrt hibajel felhasználó adaptív zajelnyomó rendszer tulajdonságainak javítása. Az ilyen alapon megtervezhető zajelnyomó rendszerek elméleti és gyakorlati vizsgálata szintén lehetséges jövőbeli kutatási téma.

A dolgozat új tudományos eredményei a következőképpen foglalhatók össze:

1. Periodikus zavarhatások aktív csökkentésére a periodikus jelmodellt feltételező (rezonátoros) megfigyelőn és az erre épülő adaptív Fourier analízátoron (AFA) alapuló egycsatornás zajelnyomó eljárást dolgoztam ki (3.2.b ábra).
 - (a) A Nyquist-kritérium segítségével bebizonyítottam, hogy a zajelnyomó rendszer stabilitásának szükséges feltétele, hogy az egyes rezonátor csatornákon olyan komplex együtthatókat alkalmazzunk, hogy ezek, valamint a visszacsatolásban lévő átviteli függvény rezonátorfrekvenciákon vett együttes fázistolása a $(-\pi/2, \pi/2)$ intervallumon belül maradjon. Ekkor a rendszer megfelelő pozitív skalár konvergenciaparaméter segítségével stabilizálható. (3.2.1 szakasz)
 - (b) Meghatároztam a maximális fázistartalékot biztosító és a teljes rendszer véges beállításának közelítéséből származó együtthatókészletet, amelynek elemei a visszacsatoló átviteli függvény rezonátorfrekvenciákon vett átviteleinek reciprokai. (3.2.2, 3.2.3 szakasz)
 - (c) A zajelnyomó struktúra olyan kiegészítését adtam meg, amely a hibajel egy újabb rezonátoros megfigyelővel Fourier-komponenseire bontja, és a rezonátorok bemeneteire ezek a komponensek kerülnek (3.13. ábra). Megmutattam, hogy nagy dinamikájú átviteli függvények esetén az így felépített zajelnyomó rendszer sebessége nagyobb. (3.4 alfejezet)
2. A periodikus jelmodell alapú egycsatornás zajelnyomó rendszert általánosítva többscatornás zajelnyomó eljárást dolgoztam ki (3.3. ábra). Megadtam a hibajel Fourier-komponenseire bontó egycsatornás rendszer többscatornás változatát is (3.17. ábra).
 - (a) A Nyquist-kritérium segítségével bebizonyítottam, hogy a zajelnyomó rendszer stabilitásának szükséges feltétele, hogy a hibajelvektor és a rezonátorok bemenetei között olyan komplex együtthatómátrixokat alkalmazzunk, hogy ezek, valamint a visszacsatolásban lévő átviteli függvény mátrix rezonátorfrekvenciákon vett átvitelei szorzatának sajátértékei pozitív valós részűek legyenek. Ekkor a rendszer megfelelő pozitív skalár konvergenciaparaméter segítségével stabilizálható. (3.3.1 szakasz)
 - (b) Meghatároztam a maximális fázistartalékot biztosító és a teljes rendszer véges beállításának közelítéséből származó együtthatómátrix-készletet, amelynek elemei a visszacsatoló átviteli függvény mátrix rezonátorfrekvenciákon vett átviteleinek pszeudoinverzei. (3.3.2 szakasz)

- (c) Bebizonyítottam, hogy a pszeudo inverz alkalmazása révén a kimeneti vektor az optimális megoldáshoz konvergál. Nem kvadratikus esetben, ha a kimeneti vektor dimenziója kisebb a hibavektor dimenziójánál, a maradó hiba minimális; ha a kimeneti vektor dimenziója nagyobb a hibavektor dimenziójánál, az elnyomáshoz minimális teljesítmény szükséges. (3.3.3 szakasz)
3. Felállítottam a jelmodell alapú zajelnyomó eljárások és a periodikus zavarhatások elnyomására alkalmazott adaptív megoldások kapcsolatrendszerét, különös tekintettel a “filtered-X” LMS, illetve a “multiple error” LMS algoritmussal adaptált előrecsatolt struktúrára.
- (a) A rekurzív diszkrét Fourier-transzformáció és az LMS algoritmus közötti ismert összefüggést alkalmazva megadtam a fenti egy- és többcsatornás rendszerek rezonátoros reprezentációját. (4.2 alfejezet)
 - (b) A reprezentáns rezonátoros struktúra segítségével megállapítottam, hogy: (1) a jelmodell alapú és a fenti adaptív rendszerek fázistartaléka megegyezik; (2) a jelmodell alapú és a fenti adaptív rendszerek állandósult állapotbeli jellemzői megegyeznek; (3) a jelmodell alapú zajelnyomó rendszer a véges beállást célzó paraméterkészlet révén gyorsabb. (4.3 alfejezet)
 - (c) A jelmodell alapú zajelnyomó rendszer az adaptív rendszerekkel ellentétben a visszacsatolásban lévő átviteli függvénnyel kapcsolatos információt a frekvenciatartományban alkalmazza, és csak a periodikus zaj komponensei által meghatározott pontokban. Így a jelmodell alapú zajelnyomó rendszer a (b) pontban megfogalmazott tulajdonságokat a visszacsatolásban lévő rendszer alulmodellezettségével mellett teljesíti. (4.3 alfejezet)

Irodalomjegyzék

- [1] N. J. Doelman, "Design of Systems for Active Sound Control" Ph.D. Thesis, 1993, Delft, the Netherlands, ISBN 90-9006731-0
- [2] K. J. Åström, B. Wittenmark, "*Computer Controlled Systems*", Prentice-Hall, Inc. 1990.
- [3] Proceedings of the Conference on "*Recent Advances in Active Control of Sound and Vibration*" (ed. C. A. Rogers, C. R. Fuller), Technomic Publishing Company, Inc. 1991.
- [4] B. Widrow, S. D. Stearns, "*Adaptive Signal Processing*", Prentice-Hall, Inc. 1985.
- [5] S. J. Elliot, P. A. Nelson, "Active noise control" *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 10, No. 4. October, 1993, pp. 12-35.
- [6] P. A. Nelson, S. J. Elliott, "*Active Control of Sound*", Academic Press, 1990.
- [7] S. J. Elliot, I. M. Stothers, P. A. Nelson, "A multiple error LMS algorithm and its application to the active control of sound and vibration", *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing* vol. ASSP-35, pp. 1423-1434, Oct. 1987.
- [8] J. R. Glover, "Adaptive noise canceling applied to sinusoidal interferences" *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing* vol. ASSP-25 pp. 484-491, Dec. 1977.
- [9] D. R. Morgan, "An analysis of multiple correlation cancelation loops with a filter in the auxiliary path" *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing* vol. ASSP-28 pp. 454-467, Aug. 1980.
- [10] Paul R. Halmos, "*Véges dimenziós vektorterek*", Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1984.
- [11] G. Péceli, "A common structure for recursive discrete transforms", *IEEE Transactions on Circuits and Systems* vol. CAS-33 pp. 1035-36, Oct. 1986.
- [12] Péceli G., "Valós idejű jelkiértékelés mérési eljárásokban" akadémiai doktori értekezés, BME, Budapest, 1987.
- [13] D. G. Luenberger, "An introduction to observers", *IEEE Transactions on Automatic Control* vol. AC-16 pp. 596-602, Dec. 1971.
- [14] G. H. Hostetter, "Recursive discrete Fourier transformation" *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing* vol. ASSP-28 pp. 183-190, Apr. 1980.
- [15] J. Sztipánovits, "Dynamic backpropagation algorithm for neural network controlled resonator-bank architecture", *IEEE Transactions on Circuits and Systems- II: Analog and Digital Signal Processing* vol. CAS-39, pp. 99-108, Feb. 1992.

- [16] G. Péceli, "Resonator based digital filters", *IEEE Transactions on Circuits and Systems* vol. CAS-36, pp. 156-159, Jan. 1989.
- [17] Pataki B., "Neurális hálózatok alkalmazása dinamikus rendszerek modellezésében", egyetemi doktori értekezés, BME, Budapest, 1994.
- [18] F. Nagy, "Measurement of signal parameters using nonlinear observers" *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. IM-41 pp. 152-155, Febr. 1992.
- [19] F. Nagy, "Application of the nonlinear filter and observer theory in adaptive signal processing", presented on the *IEEE Winter Workshop on Nonlinear Digital Signal Processing*, January, 17-20, 1993 Tampere, Finland, in workshop proceedings pages 6.2-3.1 to 6.2-3.6.
- [20] F. Nagy, "An adaptive Fourier analysis algorithm" presented on the *5th International Conference on Signal Processing Applications and Technology*, Oct. 18-21, 1994, Dallas, Texas, USA, in proceedings pages 414-418.
- [21] Simon Gy., "Adaptív jelfeldolgozó eljárások vizsgálata", doktori (PhD) értekezés, BME, Budapest, 1997.
- [22] Várkonyiné Kóczy A., "Eljárások multi-színuszos jelek előállítására és mérésére", doktori (PhD) értekezés, BME, Budapest, 1995.
- [23] J. Van de Vegte, "*Feedback Control Systems*", Prentice-Hall, Inc. 1990.
- [24] Rózsa Pál, "*Lineáris algebra és alkalmazásai*", Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1993.
- [25] A. G. J. McFarlane, I. Postlethwaite, "The generalized Nyquist stability criterion and multivariable root loci" in: *Frequency-Response Methods in Control Systems* (ed. A. G. J. McFarlane) IEEE Press, John Wiley & Sons, Inc. 1979.
- [26] G. Péceli, Gy. Simon, "Generalization of the frequency sampling method", presented on the *IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference*, June 4-6, 1996, Brussels, Belgium, in proceedings pages 339-343.
- [27] L. Sujbert, R. Dunay, "Resonator based periodic noise cancelation", Technical Report (TPD-HAG-95-RPT-0044), 1995, TPD-TNO Delft, the Netherlands
- [28] Schnell L., (főszerk.) "*Jelek és rendszerek mérés technikája*", Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985.
- [29] B. Widrow et al., "Fundamental relations between the LMS algorithm and the DFT", *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. CAS-34 pp. 814-819, July 1987.
- [30] B. Widrow, E. Walach, "*Adaptive Inverse Control*", Prentice-Hall, Inc. 1996.
- [31] D. F. Marshall, W. K. Jenkins, J. J. Murphy, "The use of orthogonal transforms for improving performance of adaptive filters", *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. CAS-36 pp. 474-483, April 1989.
- [32] E. R. Ferrara, Jr., "Frequency domain adaptive filtering" in: *Adaptive Filters* (ed. C. F. N. Cowan and P. M. Grant), Prentice-Hall, Inc. 1985.
- [33] Varga L., "A digitális jelfeldolgozás alkalmazása mesterséges impedanciákban", egyetemi doktori értekezés, BME, Budapest, 1996.

A. függelék

Lineáris rendszerek sebessége

A lineáris invariáns diszkrét idejű rendszerek beállítás szempontjából véges vagy végtelen impulzusválaszúak lehetnek. Minthogy a véges impulzusválaszú rendszerek sebessége adott, itt IIR rendszerek sebességét vizsgáljuk. Bár az IIR rendszerek beállása aszimptotikus, a beállítás teljesnek tekinthető, ha a tranziens kisebb, mint egy előírt pozitív konstans (ε). A szokásos impulzusválasz helyett itt tranziens válasz szerepel, ezzel is hangsúlyozva, hogy a beállítás tetszőleges kezdeti feltételek mellett vizsgálandó. Az alábbiakban megmutatom, hogy a rendszer tranziens válasza a rendszer legnagyobb sajátértékével ragadható meg, és ennek alapján a beállási idő jól becsülhető. A tranziens válasz kapcsolatban van a rendszer által tárolt energiával, ezért a levezetések során az euklideszi normát használjuk. Ez azonban nem megszorítás, mert tetszőleges ekvivalens norma használható a bizonyításhoz. Minthogy a tranziens választ vizsgáljuk, a rendszert gerjesztetlennek tekintjük.

A rendszer tehát a következőképpen írható le:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n \quad \mathbf{y}_n = \mathbf{C}\mathbf{x}_n \quad \mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n \mathbf{x}(0) \quad (\text{A.1})$$

ahol \mathbf{x}_n az állapotvektor, \mathbf{y}_n a kimenet, \mathbf{A} az állapotmátrix, és \mathbf{C} a kicsatoló mátrix. \mathbf{A} kvadratikus, rangja N . Legyen a rendszer stabil, azaz $|\lambda_i| < 1$, $i = 1..N$, tehát az állapotmátrix sajátértékei az egységkörön belül vannak.

1. Definíció A rendszer tranziens válasza kisebb, mint $\varepsilon > 0$, ha $\|\mathbf{y}_n\| < \varepsilon$, $\forall n > n_0(\varepsilon)$.

Legyen $\{\varepsilon_k\}$ monoton nemnövekvő sorozat: $\varepsilon_k \geq \varepsilon_l$ ha $l > k$ és $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0$.

2. Definíció Tekintsük a következő rendszereket: $\Sigma_i = [\mathbf{A}_i, \mathbf{C}_i]$, $i = 1, \dots$ és a $\{\varepsilon_k\}$ sorozatot. Ezek között a rendszerek között nincs gyorsabb, mint Σ_L , ha nem létezik olyan kezdeti állapotvektor Σ_L -hez, Σ_i $i \neq L$ tetszőleges kezdeti állapotvektora esetén, hogy $\forall k > K$, $\|y_{L,n_L}\| > \|y_{i,n_i}\|$; $n_L > n_{0L}(\varepsilon_k)$; $n_i > n_{0i}(\varepsilon_k)$; $i = 1, \dots$; $i \neq L$.

Megjegyzés. A fenti 2. definíció azt fejezi ki, hogy az egyes rendszerek tranziens válaszai csak akkor összevethetőek, ha már kisebbek egy közös ε -nál. Különböző kezdeti állapotvektorok mellett ugyanaz a rendszer is különböző tranziens választ ad. Ez a magyarázata, hogy a vizsgálatokhoz a normát alkalmazzuk. Az ε -ok sorozatára a többszörös pólusokkal is rendelkező rendszerek miatt volt szükség. Ha csak egyszeres pólusok vannak, egyetlen, tetszőlegesen választott ε is elegendő.

Tétel. Tekintsük a következő rendszereket: Σ_i , $i = 1, \dots$. Ezek között a rendszerek között nincs gyorsabb, mint Σ_L , ha $|\lambda_1(\mathbf{A}_L)| = \min_i |\lambda_1(\mathbf{A}_i)|$, ahol $|\lambda_1(\mathbf{A})| = \max_{j=1..N} |\lambda_j(\mathbf{A})|$.

Bizonyítás: Legyen \mathbf{T} olyan transzformáció, hogy:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{J} \quad (\text{A.2})$$

ahol \mathbf{J} az \mathbf{A} mátrix Jordan-féle normálalakja. Ennek megfelelően:

$$\tilde{\mathbf{x}}_n = \mathbf{T}\mathbf{x}_n \quad \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1} \quad (\text{A.3})$$

(A.1),(A.2) és (A.3) felhasználásával:

$$\|\mathbf{y}_n\| = \|\mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}^n\mathbf{T}\mathbf{x}_0\| \quad (\text{A.4})$$

Továbbá:

$$\|\mathbf{y}_n\| \leq \|\mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}\|\|\tilde{\mathbf{A}}^n\|\|\mathbf{T}\|\|\mathbf{x}_0\| \quad (\text{A.5})$$

\mathbf{C} , \mathbf{T} és \mathbf{x}_0 konstansok. Ezeket figyelembe véve:

$$\|\mathbf{y}_n\| \leq c\|\tilde{\mathbf{A}}^n\| \quad (\text{A.6})$$

ahol c pozitív skalár. Először tekintsük az egyszerű struktúrájú állapotmátrixokat. Ez azt jelenti, hogy: $\tilde{\mathbf{A}} = \langle \lambda_i \rangle$, $i = 1..N$. Ekkor az előző egyenlet a következőképpen írható:

$$\|\mathbf{y}_n\| \leq c\|\tilde{\mathbf{A}}\|^n = c|\lambda_1|^n \quad (\text{A.7})$$

ahol λ_1 a maximális abszolút értékű sajátérték, másfelől $|\lambda_1| = \sigma_1$, amely $\tilde{\mathbf{A}}$ legnagyobb szinguláris értéke, azaz euklideszi normája. Ezzel a **Tétel**-t egyszerű struktúrájú mátrixokra bebizonyítottuk.

Most tekintsük azokat a rendszereket, amelyek állapotmátrixa nem egyszerű struktúrájú. Ekkor \mathbf{J} (A.2)-ben diagonális blokkokból áll:

$$\mathbf{J} = \langle \mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \dots, \mathbf{J}_M \rangle \quad (\text{A.8})$$

ahol

$$\mathbf{J}_j = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i & 1 & \\ 0 & \cdots & & 0 & \lambda_i & \end{bmatrix} \quad i = 1..N, j = 1..M \quad (\text{A.9})$$

(A.1) és (A.4) alapján $\tilde{\mathbf{A}}^n$ -t kell kiszámítani. Ez a Jordan-blokkok felhasználásával tehető meg [24]:

$$\tilde{\mathbf{A}}^n = \langle \tilde{\mathbf{A}}_j^n \rangle = \left\langle \sum_{l=0}^{p_j-1} \frac{n^l}{l!} \lambda_j^{n-l} \mathbf{J}_j^l \right\rangle \quad (\text{A.10})$$

ahol $j = 1..M$ és p_j a j -edik Jordan-blokk mérete. Tekintsünk pl. egy 3×3 -as Jordan-blokkot ($p_j = 3$). Ez azt jelenti, hogy az állapotmátrixnak van egy legalább háromszoros sajátértéke. Tehát a Jordan-blokk:

$$\tilde{\mathbf{A}}_j^n = \begin{bmatrix} \lambda_j^n & n\lambda_j^{n-1} & \frac{n^2}{2}\lambda_j^{n-2} \\ 0 & \lambda_j^n & n\lambda_j^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda_j^n \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

$\tilde{\mathbf{A}}^n$ normája a $\tilde{\mathbf{A}}_j^n$ blokkok normáinak maximuma. Valamint:

$$\tilde{\mathbf{A}}^n = \langle \lambda_j^{n-p+1} \sum_{l=0}^{p_j-1} \frac{n^l}{l!} \lambda_j^{l+p_j-1} \mathbf{J}_j^l \rangle = \langle \lambda_j^{n-p_j+1} \mathbf{P}_{j,n} \rangle \quad (\text{A.12})$$

ahol $\mathbf{P}_{j,n}$ olyan mátrix, amelynek elemei n -nek polinomjai. (A.12) és (A.11) alapján látható, hogy $\mathbf{P}_{j,n}$ normája nagy n esetén közelítőleg $[\mathbf{P}_{j,n}]_{1,p_j}$, azaz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\|\mathbf{P}_{j,n}\| - [\mathbf{P}_{j,n}]_{1,p_j}) = 0 \quad (\text{A.13})$$

Az (A.11) példában ez a becsült norma $n^2/2$. A legutóbbi egyenlet szerint:

$$\|\tilde{\mathbf{A}}_j^n\| \approx \lambda_j^{n-p_j+1} \frac{n^{p_j-1}}{(p_j-1)!} \quad (\text{A.14})$$

Legyen μ_j pozitív skalár, úgy, hogy:

$$\mu_j > 1 \quad , \quad |\lambda_j \mu_j| < 1 \quad (\text{A.15})$$

Írjunk $\mu_j^{n-p_j+1}$ -t (A.14)-ben a polinom helyett. Ekkor igaz, hogy:

$$\lambda_j^{n-p_j+1} \frac{n^{p_j-1}}{(p_j-1)!} < (\lambda_j \mu_j)^{n-p_j+1} \quad (\text{A.16})$$

ha $n > n_0(\mu_j)$. Most legyen $\mu_j = 1 + \eta_j$, ahol η_j kicsiny pozitív skalár. Ekkor nagy n esetén minden Jordan-blokk diagonális blokkokkal reprezentálható, amelynek elemei $\lambda_j(1 + \eta_j)$. Ezek az elemek közelítően megegyeznek az adott blokkhoz tartozó sajátértékkel. Az eredményeket összegezve (A.7) alapján:

$$\|\mathbf{y}_n\| \leq c \max_{j=1 \dots M} |\lambda_j|^{n-p_j+1} \leq c |\lambda_1|^n \quad (\text{A.17})$$

ha $n > n_0$. Ezzel a **Tétel**-t bebizonyítottuk.

Ennek az eredménynek a felhasználásával egyszerű becslés adható egy rendszer tranziensének lezajlására. A tranziens válasz kisebb, mint egy adott ε , ha:

$$n > \frac{\log \varepsilon}{\log \lambda} \quad (\text{A.18})$$

B. függelék

Jelölésjegyzék

$a_{2,i}$	$A_2(z)$ FIR reprezentációjának eleme
$A_1(z), A_2(z)$	primer és szekunder átviteli függvény
$A(z)$	a fizikai rendszert reprezentáló átviteli függvény
$\mathbf{A}(z)$	a fizikai rendszert reprezentáló átviteli függvény mátrix
A_i, \mathbf{A}_i	$A(z)$, ill. $\mathbf{A}(z)$ az i -edik frekvencián
\mathbf{A}	állapotmátrix
\mathbf{b}	becsatoló vektor
c	konstans
$c_{i,n}$	i -edik bázisfüggvény az n -edik időpillanatban
\mathbf{c}_n	bázisfüggvény vektor az n -edik időpillanatban
\mathbf{C}	kicsatoló mátrix
d_n, \mathbf{d}_n	elnyomandó, ill. előírt jel(vektor)
$D(\lambda)$	karakterisztikus polinom
$D(z)$	nevezőpolinom
e_n, \mathbf{e}_n	hibajel(vektor)
$E(z)$	hibajel átviteli függvény
f	(relatív) frekvencia
f_1	alapharmonikus (relatív) frekvenciája
f_s	mintavételi frekvencia
$F(z)$	nyílt hurok átviteli függvénye
$\mathbf{F}(z)$	nyílt hurok átviteli függvénye többcsatornás esetben
F	zajelnyomó eljárás
\mathbf{F}	megfigyelő állapotmátrixa
$g_{i,n}$	rezonátoros megfigyelő (időfüggő) becsatoló vektorának eleme
\mathbf{g}_n	rezonátoros megfigyelő (időfüggő) becsatoló vektora
g_i	rezonátoros megfigyelő (időfüggetlen) becsatoló vektorának eleme
\mathbf{g}	rezonátoros megfigyelő (időfüggetlen) becsatoló vektora
\mathbf{G}	becsatoló mátrix
$h_{i,n}$	adaptív szűrő i -edik együtthatója az n -edik időpillanatban
$\mathbf{H}_{i,n}$	adaptív szűrő mátrix i -edik együtthatója az n -edik időpillanatban
\mathbf{h}_n	adaptív szűrő együtthatóvektora
$H(z)$	adaptív szűrő átviteli függvénye
$\mathbf{H}(z)$	adaptív szűrő mátrix átviteli függvénye
i	index
I	egész szám
\mathbf{I}	egységmátrix
j	index; képzetes egység
J	egész szám

k	index
K	egész szám
$L_i(z)$	Lagrange-féle interpolációs polinom
l	index
L	egész szám
m	index
M	egész szám
n	időlépés
N	komplex exponenciálisok száma
$N(z)$	számlálópolinom
$P(z)$	átviteli függvény
P	egész szám
\mathbf{P}	projektormátrix
$Q(z)$	egy rezonátorcsatorna átviteli függvénye
r_i	i -edik rezonátorcsatorna szorzótényezője
r_n	a szorzótényezőkből álló vektor
$r_{i,n}$	szűrt hibajelvektor eleme
\mathbf{r}_n	szűrt hibajel késleltetett mintái
\mathbf{R}_i	i -edik rezonátorcsatorna mátrix-szorzótényezője
$R(z)$	rezonátorok nyílt hurkú átvitele
s_n	különbségi jel
S	tranziens energiatartalma
$S(\alpha)$	tranziens energiatartalma α függvényében
t	idő
T	diszkrét idő
\mathbf{T}	transzformáció mátrixa
$T_i(z)$	egy rezonátorcsatorna zárt hurkú átviteli függvénye
\mathbf{u}_n	bemenőjelvektor
$\mathbf{u}_{1,n}, \mathbf{u}_{2,n}$	bemenőjelvektor-komponens
\mathbf{U}	unitér mátrix; diagonalizáló mátrix
$U_i(z)$	$T_i(z)$ diszkrét Fourier-transzformáció esetén
v_i	off-line kicsatoló együttható-készlet eleme
\mathbf{V}_i	off-line kicsatoló együtthatómátrix-készlet eleme
\mathbf{V}	diagonalizáló mátrix
w_i	kicsatoló együttható
\mathbf{w}	kicsatoló együtthatókból álló vektor
\mathbf{W}	kicsatoló együtthatómátrix
\mathbf{W}_i	kicsatoló együtthatómátrixokból álló vektor
$x_{i,n}$	állapotvektor eleme
x_n	referenciajel
\mathbf{x}_n	állapotvektor; referenciajelvektor
$X(z)$	átviteli függvény
$\mathbf{X}(z)$	átviteli függvény mátrix
y_n	kimenőjel
\mathbf{y}_n	kimenőjelvektor
z	a Z -transzformáció változója
z_i	rezonátor pólus
\mathbf{z}	rezonátor pólusokból álló vektor
α	konvergenciaparaméter
β	konvergenciaparaméter az adaptív Fourier analízátorban
γ	konvergenciaparaméte az adaptív Fourier analízátorban

ε	előírt kicsiny konstans
ζ	valószínűségi változó
λ	sajátérték
ϱ	sugár
σ	szórás
φ	fázisszög
ω	relatív körfrekvencia
\cdot^a	$A(z)$ -re vonatkozó mennyiség
\cdot'	módosított mennyiség
\cdot^T	transzponált
$\bar{\cdot}$	konjugált
\cdot^H	transzponált konjugált
$\cdot\#$	pszeudoinverz
$\hat{\cdot}$	az adott mennyiség becslője
$[\cdot]$	egészrész-képzés
$\langle \cdot \rangle$	diagonálmátrix
$\mathbf{0}$	zérusmátrix