



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
VILLAMOSMÉRNÖKI ÉS INFORMATIKAI KAR
MÉRÉSTECHNIKA ÉS INFORMÁCIÓS RENDSZEREK TANSZÉK

Rezonátor alapú jelfeldolgozás szenzorhálózatokban

Orosz György

Doktori disszertáció
2012

Témavezető: Dr. Péceli Gábor
Konzulensek: Dr. Péceli Gábor, dr. Sujbert László

Tartalomjegyzék

Rövidítések jegyzéke	V
Jelölések jegyzéke	VII
Előszó	1
1. Valós idejű jelfeldolgozás megvalósítása szenzorhálózatokban	3
1.1. Motiváció és problémafelvetés	3
1.2. Architektúrák és technológiák áttekintése	7
1.3. Mintaalkalmazás bemutatása	11
1.3.1. Vezeték nélküli aktív zajcsökkentő rendszer	11
1.3.2. Aktív zajcsökkentés mint tesztalkalmazás	15
2. Felhasznált algoritmusok áttekintése	17
2.1. Rezonátor alapú megfigyelő	17
2.1.1. Jelmodell alapú spektrális megfigyelő	17
2.1.2. Adaptív Fourier-analízis (AFA)	28
2.2. Dinamikusan visszacsatolt rezonátoros struktúrák	30
2.2.1. Zavarjel megszüntetésének alapfeladata periodikus jelekre	30
2.2.2. Egycsatornás algoritmusok ismertetése	32
2.2.3. Többcsatornás algoritmus ismertetése	35
2.3. LMS alapú algoritmusok	36
2.3.1. LMS algoritmus bemutatása	36
2.3.2. Egycsatornás FxLMS algoritmus bemutatása	38
2.3.3. Többcsatornás FxLMS algoritmus bemutatása	40
2.4. A rezonátor és LMS alapú algoritmusok kapcsolata	40
3. Jelérzékelés és jelátvitel	43
3.1. Adatút jellemzése	43
3.2. Mintavételezés és jelfeldolgozás szinkronizálása	45
3.2.1. Szinkronizáció és stabilitás kapcsolata	45
3.2.2. Mintavételezés szinkronizálása	47
3.2.3. Szinkronizáció interpolációval	50
3.2.4. Többszintű szinkronizációs architektúra bemutatása	51
3.3. Rezonátor alapú, elosztott jelfeldolgozó rendszer szinkronizálása	52

3.3.1.	Elosztott rendszer bemutatása	52
3.3.2.	Elosztott rendszer stabilitásvizsgálata	54
3.3.3.	Elosztott rezonátorok szinkronizálása	56
3.4.	Teszteredmények bemutatása	58
3.5.	Eredmények összegzése	61
4.	Alacsony sáv szélességigényű adaptív algoritmusok bemutatása	63
4.1.	Hibaelőjeles rezonátoros struktúra	63
4.1.1.	Algoritmus bemutatása	64
4.1.2.	Hiba abszolút középértékének számítása	66
4.1.3.	Beállási idő vizsgálata	69
4.1.4.	Eredmények értelmezése	70
4.2.	Hibaelőjeles FxLMS algoritmus	71
4.2.1.	Algoritmus bemutatása	71
4.2.2.	Hiba abszolút középértékének számítása	72
4.2.3.	Beállási idő vizsgálata	74
4.2.4.	Eredmények értelmezése	75
4.3.	Javított konvergenciájú hibaelőjeles algoritmusok	76
4.3.1.	Algoritmus bemutatása	76
4.3.2.	Algoritmus konvergenciájának elégséges feltétele	78
4.4.	Szimulációs és mérési eredmények	79
4.4.1.	Hibaelőjeles algoritmusok szimulációs eredményei	79
4.4.2.	Javított konvergenciájú hibaelőjeles algoritmusok szimulációs eredményei	82
4.4.3.	Mérési eredmények	84
4.5.	Eredmények összegzése	85
5.	Adatvesztés hatása rezonátor alapú struktúrák működésére	87
5.1.	Adatvesztési folyamat modellezési módszerei	87
5.2.	Adatvesztés modelljének bemutatása a megfigyelőben	89
5.3.	Torzítatlan spektrumbecslés szükséges feltétele	90
5.3.1.	Szükséges feltétel általános esetben	90
5.3.2.	Szükséges és elégséges feltétel egyenletes rezonátorelhelyezke- dés és véges beállítású megfigyelő esetén	91
5.4.	Torzítatlan spektrumbecslés elégséges feltételei	92
5.4.1.	Elégséges feltétel általános esetben	92
5.4.2.	Elégséges feltétel blokkorientált vizsgálattal	96
5.4.3.	Véletlenszerű adatvesztés	98
5.5.	Eredmények kiterjesztése zajos esetre	98
5.6.	Eredmények kiterjesztése dinamikusan visszacsatolt rezonátoros struktúrára	99
5.6.1.	Szükséges feltétel kiterjesztése	100
5.6.2.	Elégséges feltételek kiterjesztése	101
5.7.	Eredmények értelmezése	104
5.8.	Adatvesztéshez kapcsolódó szimulációk	105

5.8.1.	Rezonátor alapú megfigyelő szimulációs eredményei	105
5.8.2.	Dinamikusan visszacsatolt rezonátoros struktúra szimulációs eredményei	111
5.9.	Eredmények összegzése	112
Összefoglalás, kitekintés		115
Irodalomjegyzék		119
Függelékek		129
A.	Dinamikusan visszacsatolt hibaelőjeles struktúra mellékszámításai . .	129
B.	Késleltetés hatása a hiba abszolút középérték becslésére hibaelőjeles rezonátoros struktúra esetén	131
C.	Speciális korrelációs függvények számítása	132
D.	Hibaelőjeles FxLMS algoritmus mellékszámításai	133
E.	Késleltetés hatása a hiba abszolút középérték becslésére hibaelőjeles FxLMS algoritmus esetén	136
F.	Állapotátmeneti mátrix normája adatvesztés esetén	142
G.	Adatvesztéshez tartozó kritikus értékek becslése	143

Rövidítések jegyzéke

ADC	Analog to Digital Converter
AFA	Adaptive Fourier Analyzer
ANC	Active Noise Control
CRC	Cyclic Redundancy Check
DAC	Digital to Analog Converter
dB	decibel
DSP	Digital Signal Processor
DFT	Discrete Fourier Transform
FA	Fourier Analyzer
FIR	Finite Impulse Response
FxLMS	Filtered-x Least Mean Square
GFLOPS	Giga Floating Point Operations per Second
IIR	Infinite Impulse Response
kbps	kilobit per second
LMS	Least Mean Square
LTI	Linear Time Invariant
LTV	Linear Time Variant
MAE	Mean Absolute Error
MIMO	Multiple Input Multiple Output
NCS	Networked Control System
PLL	Phase Locked Loop
RCH	Resonator Channel
S/H	Sample and Hold
SISO	Single Input Single Output
TDMA	Time Division Multiple Access

Jelölések jegyzéke

\arcc	komplex szám szöge: $\varphi = \arcc(r \cdot e^{j\varphi})$
$\mathbb{C}^{l \times k}$	$l \times k$ dimenziós komplex számhalmaz
$c_{i,n}$	komplex exponenciális bázisfüggvények
\mathbf{c}_n	komplex exponenciális bázisfüggvényekből képzett vektor
\mathbf{c}	csupa egyest tartalmazó vektor
d	késleltetés értéke
e_n	hibajel
E_n^a, \bar{E}_n^a	hibajel abszolút középértéke, illetve annak felső korlátja
E_{ss}^a	E_n^a állandósult állapotban
$\bar{E}_{ss}^a, \bar{E}_{ss}^{a+}$	E_{ss}^a felső korlátai a késleltetés szeparálásával és anélkül
f	frekvencia változó, mintavételi frekvenciához képest megadva
f_{crit}	stabilitást biztosító kritikus frekvencia szinkronizálatlan esetben
f_i	i -edik rezonátorcsatorna frekvenciája
f_{quartz}	mintavételezést időzítő számláló órajelfrekvenciája
f_{sm}	szenzorok mintavételi frekvenciája
f_s	jelfeldolgozó egység mintavételi frekvenciája
\mathbf{g}, \mathbf{g}_n	megfigyelő becsatolóvektor (LTI és LTV modell)
h_n^r, h_n^F	hibaelőjeles rezonátor alapú és FxLMS algoritmusok esetén a tranzi- enst leíró változók
\mathbf{I}	egységmátrix
j	képzetes egység: $j = \sqrt{-1}$
k	összes feldolgozott minta száma
K_n	adatvesztésindikátor
L	$\mathbf{S}(z)$ kimeneteinek száma
L_{cr}	kritikus börszthossz
M	$\mathbf{S}(z)$ bemeneteinek száma
n	időindex
n'	késleltetett időindex: $n' = n - d$
n_n	megfigyelési zaj az n -edik időpontban
N	rezonátorok száma (rezonátoros struktúra esetén)
N	adaptív szűrő hossza (LMS alapú algoritmusok esetén)
N_{div}	mintavételi frekvenciát beállító órajelosztó aktuális értéke
$N_{\text{div}}^{\text{nom}}, \Delta N$	N_{div} névleges értéke és a névleges értéktől való eltérése
N_1	mintavételezést időzítő számláló aktuális értéke
N_0, N_{tol}	N_1 előírt értéke és ettől való megengedett maximális eltérése

VIII

\mathcal{O}_n	megfigyelhetőségi mátrix
P	rezonátorpárok száma
\mathcal{P}	elveszített intervallumok száma
r_n	szűrt referenciajel
\mathbf{r}_n	szűrt referenciajeltől képzett vektor
$R_{zw}(\tau)$	korrelációs függvény
$\mathbb{R}^{l \times k}$	$l \times k$ dimenziós valós számhalmaz
s_n	$S(z)$ impulzusválasza
$S(z)$	visszacsatoló dinamikus rendszer átviteli függvénye
$\hat{S}(z)$	$S(z)$ átviteli függvény becslője
$S(z_i)$	$S(z)$ átvitele az i -edik rezonátorfrekvencián
\mathbf{S}	$S(z_i)$ -ket tartalmazó diagonálmátrix
$\hat{\mathbf{S}}$	\mathbf{S} mátrix becslője
$S^0(z)$	$S(z)$ átvitelnek a fizikai szakaszból álló része
$\mathbf{S}(z)$	MIMO visszacsatoló dinamikus rendszer átviteli függvény-mátrixa
$S^{l,m}(z)$	$\mathbf{S}(z)$ rendszer m -edik bemenete és l -edik kimenete közötti átvitel
$\text{sign}(\cdot)$	előjelfüggvény
t, t_i	időt jelölő változó, illetve az i -edik időpont
T_d	adat érkezése és feldolgoása között eltelt idő
T_d^0	adat érkezése és feldolgoása között eltelt idő kezdeti, ismert értéke
ΔT_d	T_d megváltozása T_d^0 -hoz képest
T_{fix}	állandó késleltetés
T_s	jelfeldolgozó egység mintavételi periódusideje
T_{sm}	szenzorok mintavételi periódusideje
T_{tr}	adatátviteli idő
u_n	beavatkozó jel
\mathbf{U}	$(\langle z_i \rangle - \mathbf{g}\mathbf{c}^T)$ sajátvektorai
V	intervallumonkénti abszolút középértékek számításának periódusideje
\mathbf{w}_n	adaptív szűrő együtthatói
$w_{i,n}$	\mathbf{w}_n szűrő i -edik eleme
\mathbf{w}_o	\mathbf{w}_n optimális értéke
$\tilde{\mathbf{w}}_n$	adaptív szűrő eltérése az optimális értékétől
w_i	$S(z_i)$ inverzének jelölése rezonátor alapú struktúrák esetén
\mathbf{W}	inverz átviteli értékeket tartalmazó diagonálmátrix
x_n	referenciajel (LMS alapú algoritmusok)
\mathbf{x}_n	referenciajeltől képzett regressziós vektor (LMS alapú algoritmusok)
\mathbf{x}_n	jelmodell állapotváltozója (rezonátor alapú struktúrák)
$x_{i,n}$	jelmodell állapotváltozójának i -edik eleme
$\hat{\mathbf{x}}_n$	rezonátorok állapotváltozója, jelmodell becslője
$\hat{x}_{i,n}$	rezonátorok állapotváltozójának i -edik eleme
$\tilde{\mathbf{x}}_n$	rezonátorok állapotváltozóinak hibája: $\tilde{\mathbf{x}}_n = \hat{\mathbf{x}}_n - \mathbf{x}_n$
$\hat{\mathbf{x}}_n^{\text{opt}}$	$\hat{\mathbf{x}}_n$ állapotváltozók optimális értéke
$\hat{\mathbf{x}}_n^{\mathbf{S}}$	$\hat{\mathbf{x}}_n$ állapotváltozók transzformált értéke: $\hat{\mathbf{x}}_n^{\mathbf{S}} = \mathbf{S}\hat{\mathbf{x}}_n$
y_n	jelmodell kimenete

y'_n	y_n becslt értéke
z	\mathcal{Z} -transzformáció változója
z_i	rezonátorfrekvenciák pozíciói a komplex egységkörön
$\langle z_i \rangle$	z_i elemeköl képzett diagonálmátrix
\mathbf{z}	z_i elemekből képzett vektor
α	rezonátoros algoritmusok konvergenciaparamétere
β_m, β_s	javított konvergenciatulajdonságú hibaelőjeles algoritmusok konvergenciaparamétere és skálatényezője
γ_n	$S(z)$ impulzusválaszának késleltetést feltehetőleg nem tartalmazó része
Γ	adatvesztési arány
Γ_{cr}	adatvesztési arány kritikus értéke
$\Delta^{\text{fix}}(z)$	állandó késleltetés átviteli függvénye
$\Delta^{\text{var}}(z)$	változó késleltetés átviteli függvénye
$\Delta\phi(f)$	$S(z)$ átviteli függvény fázisának megváltozása
η	hibaelőjeles algoritmusok relatív sávszélességigénye
$\mathbf{\Lambda}$	$(\langle z_i \rangle - \mathbf{g}\mathbf{c}^T)$ sajátértékeiböl álló diagonálmátrix
$\bar{\lambda}$	$\mathbf{\Lambda}$ sajátértékek abszolútértékének maximuma
μ	konvergenciaparaméter LMS alapú algoritmusok esetén
ν	megfigyelési zaj abszolút középértéke
π_{cr}	\mathcal{P}/k kritikus értéke
ρ	időalapok közötti eltérés (drift)
ρ_w, ρ_d, ρ_p	hibaelőjeles FxLMS esetén definiált értékek: (4.40)
$\tau, \underline{\tau}$	beállási idő és alsó korlátja
ξ	hibaelőjeles rezonátoros struktúra esetén definiált érték: (4.10)
ζ	\mathbf{U} és \mathbf{U}^{-1} mátrixok normájából számított skalár
$(\cdot)^T$	transzponált
$(\cdot)^*$	konjugált
$(\cdot)^H$	transzponált konjugált
$(\cdot)^\#$	Moore-Penrose féle pszeudoinverz
$\langle \cdot \rangle$	diagonálmátrix
$\ \cdot\ $	négyzetes norma
$ \cdot $	abszolút érték
$\mathbb{E}\{\cdot\}$	várható érték
$\mathbb{E}_K\{\cdot\}$	feltételes várható érték adatvesztés esetén

Előszó

Dolgozatomban vezeték nélküli hálózati adatgyűjtő eszközök valós idejű, visszacsatolt jelfeldolgozó rendszerekben történő alkalmazásának speciális kérdéseit vizsgálom. Kutatásaim fókuszában az elsősorban periodikus jelek feldolgozására hatékonyan alkalmazható, úgynevezett rezonátor alapú struktúrák állnak. Ezen belül is főként a visszacsatolásában dinamikus rendszert tartalmazó rezonátoros struktúrával foglalkozom, amely periodikus zavarjelek hatékony kompenzálására alkalmas szabályozási körnek tekinthető.

A hálózaton keresztül visszacsatolt rendszerek kutatását egyetemi tanulmányaim során az aktív zajcsökkentés és a szenzorhálózatok területén szerzett tapasztalataim alapozták meg. Az aktív zajcsökkentés olyan alkalmazás, ahol a cél különböző akusztikus zavarjelek kioltása hangszórókból kiadott úgynevezett ellenzaj segítségével. Az akusztikus zajok egy része periodikus jellegű, így a rezonátor alapú struktúrák alkalmazása kézenfekvő. Mivel az elnyomandó zajt érzékelő mikrofonok a térben elosztottan helyezkednek el, így felmerül a vezeték nélküli adattovábbítás igénye is. A szenzorhálózatok erre a célra, mint kifejezetten jelérzékelésre és -továbbításra kifejlesztett rendszerek, kézenfekvő megoldást kínálnak. Habár a dolgozatban közölt eredményeim kidolgozása során jelentős szerepet játszottak az aktív zajcsökkentés által támasztott igények és a szenzorhálózatok által kínált lehetőségek viszonyai, mindazonáltal az eredmények nem korlátozódnak sem a szenzorhálózatokra, sem az aktív zajcsökkentésre, hanem általános hálózati adattovábbítás esetén is érvényesek. A rezonátor alapú eljárások bizonyos szempontból hasonlóságot mutatnak az úgynevezett LMS (Least Mean Square) alapú algoritmusokkal. A formai hasonlóságoknak köszönhetően néhány eredményt az LMS alapú algoritmusokra is kiterjesztettem, amelyeket a dolgozatom negyedik fejezetében tárgyalok.

Mivel a vizsgált rendszerekben a hálózat a valós idejű visszacsatoló ág szerves részét képezi, így jelenléte alapvetően befolyásolja a teljes rendszer működését, és számos kérdést vet fel. Ezek közül kiemelten fontos az *elosztott jelérzékelés és jelfeldolgozás*, a hálózat *korlátozott adatátviteli sebessége* és a rádiós kommunikáció miatt fellépő *adatvesztés*. A dolgozatomat ezen három fő témakör köré szerveztem.

Manapság a valós idejű, hálózaton keresztül visszacsatolt rendszerek (NCS: Networked Controlled Systems) vizsgálata intenzív kutatási terület, eredményeimmel ezen kutatásokhoz járulok hozzá. Habár a dolgozatban bemutatásra kerülő algoritmusok a fizikai rendszeren történő visszacsatolás miatt szabályozási körnek is tekinthetők, de alapjában véve klasszikus jelfeldolgozási algoritmusokból fejlődtek ki. Ennek megfelelően a bemutatásukat és analízisüket jelfeldolgozási szemléletmód-

dal tárgyalom, valamint a jelfeldolgozásban megszokott terminológiát használom az egyes fogalmak és változók megnevezésére.

Dolgozatom felépítése a következő. Az első fejezetben áttekintést adok kutatásaim motivációról, a valós idejű visszacsatolt rendszerek felépítéséről, tipikus problémáiról és a technológiai lehetőségekről. Bemutatom a kutatásaimat inspiráló vezeték nélküli aktív zajcsökkentő rendszert: ez a mintaalkalmazás betekintést nyújt egy gyakorlati példán keresztül egy valós rendszer tervezésének lépéseibe és korlátaiba.

A második fejezetben áttekintem a munkám kiindulási alapjaiként szolgáló rezonátor, valamint LMS alapú struktúrákat.

A harmadik fejezetben az elosztott jelérzékelés és jelfeldolgozás által okozott problémákat tárgyalom. Megmutatom, hogy a szenzorokon történő mintavételezés és a központi jelfeldolgozás közötti szinkronitás hiánya a dinamikus visszacsatolt rezonátoros struktúra instabilitását eredményezi. Bemutatok egy, a mintavételezés szinkronizálására szolgáló mechanizmust, mely kiküszöböli a részegységek autonóm működéséből származó stabilitási problémát. Ismertetek egy elosztott rezonátoros rendszert és az elosztottan működő rezonátorok szinkronizálására szolgáló algoritmust is.

A negyedik fejezetben két egyszerű adattömörítési módszert mutatok be, melyek segítenek a szenzorhálózat által okozott sáv szélességkorlátok enyhítésében. Az első algoritmus egy már ismert elv kiterjesztése a rezonátor alapú struktúrákra, és ismertetek egy új eljárást is az algoritmus konvergenciatulajdonságainak javítására. Az adattömörítési módszereket kiterjesztem az úgynevezett FxLMS algoritmusra is, mely a rezonátor alapú algoritmusokhoz hasonlóan jelmodell alapú visszacsatolt rendszer, de sztochasztikus jelmodellre épít.

Az utolsó fejezetben az adatvesztés hatását vizsgálom. Szükséges, illetve elégséges feltételeket adok meg arra nézve, hogy a rezonátor alapú algoritmusok állapotváltozói milyen adatvesztési mintázatok esetén konvergálnak az adatvesztés nélkül elérhető optimális értékükhöz.

Kutatómunkámat a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Mérés-technika és Információs Rendszerek Tanszékén végeztem. Köszönetet szeretném kifejezni mindazoknak, akik munkámat bármilyen módon támogatták. Szakmai támogatásukért köszönet illeti konzulenseimet: Dr. Péceli Gábort és dr. Sujbert Lászlót, akik az egyetemért végzett kitartó munkájuk mellett is segítettek eredményeim megfelelő szintű kidolgozásában, áttekintésében és formálásában. Az előrehaladásomat segítették a tanszék által nyújtott anyagi és erkölcsi támogatások; ezt szeretném megköszönni a tanszék minden dolgozójának, külön kiemelve Dr. Kollár Istvánt, illetve a tanszék vezetőket: Dr. Péceli Gábort, dr. Horváth Gábort és Dr. Jobbágy Ákóst. Publikációim előzetes szakmai lektorálásában segítségemre volt dr. Bank Balázs. Végezetül köszönöm családomnak a munkám elvégzéséhez nyújtott támogatást.

1. fejezet

Valós idejű jelfeldolgozás megvalósítása szenzorhálózatokban

1.1. Motiváció és problémafelvetés

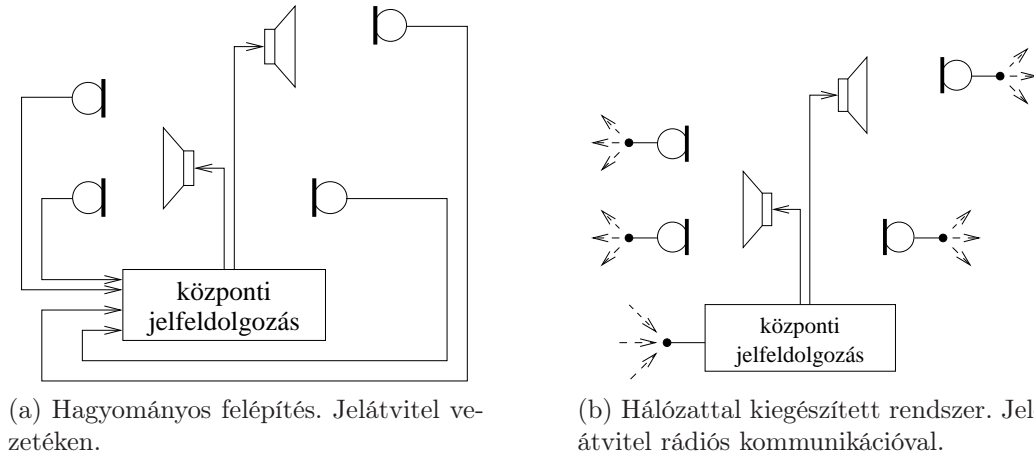
Napjainkban egyre szélesebb körben alkalmazunk elosztott jelfeldolgozó rendszereket. Ezekben a jelérzékelés és -feldolgozás térben szétválik, és közöttük jellegzetesen valamilyen megosztott csatornán hálózati adatátvitelt alakítanak ki. Ezen architektúra előnyei a részegységek jelvezetékekkel történő közvetlen összekötésével szemben [7, 8, 9, 10]:

- rugalmas felépítés,
- könnyű telepíthetőség,
- egyszerű skálázhatóság.

A dolgozat célja az ilyen, hálózati kommunikáció segítségével csatlakoztatott érzékelőket tartalmazó visszacsatolt jelfeldolgozó rendszerek vizsgálata, kiemelten koncentrálva a rezonátor alapú algoritmusokra. A motivációt egy olyan kísérleti aktív zajcsökkentő rendszer fejlesztése szolgáltatta, amelyben az érzékelési feladatot vezeték nélküli szenzorok látják el. A dolgozatban az aktív zajcsökkentés kitüntetett mintaalkalmazásként szerepel, ahol a fókuszban alapvetően nem a zajcsökkentés mint akusztikai feladat megoldása áll, hanem a vezeték nélküli csatornán keresztül visszacsatolt jelfeldolgozó rendszerben fellépő jelenségek demonstrálása. Munkánk során ugyanis a vezeték nélküli zajcsökkentő rendszer alkalmasnak bizonyult a szenzorhálózatot is tartalmazó visszacsatolt jelfeldolgozó rendszerekben felmerülő általános problémák vizsgálatára és az eredmények tesztelésére. A kísérleti, vezeték nélküli zajcsökkentő rendszer részletes bemutatására az 1.3. alfejezetben kerül sor.

Az aktív zajcsökkentés azért került a fókuszpontba a hálózattal megvalósított jelérzékeléssel kapcsolatban, mert a rendszer kiépítése sok esetben térben elosztottan elhelyezett mikrofonokat igényel. A mikrofonok az elnyomandó zaj érzékelésére szolgálnak. Az általuk érzékelt jel alapján történik az úgynevezett ellenzaj előállítás, amelyet hangszórókból kisugározva a szuperpozíció elvét felhasználva minimalizálhatjuk a zaj teljesítményét a mikrofonok egy korlátos környezetében. Ha nagy térben szeretnénk úgynevezett csendes zónát kialakítani, ahhoz általában több mikrofon is

szükséges. A hagyományos jelfeldolgozási architektúra alkalmazása azért okozhat nehézségeket, mert a szenzorok illesztésére használt nagyszámú jelvezeték elhelyezése nehézkes [11]. Ez elkerülhető vezeték nélküli adatátvitel esetén (lásd 1.1. ábra).



1.1. ábra. A szenzorok vezetékkel és vezeték nélkül történő csatlakoztatásának vázlatos elrendezése egy aktív zajcsökkentő rendszerben.

Egy aktív zajcsökkentő rendszer olyan szabályozási körnek tekinthető, amelyben cél a nulla hibajel (nulla zajszint) elérése. A visszacsatolás az akusztikus rendszeren keresztül valósul meg. A nagy fókuszú akusztikus átviteli függvények és a nagy sávzélességű jelek miatt általában valamilyen jelmodell alapú adaptív algoritmus alkalmazása az elterjedt. A hagyományos, szabályozástechnikában elterjedt algoritmusokhoz képest ezen eljárások jellegzetessége, hogy a hibajel minimalizálásához felépítünk egy koncepcionális modellt a zavarójelre vonatkozóan, és ezen jelmodellnek megfelelően alakítjuk ki a zavarjelet megszüntető algoritmust. A dinamikus visszacsatolt rezonátoros struktúra periodikus jelmodellre [12, 13, 14], míg az FxLMS algoritmus sztochasztikus jelek szűrését megvalósító jelmodellre épít [15, 16, 17]. Az algoritmusokat részletesen a 2. fejezetben mutatom be.

Dolgozatomban a dinamikus visszacsatolt rezonátoros struktúrával, a rezonátor alapú megfigyelővel és az FxLMS algoritmussal foglalkozom. Megvizsgálom a hálózati adattovábbítás működésükre gyakorolt hatását, illetve továbbfejlesztési javaslatokat mutatok be arra nézve, hogy hogyan igazítható működésük a hálózati adattovábbítás jellegzetességeihez.

A dinamikus visszacsatolt rezonátoros struktúra a rezonátor alapú megfigyelőből fejlődött ki. Míg a megfigyelőt általában periodikus jelek analízisére (rekurzív Fourier-analízisére), addig a dinamikus visszacsatolt változatát zavarkompenzációra alkalmazzuk. Habár az eredmények többsége a dinamikus visszacsatolt rezonátoros struktúrára vonatkozik, a rezonátor alapú megfigyelőt is részletesen tárgyalom, mivel az a dinamikus visszacsatolt struktúra alapját képezi, és néhány eredményt a rezonátor alapú megfigyelőből származtatok a dinamikus visszacsatolt struktúrára (lásd 5. fejezet). Az FxLMS algoritmus a dinamikus visszacsatolt rezonátoros

struktúrával több, főleg formai hasonlóságot mutat, emiatt néhány eredményt az FxLMS algoritmusra is kiterjeszttek (lásd 4. fejezet).

A szenzorhálózatok feltörekvő technológiaként, és a várhatóan egyre olcsóbb, tömegterméknek számító hálózati eszközei miatt ígéretesnek tűnnek mint a hálózati jelérzékelésre felhasználható rendszerek. Szenzorhálózatok gyűjtőnév alatt említjük általában azon rendszereket, amelyek több, valamilyen fizikai mennyiség érzékelésére alkalmas, egymással megosztott csatornán kommunikációra képes, intelligens egységekből épülnek föl [18, 19, 20, 21]. A szenzorhálózatot alkotó egységek az úgynevezett hálózati csomópontok, vagy elterjedt nevükön mótók. A csomópontok közötti kommunikáció általában vezeték nélküli, rádiós csatornán történik. A processzorral ellátott intelligens eszközök képesek önálló működésre, valamint alapvető vezérlési és feldolgozási feladatok végrehajtására.

Kutatási és fejlesztési területek áttekintése

A szenzorhálózatok kifejlesztésekor fő szempont a gazdaságos gyártás és üzemeltetés, valamint az alacsony energiafogyasztás volt, így erőforrásaik általában korlátozottak. A valós idejű rendszerek által támasztott szigorú követelmények a szűkös erőforrások miatt nem mindig engedik meg a szenzorhálózatok által nyújtott tervezői szabadság teljes kihasználását (például nagyméretű ad-hoc hálózatok kialakítása), mindazonáltal a szenzorhálózatok által kínált lehetőségek még bizonyos megszorítások mellett is ígéretessé teszik felhasználásuk vizsgálatát a valós idejű, visszacsatolt rendszerekben. A szűkös erőforrások miatt számos megoldandó technikai és tudományos kérdés vizsgálata szükséges. A témában fellelhető szakirodalom alapján általában kétféle megközelítéssel találkozhatunk [22]:

- 1) Algoritmusok vizsgálata és optimalizálása, figyelembe véve a hálózat hatását.
- 2) A hálózat tervezése a jelfeldolgozó rendszer igényeit figyelembe véve.

A kétféle megközelítés egymással párhuzamosan fejlődve a rendszer két kritikus pontját igyekszik optimalizálni, kölcsönösen figyelembe véve a követelményeket. A dolgozat eredményeinek többsége az 1)-es számú témakörbe sorolható, tehát a jelfeldolgozási algoritmusok tervezése és analízise kerül előtérbe: a hálózat által felszínre hozott problémákat a jelfeldolgozás eszközeivel igyekszem megoldani és analízálni. Közvetlenül a hálózati kérdésekhez kapcsolódóan kevesebb eredmény kerül bemutatásra. Jelfeldolgozási szempontból két feladattal kell foglalkozni:

- a rendszer elsődleges funkcionalitásának megvalósítása,
- a hálózat bizonytalanságainak elemzése és kezelése.

A hálózaton keresztül visszacsatolt rendszerek területén fellelhető tudományos eredmények igen szerteágazóak, ezért nem célom ezen eredmények részletes ismertetése, hanem csupán röviden áttekinteni a dolgozatomat is érintő jellegzetes problémákat. A témában számos összefoglaló jellegű könyv, folyóiratcikk és különkiadás fellelhető [7, 23, 24, 25], amelyek gazdag irodalmi hivatkozási listával rendelkeznek, így a részletes eredmények ott megtekinthetők.

A dolgozat alapvetően a valós idejű, visszacsatolt rendszerek tervezése és analízise terén fellelhető három nagy problémakör köré épül: *késleltetés, kis sávszélességű kommunikációs csatorna* és *adatvesztés* [7, 9, 10, 26, 27]:

Késleltetés Az adatútban a mintavételezés és a minták feldolgozása között megjelenő késleltetés az *elosztott jelérzékelés és jelfeldolgozás* egyik fontos következménye [28]. Habár a késleltetés elkerülhetetlen, lényeges, hogy minél inkább kiszámítható legyen az értéke [28]. Visszacsatolt rendszerek esetén a késleltetés jelentősen ronthatja a teljes rendszer teljesítményét, a változó késleltetés akár instabilitást is okozhat.

A késleltetés egy lényeges forrása az adatátviteli időn kívül a rendszer elosztott volta miatt bekövetkező elcsúszás a szenzorok, valamint a központi jelfeldolgozó egység időzítéseiben. Ez a problémakör szorosan kapcsolódik a *szinkronizáció* témaköréhez [29], amely alatt tágabb értelemben az elosztottan működő rendszerek ütemezésének összehangolását értem. A téma bővebb kifejtése a 3. fejezetben található.

Kis sávszélességű kommunikációs csatorna Mivel valós idejű rendszerekben adott mennyiségű adat továbbítására korlátozott idő áll rendelkezésre, így a kommunikációs csatorna sávszélessége szigorú korlátot jelent a rendszertervezés során [30, 31]. Mivel a kommunikációs csatornák sávszélessége a szabványok, az ár és a fogyasztás által meghatározott, így a korlátok enyhítése gyakran az intelligens szenzorok számítási kapacitásának kihasználásával történik. A számítási kapacitást kihasználva a szenzorok elvégezhetnek bizonyos előfeldolgozást vagy adattömörítést [26, 32]. Előfeldolgozásra visszacsatolt rendszerek esetén egy kézenfekvő megoldás lokális állapotmegfigyelők futtatása [26, 33].

Az adatredukció nemcsak a sávszélességigény csökkentését szolgálja, hanem energiafogyasztás szempontjából is kedvező [33]. A kommunikáció igen energiaigényes művelet, emiatt a szerény erőforrásokhoz mérten érdemes a számításokat lokálisan elvégezni, amennyiben ez a kommunikációs igényt csökkenti.

Adatvesztés A visszacsatolt rendszerek területén az adatvesztéssel kapcsolatos vizsgálatok általában arra terjednek ki, hogy milyen adatvesztési arány mellett lehet stabilizálni egy visszacsatolt rendszert, illetve hogyan tervezhető adatvesztés esetén a szabályozó algoritmusa [34, 35, 36, 37].

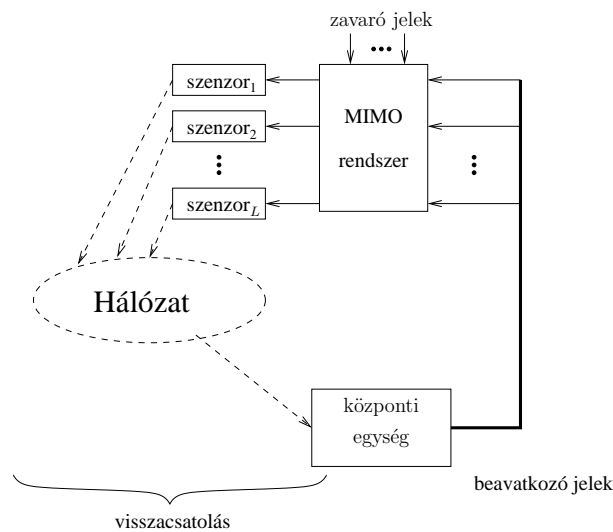
Az adatvesztés különösen a visszacsatolás nélkül instabil rendszerek esetén veszélyes, mert adatvesztés esetén nyílt hurokban működik a szakasz, tehát a stabilizáló visszacsatolás megszűnik. A későbbiekben látni fogjuk, hogy a rezonátor alapú struktúrák esetén feltételezzük, hogy a visszacsatoló ágban található fizikai rendszer alapvetően stabil, így a stabilitás nem kritikus. Az viszont korántsem egyértelmű, hogy mikor konvergálnak a rendszer állapotváltozói az optimális értékükhöz.

Az intelligens szenzorok által kínált lokális adatfeldolgozás lehetősége adatvesztés szempontjából is kedvező [10, 26]. A szenzorok számára ugyanis lokálisan

minden adat hozzáférhető, a származtatott jelparaméterek elvesztése viszont bizonyos esetekben kevésbé kritikus (pl. ha azok lassan változnak).

1.2. Architektúrák és technológiák áttekintése

Ebben az alfejezetben általános áttekintést adok a dolgozatban vizsgált, hálózaton keresztül visszacsatolt rendszerek felépítéséről és működéséről. Rövid áttekintést adok a magas szintű működésről, a feladatok ütemezéséről, valamint a rendszerek megvalósítása kapcsán a napjainkban jellemző és elterjedt technológiai megoldásokról, eszközökről és szabványokról.



1.2. ábra. Vezeték nélküli visszacsatolt rendszer bloksémája.

A hálózaton keresztül visszacsatolt rendszerek tipikus felépítése látható az 1.2. ábrán. Feltételezzük, hogy létezik egy központi egység, amely összegyűjti a szenzorok adatait, és ezen adatok alapján számítja a beavatkozó jeleket. A központi egység által előállított beavatkozó jelek közvetlenül csatlakoznak a szabályozott szakaszhoz. Elképzelhető az is, hogy a beavatkozó jelek továbbítása is vezeték nélküli hálózaton keresztül történik. Az esetek többségében azonban a beavatkozás jelentősen több energiát igényel, mint az érzékelés, tehát valamilyen nagy teljesítményű energiaellátó hálózat kiépítése mindenképpen szükséges, amellyel együtt a jelkábelek telepítése is egyszerűbben megoldható [38].

A hálózati kapcsolat komplexitása széles körben változhat. Egy lényeges csoportosítási szempont, hogy létezik-e közvetlen kapcsolat a hálózati eszközök és a központi egység között vagy sem. Amennyiben igen, úgy csillag topológiáról, ellenkező esetben valamilyen többszintű, ún. multi-hop hálózatról beszélünk [20, 21]. Habár a dolgozatban közölt eredmények egy része topológiától független, a téma motivációját nyújtó aktív zajcsökkentő alkalmazás jellege miatt alapvetően csillag topológiával foglalkozom. A fizikai távolság ezekben a rendszerekben általában kicsi, akusztikai

	Mica2	Micaz	TelosB	Lotus
processzor	Atmega128L, 8 bit	Atmega128L, 8 bit	TI MSP430, 16 bit	Cortex M3, 32 bit
órajel	7.3728 MHz	7.3728 MHz	8 MHz	10–100 MHz
SRAM	4 kB	4 kB	10 kB	64 kB
program- memória	128 kB	128 kB	48 kB	512 kB
Adat flash	512 kB	512 kB	1024 kB	64 MB
rádiós frekvenciasáv	916 MHz	2.4 GHz	2.4 GHz	2.4 GHz
adatátviteli sebesség	38.4 kbps	250 kbps	250 kbps	250 kbps
analóg interfész	10 bit	10 bit	12 bit	12 bit
max./min. áramfelvétel	35 mA / 16 μ A	28 mA / 16 μ A	25 mA / 6 μ A	67 mA / 10 μ A
energiaforrás	2 db AA elem	2 db AA elem	2 db AA elem	2 db AA elem

1.1. táblázat. Néhány elterjedt intelligens szenzor paraméterei [43].

megfontolások miatt a néhány métert nem haladja meg, amely a szokásos rádiós eszközökkel áthidalható.

Az 1.2. ábra alapján megállapíthatjuk, hogy a visszacsatolt rendszernek hálózati működés által érintett részei az alábbiak:

- szenzorok,
- adatátviteli hálózat,
- központi feldolgozó egység.

Mivel a dolgozatban a fenti részegységek által nyújtott lehetőségek, illetve ezek tulajdonságai alapvető szerepet játszanak, így a következőkben ezen főbb részegységekről található rövid összefoglalás.

Szenzorok Az 1.1. táblázatban néhány ismert és elterjedt, szenzorhálózatokban használható eszköz főbb paramétere található. Habár a fellelhető eszközök listája jelentősen tágabb, a lista a főbb paraméterek szempontjából reprezentatív. A számok alapján megállapítható, hogy a napjainkban egy asztali számítógép esetén megszokott számítás, adattárolás és kommunikáció tekintetében egy intelligens szenzor legalább egy vagy két nagyságrenddel gyengébb paraméterekkel rendelkezik, ami behatárolja a felhasználási területeket. Mindezt kompenzálja kis méretük, alacsony árak és kedvező energiafogyasztásuk.

	ZigBee	Bluetooth	WiFi
cél	Kisméretű, lokális hálózatok	Vezeték kiváltása, közvetlen kapcsolat	Szélessávú Internet-kapcsolat
hatótávolság	kb. 10–100 m	kb. 10 m	100 m
sebesség	20–250 kbps	1 Mbps	54 Mbps
feléledési idő	15 ms – 30 ms	2 ms – 10 s	20 ms–2 s
frekvencia	[868/915, 2400] MHz	2400 MHz	[2400, 5000] MHz
komplexitás	alacsony	közepes	nagy
fogyasztás	alacsony	alacsony/közepes	nagy
alap topológia	ad-hoc, csillag, mesh	csillag	nem definiált
csomópontszám	2–65000	8	tetszőleges/2007*
skalázhatóság	jól skalázható	nehezen skalázható	jól skalázható

1.2. táblázat. ZigBee, Bluetooth és WiFi szabványok jellemzői.

* üzem módtól függően: ad-hoc / strukturált hálózat [40]

Adatátvitel Szenzorhálózatok esetén az adatátvitel túlnyomórészt vezeték nélküli csatornán történik, vezetékes kommunikációs hálózattal (pl. Ethernet, CAN) ritkábban találkozunk. A manapság széles körben elterjedt és potenciálisan a vezeték nélküli rendszerek kialakítására legalkalmasabb szabvány a ZigBee, Bluetooth és WiFi, amelyekhez rendre az IEEE 802.15.4, IEEE 802.15.1 és IEEE 802.11 szabványok kötődnek. Ezen szabványok összehasonlításáról számos tanulmányt találunk [9, 39, 40, 41], amelyek kiterjednek ipari, valós idejű rendszerekben történő alkalmazásokra is [9, 42]. Néhány fontosabb paraméter megtalálható összefoglalva az 1.2. táblázatban.

A hálózattal kapcsolatos tipikus elvárások, illetve értékelési szempontok általában a következők [8, 9, 38]:

- determinisztikusság,
- megfelelő sáv szélesség,
- megbízhatóság,
- alacsony válaszidő.

Jelenleg általánosan elterjedt vélemény, hogy az 1.2. táblázatban szereplő szabványok közül a WiFi alkalmas legkevésbé szenzorhálózaton alapuló, visszacsatolt, valós idejű rendszerek létrehozására. Ennek oka alapvetően nem a kommunikációs teljesítményében keresendő, hiszen adatátviteli sebessége messze felülmúlja a másik két szabványét, viszont a protokoll komplexitása és az eszközök fogyasztása nem igazán illeszkedik a szerény erőforrásokkal rendelkező szenzorokhoz [9].

A ZigBee és Bluetooth szabványokat összehasonlítva alapvetően a ZigBee a kommunikációs sebesség terén marad alul, egyéb paramétereit tekintve viszont általában kedvezőbb [42].

A bemutatott szabványokra számos továbbfejlesztési javaslat is létezik, amelyek az eredeti szabványok valós idejű rendszerekben történő használatát segítik elő [44, 45, 46, 47].

Központi feldolgozó egység A központi jelfeldolgozó egység általában az egész hálózat legtöbb erőforrással rendelkező részegysége, így a rendszer talán legkevésbé kritikus építőeleme. Feltételezhetjük, hogy képes akár az egész rendszer felügyeletére. Itt történik a szenzorok adatainak feldolgozása és a beavatkozó jelek kiszámítása. Központi jelfeldolgozó egységként funkcionálhat például PC, nagyteljesítményű programozható logikai vezérlők, jelfeldolgozó processzorok...

Az 1.2. ábrán látható rendszer működésének ütemezése általában két alapkonceptió szerint történhet [7, 48]: idővezérelt (time triggered), illetve eseményvezérelt (event triggered). Idővezérelt üzemmód esetén minden egység szigorú ütemezés szerint, jelfeldolgozó rendszerek esetén általában időben ekvidisztáns módon hajtja végre a feladatokat. Eseményvezérelt üzemmód esetén az ütemezés nem feltétlenül determinisztikus. A központi feldolgozás ütemezése általában a szenzorok adatainak beérkezéséhez igazított.

Jóllehet az eseményvezérelt működés nagyobb tervezői szabadságot tesz lehetővé, a valós idejű működés által megkövetelt determinisztikusság szempontjából azonban kritikusabb. Az idővezérelt ütemezés kötött struktúrát eredményez, de az algoritmusok jól kidolgozottak, és jól tervezhetők az időzítések [49].

Habár az 1.2. ábrán szerepel egy központi jelfeldolgozó egység, az intelligens szenzoroknak köszönhetően akár részben vagy teljes egészében elosztott jelfeldolgozási rendszer is megvalósítható [48]. Elképzelhető, hogy a szenzorok valamilyen előfeldolgozást hajtanak végre, tehát nem csupán a nyers adatokat továbbítják, illetve akár a rendszer teljes funkcionalitása is megvalósítható elosztott módon, úgy hogy a beavatkozást is a szenzorok végzik.

1.3. Mintaalkalmazás bemutatása

Ezen alfejezet célja egy olyan alkalmazás és egyben mintarendszer bemutatása, amely a dolgozatban található eredmények kidolgozását motiválta. Ezenkívül a rendszer az 1.2. ábrán látható, általánosnak mondható architektúra egy gyakorlati megvalósítási lehetőségét is mutatja, így képet ad egy valós rendszerről, a lehetőségekről és konkrét megoldásokról. Az alkalmazás egy vezeték nélküli aktív zajcsökkentő rendszer, amelyben az elnyomandó zajt vezeték nélküli szenzorhálózat érzékeli.

1.3.1. Vezeték nélküli aktív zajcsökkentő rendszer

Aktív zajcsökkentés

Az aktív zajcsökkentés célja akusztikus zavarjelek megszüntetése a szuperpozíció elvének segítségével [50, 51, 52]. Az elnyomandó zavarjelet mikrofonok segítségével érzékeljük, és az úgynevezett ellenzajt hangszórók segítségével sugározzuk ki. Az ellenzajt a zajcsökkentő algoritmusok úgy alakítják ki, hogy az a zajérzékelő mikrofonoknál minimalizálja az eredő zajteljesítményt. A zajkioltás csak a mikrofonoknál kontrollálható, és hatékony zajcsökkentés általában csak a mikrofonok egy korlátos környezetében lehetséges. Ökölszabályként elmondható, hogy az úgynevezett csendes zóna mérete a mikrofonok körül a zaj hullámhosszának negyedével közelíthető. Ennek egyik következménye, hogy az aktív zajcsökkentés általában alacsony, néhány száz Hz, esetleg néhány kHz-es tartományban hatásos. Másik következmény, hogy kiterjedt térben történő zajcsökkentéshez sok mikrofont és hangszórót kell alkalmazni.

A zajcsökkentő algoritmusok általában felhasználnak egy vagy több úgynevezett referenciajelet, amely információt hordoz a zajról. A referenciajel sztochasztikus zajok esetén valamilyen, a kioltandó zajjal korreláló jel, például a zajforrás közvetlen közelében érzékelt zaj esetleg rezgés. Periodikus zaj esetén a referenciajel a zaj frekvenciájával megegyező jel, de akár elegendő lehet egy frekvenciaérték is, például egy motor fordulatszám.

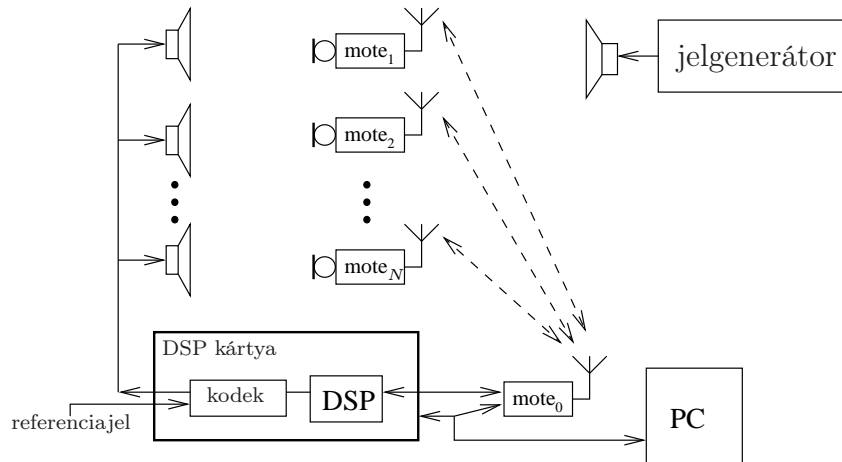
Az aktív zajcsökkentéshez használt algoritmusok bemutatására a 2. fejezetben kerül sor.

Rendszer felépítése

A vezeték nélküli zajcsökkentő rendszer blokkvázlata az 1.3. ábrán látható. A zaj érzékelését a $mote_1 \dots mote_N$ jelzésű vezeték nélküli szenzorok látják el. A rendszer micaz mótók, valamint a velük főbb paramétereiben megegyező (processzor, órajel, rádió) mitmótók¹ [53] felhasználásával is kiépítésre került. A micaz mótók főbb paramétereit az 1.1. táblázatban találhatóak. A micaz mótók programozása TinyOS [54] operációs rendszerben, a mitmótók programozása pedig szabványos C nyelven történt. A szoftverfejlesztés legkritikusabb pontja a valós idejű működés biztosítása.

A szenzorok a zajról gyűjtött információt rádión keresztül továbbítják a $mote_0$ jelzésű bázisállomáshoz, amelynek típusa megegyezik a szenzor mótók típusával. A

¹BME-MIT által fejlesztett moduláris, vezeték nélküli szenzorok



1.3. ábra. Vezeték nélküli tesztkörnyezet.

bázisállomás soros porton küldi tovább az adatokat a központi jelfeldolgozó egység felé, amely egy jelfeldolgozó processzor (DSP).

A jelfeldolgozó processzor egy ADSP-21364 EZ-KIT Lite kártyán [55] foglal helyet. A jelfeldolgozó egység fő paraméterei:

- órajel: 330 MHz, 2 GFLOPS,
- 32 bites lebegőpontos aritmetika,
- 3 Mbit SRAM,
- 2 db 24 bites $\Sigma\Delta$ AD-átalakító, 8 db 24 bites $\Sigma\Delta$ DA-átalakító.

A DSP adatait összehasonlítva az 1.1. táblázatban látható értékekkel, megállapíthatjuk, hogy főleg számítási kapacitás terén nagyságrendekkel fölülmúlja a hálózat többi elemét.

A jelfeldolgozó processzor feladata a szenzoroktól érkező jelek feldolgozása, illetve a referenciajelet is felhasználva az ellenzaj számítása és kiadása a hangszórókra.

A rendszerben található PC feladata a részegységek vezérlése, megfigyelése, adatok mentése és elemzése.

Az elnyomandó zaj jellegét tekintve kísérleti mérésekhez gyakran használatosak különféle tipikus mérőjelek (szinusz-, háromszög-, négyszögjel, fehér vagy színes zaj), amelyeket az 1.3. ábrán látható módon jelgenerátorral állítunk elő, és hangszóró segítségével alakítjuk akusztikus zajjává. Természetesen hagyományos jelgenerátoron kívül akár a PC hangkártyája is alkalmas lehet a tesztelésre használandó zajok generálására.

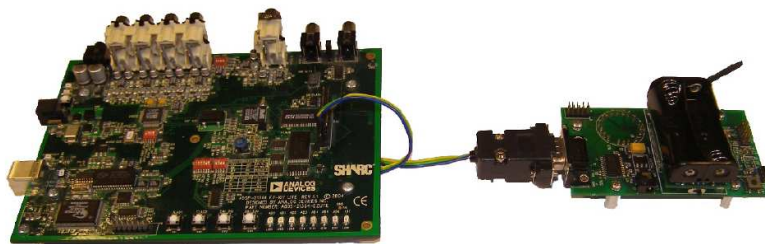
Az 1.4. ábrán egy kísérleti elrendezés látható. A felső ábrán kiemelve láthatóak a hangszórók, illetve a vezeték nélküli szenzorok, amelyek a zajt érzékelik. Az alsó ábrán a jelfeldolgozó kártya, illetve a hozzá kapcsolt bázisállomás látható.

Működés ismertetése

A rendszer idővezérelt működésű. Minden egység (a motók és a DSP) ütemezése periodikus. Az ütemezés saját időzítók által biztosított periódusidővel történik.



(a) Mikrofonok és hangszórók elhelyezése.



(b) Jelfeldolgozó kártya és bázisállomás.

1.4. ábra. Tesztkörnyezet építőelemei.

Az ütemezési időpontokat, a jelfeldolgozás hagyományos terminológiáját megtartva, a továbbiakban mintavételi időpontoknak nevezem, mert a jelfeldolgozáshoz kapcsolódó fontos feladatok végrehajtása ezekben az időpontokban kezdődik. Meg kell azonban jegyezni, hogy a rendszer elosztott volta miatt a hagyományos rendszerektől eltérően két szomszédos mintavételi időpont között nem zajlik le egy adott eszközön egy teljes jelfeldolgozási ciklus, tehát a jel mintavételezése, feldolgozása és ezáltal valamilyen végeredmény kiszámítása. A rendszer egyes részei egy-egy részfeladatot látnak el, például a szenzorok mintavételeznek, a DSP pedig feldolgozza az adatokat. Összefoglalva az egyes egységek feladatai a következők:

- szenzorok:
 - mintavételezés
 - amennyiben szükséges, a minták előfeldolgozása
 - adatok bufferelése
 - adatok továbbítása a rádión
 - működés szinkronizálása a többi egységhez
- bázisállomás:
 - adatok fogadása rádión keresztül a mótóktól

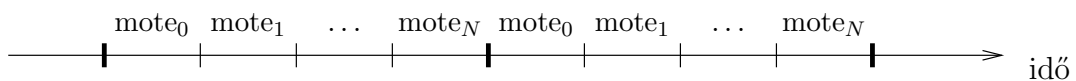
- adatok továbbítása a DSP felé
- működés szinkronizálása a többi egységhez
- DSP:
 - adatok fogadása a bázisállomástól
 - jelfeldolgozási algoritmusok végrehajtása
 - működés szinkronizálása a többi egységhez

A felsorolásban szereplő szinkronizációról a 3. fejezetben lesz részletesen szó.

A hálózat csillagtopológiájú, minden szenzor közvetlen kapcsolatban van a bázisállomással. A determinisztikusság biztosítása érdekében a hálózat működése időosztásos (TDMA: Time Domain Multiple Access), ami azt jelenti, hogy a hálózat ciklikus működésű, és minden ciklusban minden mót egy saját időszeletet kap az adatok továbbítására az 1.5. ábrán látható módon. Mivel a TDMA jellegű közeg-hozzáférés determinisztikus, így alkalmazása kedvező a valós idejű rendszerekben [49, 56]. Szakirodalmi hivatkozások alapján a véletlenszerű közeg-hozzáférési eljárások használata kevésbé ajánlott [56].

Az üzenetek sikeres átvitelére vonatkozóan a bázisállomás nem küld visszaigazolást, tehát a csomagvesztést nem korrigáljuk. Valós idejű rendszerek esetén ez elterjedt megoldás [22, 27, 41, 57], amelynek okai a következők:

- Determinisztikus adatátvitelt kell biztosítani.
- Az elveszített csomagok újraküldése az adatátviteli idő ingadozását okozhatja, és a sáv szélességben is megfelelő tartalékot kellene hagyni az elveszített csomagok újraküldésére.
- Amennyiben a hálózat alapvetően működőképes, akkor az adatvesztés általában ritkán bekövetkező, véletlenszerű esemény, amelyet a legtöbb rendszer tolerál bizonyos mértékben [5].



1.5. ábra. Hálózat ütemezési diagramja.

Tervezési irányelvek

A rendszer méretezésével kapcsolatos egyik legfontosabb paraméter az elnyomandó zaj sáv szélessége. A rendszer tervezésekor reálisnak tűnő tartomány a körülbelül 1 kHz-es sáv szélesség volt. A mótók mintavételi frekvenciája ennek megfelelően $f_{sm} = 1.8$ kHz, a DSP mintavételi frekvenciája $f_s = 2$ kHz. A mintavételi frekvenciákban lévő különbség a hardveres paramétereknek, valamint a mótók számítási kapacitásának eredménye, ugyanis bizonyos feladatok esetén ez a mintavételi frekvencia eredményezett biztonságos működést, a DSP mintavételi frekvenciája pedig csak kis felbontással hangolható.

A mintavételi frekvencia tervezésekor a legfontosabb korlátozó tényező a hálózat adatátviteli sebessége, amely 250 kbps [58]. Figyelembe véve, hogy a sávszélesség a szoftveres és kommunikációs overheadek (szinkronizációs fejléc, lábléc, CRC, közeghozzáférés), hardver kezelése stb. miatt nem használható ki teljesen, így a kihasználtság 50% környékén, illetve alatta található [59]. Mindezen paramétereket figyelembe véve gyakorlatban körülbelül három-négy szenzor adatai továbbíthatók megbízhatóan. Nagyobb méretű rendszer kialakításához a hagyományos, egyszerűen a minták továbbításán alapuló módszer nem megfelelő. A későbbi fejezetekben több megoldás is található a sávszélesség-korlátozás áthidalására, enyhítésére.

A szenzorok által küldött adatok lehetnek nyers, mintavételezett értékek, valamint előfeldolgozás eredményeként adódó transzformált értékek (részletesebben lásd később). A szenzorok 25 byte hasznos adatot tartalmazó csomagokon keresztül kommunikálnak. A csomag méretének megválasztása során törekedtem a kommunikációs overheadek arányának csökkentésére a csatorna kapacitásának minél jobb hatáskorral való kihasználása érdekében, emiatt a mótok programozására használt TinyOS nevű operációs rendszer által megengedett legnagyobb csomagméretet alkalmaztam, amely 29 byte; ebből négy bájt a jelfeldolgozás szempontjából másodlagos vezérlőinformációk tárolására szolgál. Amennyiben egy csomag a szenzorok által gyűjtött nyers mintákat tartalmazza, abban az esetben a bázisállomás feladata, hogy a csomagokban található, blokkosan érkező adatokat egyenként, a mintavételezés ütemében továbbítsa a DSP felé. A szenzorok által küldött hangminták felbontása 8 bit.

1.3.2. Aktív zajcsökkentés mint tesztalkalmazás

A bemutatott rendszer kutatásaim során elsődlegesen nem az aktív zajcsökkentés mint akusztikai feladat megoldásában játszik szerepet. A tesztkörnyezet alapvető célja a szenzorhálózaton keresztül visszacsatolt valós idejű jelfeldolgozó rendszerek terén egy kutatási platform megvalósítása, amelynek feladatai következőképpen foglalkozhatók össze [1]:

- problémák feltárása, vizsgálata, szemléltetése,
- hálózat hatásának vizsgálata a jelfeldolgozási algoritmusokra,
- megoldások tesztelése.

A szakirodalomban találkozhatunk számos, valamilyen gyakorlati alkalmazás köré épített tesztkörnyezettel, amelyek hasonló célkitűzéseket valósítanak meg [60, 61].

A következőkben az aktív zajcsökkentés tesztalkalmazásként való felhasználásának előnyös tulajdonságait mutatom be részletesen.

A rendszer egyik legfontosabb tulajdonsága, hogy a visszacsatolás egy akusztikus rendszeren keresztül történik. Egy ilyen akusztikus rendszer mindenhol jelen van, tehát a fizikai csatolás kialakítása nem igényel külön munkálatokat, bárhol létrehozható. A beavatkozók és érzékelők, tehát a hangszórók és mikrofonok is könnyen beszerezhető termékek. A szenzorok és beavatkozók közötti csatolás az akusztikai rendszerek természeténél fogva jön létre, tehát a rendszer a szakasz szempontjából

könnyen skálázható: egy-egy újabb szenzor vagy beavatkozó hozzáadásakor vagy elvételekor nem kell a közöttük lévő fizikai rendszert kialakítani vagy felszámolni.

A zajcsökkentő rendszerek alapvetően többkimenetű-több-bemenetű (MIMO) rendszerek, a szükséges algoritmusok jól kiforrottak. A teljes rendszerben jelen lévő csatolások miatt az egész szenzorhálózat egy összefüggő, csatolt rendszerként tekinthető, amely általában jobban próbára teszi a szenzorhálózat és az algoritmusok képességeit, mintha az egyes szenzorok és beavatkozók külön-külön független párokat képeznének. Az akusztikus rendszerek sokszor bonyolult, nagy dinamikájú átviteli függvénnyel jellemezhetők, amelyek az algoritmusok szempontjából jelentenek kihívást.

Az aktív zajcsökkentés visszacsatolt rendszerként és a relatíve nagy sáv szélességű jelekből eredően a valós idejű működés szempontjából igényes alkalmazás. Az akusztikai rendszerek és általában az akusztikus jelek érzékelése a jelek sáv szélessége miatt feszegeti a szenzorhálózatok teljesítőképességének a határát, így a módszerek tesztelhetők szélsőséges feltételek mellett.

Az aktív zajcsökkentés nem biztonságkritikus alkalmazás, így a hálózat bizonytalansága miatt esetlegesen bekövetkező instabilitás nem jár súlyos következményekkel.

A rendszer alkalmas mind kutatási, mind oktatási feladatok ellátására. Az alkalmazáshoz kapcsolódóan számos publikáció jelent meg [1, 2, 3, 4, 6], valamint az elosztott valós idejű rendszerek gyakorlati oktatásában is szerepet kap egy-egy részfeladat vizsgálatán keresztül [62, 63].

2. fejezet

Felhasznált algoritmusok áttekintése

Ebben a fejezetben kétféle algoritmuscsalád áttekintésére kerül sor, nevezetesen:

- rezonátor alapú algoritmusok,
- LMS alapú algoritmusok.

A dolgozat további fejezeteiben ezen algoritmusok tulajdonságait vizsgálom hálózati adattovábbítás esetén, illetve ezen algoritmusok továbbfejlesztésére teszek javaslatokat az adatgyűjtő hálózat miatt fellépő problémák enyhítésére.

Először a rezonátor alapú, aztán az LMS alapú struktúrákat ismertetem. A két algoritmuscsalád esetén először az alapstruktúrát mutatom be, amelyek alapvetően jelanalízisre kifejlesztett eljárások. Ezt követi a dinamikusan visszacsatolt struktúrák ismertetése, amelyek fizikai rendszerekben fellépő zavarok kompenzálására szolgáló szabályozási körnek tekinthetők.

A két algoritmuscsalád közös tulajdonsága, hogy mindkettő úgynevezett jelmodell alapú megközelítést alkalmaz. Ez azt jelenti, hogy a potenciálisan előforduló jelekre felállítunk egy ún. jelmodellt, és az algoritmus struktúráját ennek megfelelően alakítjuk ki. A rezonátor alapú algoritmusok periodikus jelmodellt alkalmaznak és alapvetően frekvenciatartománybeli felfogást képviselnek, míg az LMS alapú eljárásokhoz időtartománybeli jelreprezentáció köthető, ahol a jelmodell tetszőleges, akár sztochasztikus jel transzverzális szűrővel történő szűrésével áll elő.

Dinamikusan visszacsatolt rendszerek esetén megkülönböztetünk egycsatornás (egybemenetű–egykimenetű, SISO), valamint többcsatornás (több-bemenetű–többkimenetű, MIMO) rendszereket. A MIMO rendszerek a SISO rendszerekből általában szemléletesen származtathatók. Dolgozatomban analízis szintjén az egycsatornás rendszerekkel foglalkozom részletesen, emiatt a SISO algoritmusok ismertetése nagyobb hangsúlyt kap.

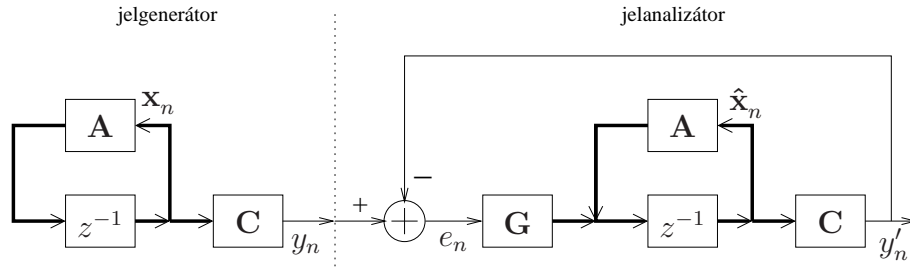
2.1. Rezonátor alapú megfigyelő

2.1.1. Jelmodell alapú spektrális megfigyelő

A rezonátor alapú megfigyelő periodikus jelek feldolgozására kínál hatékony megoldást. Maga a rezonátor alapú struktúra egy jóval általánosabb, különböző transzformációk rekurzív megvalósítására szolgáló eljárás egy speciális eseteként tekinthető

[12, 13]. Mivel a dolgozatban periodikus jelek feldolgozása áll a középpontban, így a periodikus jelmodellt tárgyalom részletesen.

A rekurzív transzformációk megvalósítása a megfigyelőelméletre épít. Alapkonceptiója az, hogy amennyiben egy jelet mint egy lineáris rendszer kimenetét tekintjük, a jel mérendő paraméterei pedig felírhatók a rendszer állapotváltozóiként, akkor ezen paraméterek mérhetők egy megfelelően megtervezett állapotmegfigyelővel [13, 64, 65]. A jelgenerátorként szolgáló rendszert koncepcionális jelmodellnek nevezük [13]. A jelmodell és jelanalizátor pár blokkdiagramja a 2.1. ábrán látható. Az ábrán y_n jelöli az analizálandó jelet, amelynek paramétereit \mathbf{x}_n vektor tartalmazza. A jelmodellt az \mathbf{A} és \mathbf{C} mátrixok reprezentálják. A megfigyelőt a \mathbf{G} -vel jelölt, úgynevezett becsatoló mátrix jellemezi. Az y'_n jel a mért jel becsült értéke, míg e_n a valódi és becsült jel különbsége. A becsült állapotvektort, másszóval a becsült jelparamétereket $\hat{\mathbf{x}}_n$ jelöli.



2.1. ábra. Jelmodell alapú jelgenerátor és jelanalizátor struktúra.

A jelmodell állapotegyenlete a következő alakú:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n, \quad (2.1)$$

$$y_n = \mathbf{C}\mathbf{x}_n, \quad (2.2)$$

míg a megfigyelő egyenletei:

$$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_n + \mathbf{G}e_n, \quad (2.3)$$

$$e_n = y_n - y'_n, \quad (2.4)$$

$$y'_n = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_n. \quad (2.5)$$

Legyen $\tilde{\mathbf{x}}_n$ a valódi és becsült paraméterek különbsége (paraméterhiba):

$$\tilde{\mathbf{x}}_n = \hat{\mathbf{x}}_n - \mathbf{x}_n. \quad (2.6)$$

A paraméterhibára vonatkozó állapotegyenlet megkapható a (2.3) egyenletből kivonva (2.1)-et, és behelyettesítve a többi változót [13]:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{n+1} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_n + \mathbf{G}(y_n - y'_n) - \mathbf{A}\mathbf{x}_n \quad (2.7)$$

$$= (\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}}_n = \mathbf{F}\tilde{\mathbf{x}}_n. \quad (2.8)$$

A hibajel pedig (2.2) és (2.5) egyenletek (2.4) egyenletbe való behelyettesítésével és (2.6) alkalmazásával:

$$e_n = \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}_n. \quad (2.9)$$

A megfigyelő tervezése \mathbf{G} oly módon történő megválasztását jelenti, hogy a megfigyelő $\mathbf{F} = (\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C})$ állapotátmeneti mátrixa biztosítsa $\tilde{\mathbf{x}}_n$ gyors lecsengését. A beállítás gyorsaságát \mathbf{F} sajátértékeivel lehet jellemezni. Leggyorsabb beállást az eredményezni, ha \mathbf{F} nilpotens, tehát minden sajátértéke nulla. Ekkor a rendszer véges beállású (FIR), és legfeljebb az állapotváltozók számával megegyező ütem alatt beáll. A FIR beállítás hátránya, hogy jelentős tranziensek lehetnek a beállítás során, valamint zajérzékenység szempontjából sem kedvező. Gyakorlatban emiatt általában hosszabb lecsengési időt állítunk be.

A következőkben a jelmodellt, aztán a hozzá tartozó megfigyelőt mutatom be.

Jelmodell bemutatása

A jelmodell megadásakor kétféle felírási módot alkalmazunk:

- 1) a koncepcionális jelmodell egy időinvariáns egyenletekkel leírható rendszer, amelynek állapotváltozói időben változnak,
- 2) a koncepcionális jelmodell egy idővariáns egyenletekkel leírható rendszer, amelynek állapotváltozói időben nem változnak.

Mindkét megközelítésnek van létjogosultsága, a megoldandó probléma jellegétől függ, hogy amelyiket érdemes használni. A dolgozatban mindkét formát alkalmazom.

A jelmodell kiindulási pontjaként a következő felírás szolgál:

$$y_n = \sum_{i=0}^{N-1} A_i e^{j\varphi_i} \cdot c_{i,n}, \quad (2.10)$$

ahol

$$c_{i,n} = e^{j2\pi f_i n}, \quad i = 0 \dots N - 1, \quad (2.11)$$

a komplex exponenciális bázisfüggvényeket jelöli. A felírásban A_i és φ_i jelölik az i -edik komponens amplitúdóját és fázisát, tehát $A_i e^{j\varphi_i}$ a komplex Fourier-együttható. f_i az i -edik komponens frekvenciáját jelöli a mintavételi frekvenciához viszonyítva. A mintavételi frekvenciának $f = 1$ felel meg, N a komponensek számát jelöli. A változók indexelését tekintve a [12, 13] művekben alkalmazott jelölést követem.

A dolgozatban valós értékű, periodikus jelekkel foglalkozom. Az ilyen jelek előállításához a komponenseknek felharmonikus pozícióban kell lenni, és a $\pm f_i$ frekvenciákon található Fourier-együtthatóknak komplex konjugált párt kell alkotni. Jelölje P a komplex konjugált harmonikus párok számát, amely a valós értékű szinuszos komponensek számával egyenlő. Legyen továbbá f_1 az alapharmonikus frekvencia. A komponensek frekvenciájára vonatkozó megkötést a következő frekvenciabeállítás teljesíti:

$$f_i = \begin{cases} i f_1, & \text{ha } i = 0 \dots P \\ (i - N) f_1, & \text{ha } i = P + 1 \dots N - 1 \end{cases}, \quad (2.12)$$

A hozzárendelés eredményeként $\{f_i = -f_{N-i}; i = 1 \dots P\}$ adódik. A P maximális értékét a mintavételi tételnek megfelelően a következő feltétel adja meg:

$$P f_1 < 0.5 \leq (P + 1) f_1. \quad (2.13)$$

A periodikus jel összes komponenseinek a száma (beleértve a DC komponenst is):

$$N = \begin{cases} 2P + 1, & \text{általában} \\ 2P + 2, & \text{ha } (P + 1)f_1 = 0.5 \end{cases} \quad (2.14)$$

A (2.14) egyenletben egy speciális eset, amikor az alapharmonikus frekvenciájára $(P + 1)f_1 = 0.5$ teljesül. Ekkor a mintavételi frekvencia az alapharmonikus frekvenciájának páros számú többszöröse, így a mintavételi frekvencia felénél, az úgynevezett Nyquist-frekvencián is található komponens $i = \frac{N}{2}$ indexszel.

A $c_{i,n}$ függvényhez kapcsolódóan definiáljuk a következő változókat:

$$z_i = e^{j2\pi f_i} = \frac{c_{i,n+1}}{c_{i,n}}, \quad i = 0 \dots N - 1, \quad (2.15)$$

$$\langle z_i \rangle = \text{diag}(\dots z_i \dots) \in \mathbb{C}^{N \times N}, \quad (2.16)$$

$$\mathbf{z} = [z_i]^T \in \mathbb{C}^{N \times 1}. \quad (2.17)$$

A z_i változók az egységsugarú körön elhelyezkedő komplex számok. Azt adják meg, hogy az i -edik harmonikushoz tartozó komplex exponenciális bázisfüggvények mennyit fordulnak el két mintavételi ütem között. A z_i komplex szám szögét a hozzá tartozó frekvencia határozza meg. A $\langle z_i \rangle$ mátrix egy diagonálmátrix, amelynek diagonális elemeit z_i értékek alkotják, a \mathbf{z} pedig szintén z_i értékekből alkotott vektor.

Az eddigi eredmények alapján felírható a periodikus jelek kétféle koncepcionális jelmodellje a (2.1) és (2.2) egyenleteknek megfelelő kanonikus alakban. A két jelmodell az állapotváltozók definíciójában különbözik egymástól. Az időinvariáns rendszert eredményező esetben az \mathbf{x}_n állapotvektor $x_{i,n}$ elemeit az egyes harmonikus komponensek, tehát az $(A_i e^{j\varphi_i} \cdot c_{i,n})$ tagok, míg az idővariáns hálózatot eredményező esetben az állapotváltozók a Fourier-együtthatók, tehát az $(A_i e^{j\varphi_i})$ értékek alkotják. Felhasználva, hogy a szumma operátor felírható vektorszorzás eredményeként, a (2.10) által leírt jelmodellre a következő állapotegyenletek adódnak:

időinvariáns modell		idővariáns modell	
$\mathbf{x}_{n+1} = \langle z_i \rangle \mathbf{x}_n,$	(2.18)	$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n,$	(2.22)
$y_n = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_n,$	(2.19)	$y_n = \mathbf{c}_n^T \mathbf{x}_n,$	(2.23)
$\mathbf{x}_n = [x_{i,n}]^T = [A_i e^{j\varphi_i} \cdot c_{i,n}]^T \in \mathbb{C}^{N \times 1},$	(2.20)	$\mathbf{x}_n = [x_{i,n}]^T = [A_i e^{j\varphi_i}]^T \in \mathbb{C}^{N \times 1},$	(2.24)
$\mathbf{c} = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T \in \mathbb{R}^{N \times 1},$	(2.21)	$\mathbf{c}_n = [c_{i,n}]^T \in \mathbb{C}^{N \times 1},$	(2.25)

A $\mathbb{R}^{l \times k}$ és $\mathbb{C}^{l \times k}$ jelölések rendre az $l \times k$ dimenziós valós és képzetes számhalmazokat jelentik.

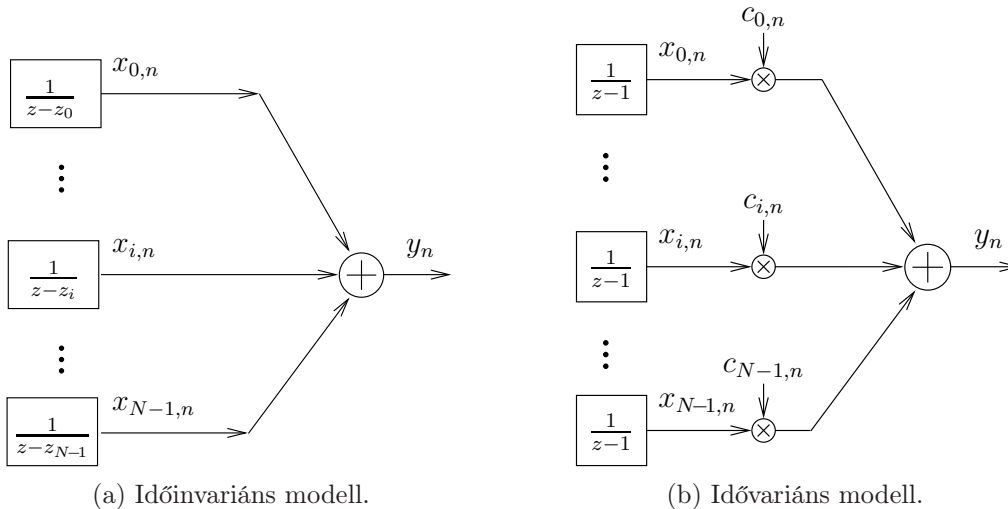
Az időinvariáns modellben a (2.18) egyenlet szerinti állapot-átmeneti mátrix „forgatja” az egyes komplex exponenciális komponenseket (2.15)-öt felhasználva, és aztán

ezek a komponensek összegződnek (2.19) alapján a csupa egyeseket tartalmazó \mathbf{c}^T -vel történő szorzás során. Az idővariáns modellben a Fourier-együtthatók változatlanok (2.22) miatt, és a bázisfüggvényekkel való súlyozást (2.23) alapján a bázisfüggvények aktuális értékeit tartalmazó \mathbf{c}_n^T -el való szorzás valósítja meg.

Fontos megjegyezni, hogy az idővariáns leírás a jelmodell állapotegyenleteire vonatkozik, nem pedig a jel paramétereire (pl. Fourier-együtthatók vagy frekvencia), amelyeket konstans értékűnek tekintünk. Az állapotegyenletek a (2.23) egyenletben található \mathbf{c}_n^T időfüggő kicsatolóvektor miatt válnak idővariánssá.

A jelölések egyszerűsítése érdekében a két modell állapotváltozóira általában nem alkalmazok megkülönböztető jelölést. A felírt állapotegyenletekben található időindexek hiánya vagy jelenléte, illetve az egyenletek formája alapján egyértelmű, hogy időinvariáns vagy idővariáns modelltől van szó. Amennyiben nem egyértelmű a megkülönböztetés, úgy vagy a szövegben utalok az adott modell használatára, vagy a felső indexben megjelenő LTI (Linear Time Invariant) és LTV (Linear Time Variant) elnevezések utalnak rendre az időinvariáns és idővariáns formára.

A két jelmodell blokkdiagramja a 2.2. ábrán látható. A két jelmodell a formai különbségektől eltekintve a kimenetre nézve ekvivalens, így analízis során bizonyos tulajdonságok elemzéséhez egyik vagy másik forma lehet alkalmas.



2.2. ábra. Konceptcionális jelmodell.

Az állapotváltozók kezdeti értéke mindkét modell esetén \mathbf{x}_0 . A kezdeti értéket az integrátorok bemenetére a nulladik ütemet megelőzően kapcsolt Dirac-delta segítségével állíthatjuk be.

A 2.2. ábrán látható módon az időinvariáns modellben a y_n jel az $\frac{1}{z-z_i}$ átviteli függvénnyel rendelkező rezonátorok kimenetének összegeként áll elő. A rezonátorok a z_i pólusoknak megfelelő frekvenciájú csillapítatlan komplex exponenciális jelet generálnak. Az idővariáns modell esetén a kezdeti értéküket tartó gerjesztetlen integrátorok konstans kimenetét modulálják a $c_{i,n}$ komplex exponenciális függvények.

Megfigyelő bemutatása

A következőkben, mellőzve a részletes levezetéseket, a kétféle jelmodellhez tartozó megfigyelőt ismertetem [12, 13] művek alapján. A megfigyelőre vonatkozóan elterjedt elnevezés a rezonátor alapú megfigyelő vagy Fourier-analizátor, illetve spektrális megfigyelő.

A koncepcionális jelmodellhez történő megfigyelő tervezésének egzakt módja, ha a \mathbf{g} becsatóló vektort a megfigyelő pólusainak meghatározását követően a következő módszerrel számítjuk [12, 13]:

időinvariáns modell	idővariáns modell
$\mathbf{g} = [g_i]^T \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ (2.26)	$\mathbf{g}_n = [g_{i,n}]^T \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ (2.28)
$g_i = z_i \frac{\prod_{k=0}^{N-1} (1 - p_k z_i^{-1})}{\prod_{k=0, k \neq i}^{N-1} (1 - z_k z_i^{-1})}$ (2.27)	$g_{i,n} = c_{i,n}^* \frac{\prod_{k=0}^{N-1} (1 - p_k z_i^{-1})}{\prod_{k=0, k \neq i}^{N-1} (1 - z_k z_i^{-1})}$ (2.29)

Az egyenletekben p_k a megfigyelő pólusait jelöli, amelyek megegyeznek a (2.8) egyenletben adott \mathbf{F} mátrix sajátértékeivel. $f_1 = \frac{1}{N}$ alapharmonikus frekvencia és $p_i = (1 - \alpha)^{1/N} \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}i}$ pólusválasztás esetén a (2.27) és (2.29) kifejezések kiértékelésével $g_i = \frac{\alpha}{N} z_i$ és $g_{i,n} = \frac{\alpha}{N} c_{i,n}^*$ adódik. A gyakorlatban ezen egyszerű formájú együtthatókat gyakran alkalmazzuk teljesen általános frekvencia esetén is közelítő megoldásként, amennyiben a (2.27) és (2.29) analitikusan egyszerű módon nem értékelhető ki, numerikus kiértékelése pedig számítási korlátokba ütközik, vagy nem praktikus. A dolgozatban alapvetően ezen egyszerűsített, heurisztikus megfigyelőtervezési módszert alkalmazom, amely a következő rendszeregyenleteket szolgáltatja:

időinvariáns modell	idővariáns modell
$y'_n = \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}_n$ (2.30)	$y'_n = \mathbf{c}_n^T \hat{\mathbf{x}}_n$ (2.35)
$e_n = y_n - y'_n$ (2.31)	$e_n = y_n - y'_n$ (2.36)
$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \langle z_i \rangle \hat{\mathbf{x}}_n + \mathbf{g} e_n$ (2.32)	$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \hat{\mathbf{x}}_n + \mathbf{g}_n e_n$ (2.37)
$\mathbf{g} = [g_i]^T \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ (2.33)	$\mathbf{g}_n = [g_{i,n}]^T \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ (2.38)
$g_i = \frac{\alpha}{N} z_i \leftrightarrow \mathbf{g} = \frac{\alpha}{N} \mathbf{z}$ (2.34)	$g_{i,n} = \frac{\alpha}{N} c_{i,n}^* \leftrightarrow \mathbf{g}_n = \frac{\alpha}{N} \mathbf{c}_n^*$ (2.39)

Látható, hogy a megfigyelő követi a rekurzív paraméterbecslők hagyományos struktúráját: a becsült $\hat{\mathbf{x}}_n$ paraméter alapján becslést ad az y_n jel aktuális értékére, majd a pillanatnyi e_n becslési hiba alapján frissíti $\hat{\mathbf{x}}_n$ értékét.

(2.8) alapján a paraméterhibára, (2.9) felhasználásával pedig a hibajelre vonatkoztatott egyenletek is felírhatók:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{n+1} = (\langle z_i \rangle - \mathbf{g}\mathbf{c}^T)\tilde{\mathbf{x}}_n \quad (2.40)$$

$$e_n = \mathbf{c}^T \tilde{\mathbf{x}}_n \quad (2.41)$$

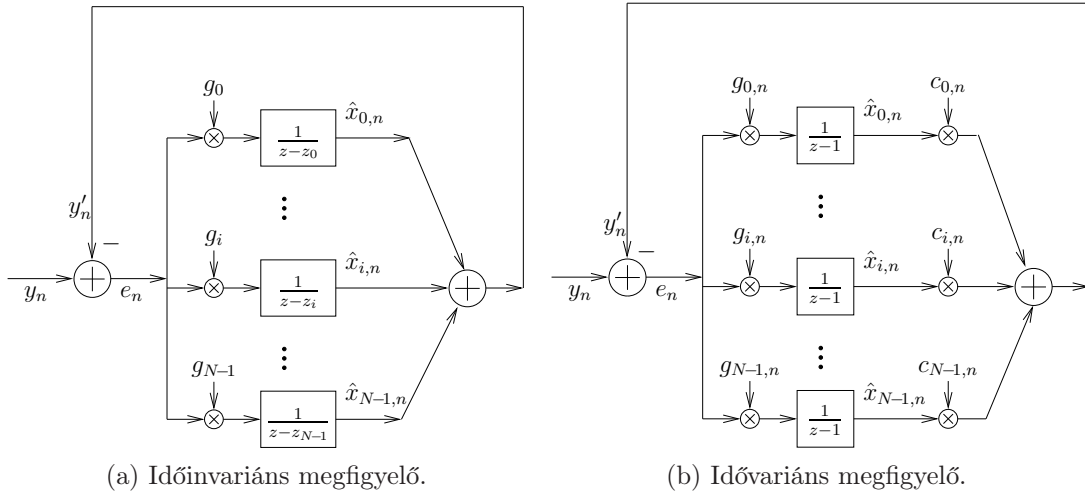
időinvariáns modell

$$\tilde{\mathbf{x}}_{n+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{g}_n \mathbf{c}_n^T)\tilde{\mathbf{x}}_n \quad (2.42)$$

$$e_n = \mathbf{c}_n^T \tilde{\mathbf{x}}_n \quad (2.43)$$

idővariáns modell

A megfigyelők blokkdiagramjai a 2.3. ábrán láthatók.



(a) Időinvariáns megfigyelő.

(b) Idővariáns megfigyelő.



(c) Rezonátorcsatornák

2.3. ábra. Rezonátor alapú spektrális megfigyelő.

Fontos, hogy a két megfigyelő csupán állapotváltozók definíciójában különbözik egymástól, így a ki- és bemenetre vonatkoztatott eredő átvitel megegyezik a két esetben. A kétféle megfigyelő algoritmus bemutatása azért szükséges, mert bizonyos esetekben egyik vagy másik forma alkalmazása kedvezőbb.

Az idővariáns és időinvariáns megfigyelő állapotváltozói között a következő egy-egy értelmű megfeleltetés áll fent:

$$\hat{\mathbf{x}}_n^{\text{LTI}} = \langle z_i \rangle^n \cdot \hat{\mathbf{x}}_n^{\text{LTV}}. \quad (2.44)$$

Az összefüggés az állapotváltozók (2.20) és (2.24) egyenletek által adott definíciójából következik (2.15) felhasználásával: $x_{i,n}^{\text{LTI}} = x_{i,n}^{\text{LTV}} c_{i,n} = x_{i,n}^{\text{LTV}} z_i^n$.

Hasonló megfontolások alapján:

$$\mathbf{c}_n = \langle z_i \rangle^n \mathbf{c}. \quad (2.45)$$

A 2.3(c). ábrán látható a kétféle modellhez tartozó egy-egy úgynevezett rezonátorcsatorna. A kétféle megvalósítás egymással egyenértékű átviteli függvényüket tekintve [12], amely az i -edik rezonátorcsatornára nézve [12, 66, 67]:

$$H_i(z) = g_i \frac{1}{z - z_i}. \quad (2.46)$$

A zárt hurokban működő rezonátorokra vonatkoztatott átvitel az y_n és $\hat{x}_{i,n}^{\text{LTI}}$ jelek között a 2.3(a). ábra alapján a blokkaritmetika általános szabályait használva [12, 66]:

$$T_i(z) = \frac{\hat{X}_i(z)}{Y(z)} = \frac{H_i(z)}{1 + \sum_{k=0}^{N-1} H_k(z)}, \quad (2.47)$$

a hibajelre vonatkoztatott, tehát y_n és e_n jelek közötti átvitel pedig:

$$R(z) = \frac{E(z)}{Y(z)} = \frac{1}{1 + \sum_{k=0}^{N-1} H_k(z)}. \quad (2.48)$$

A rezonátorok fontos tulajdonsága, hogy a z_i pólus miatt az i -edik, f_i frekvencián:

$$\lim_{f \rightarrow f_i} H_i(e^{j2\pi f}) \rightarrow \infty. \quad (2.49)$$

Ezen egyenletből következik, hogy:

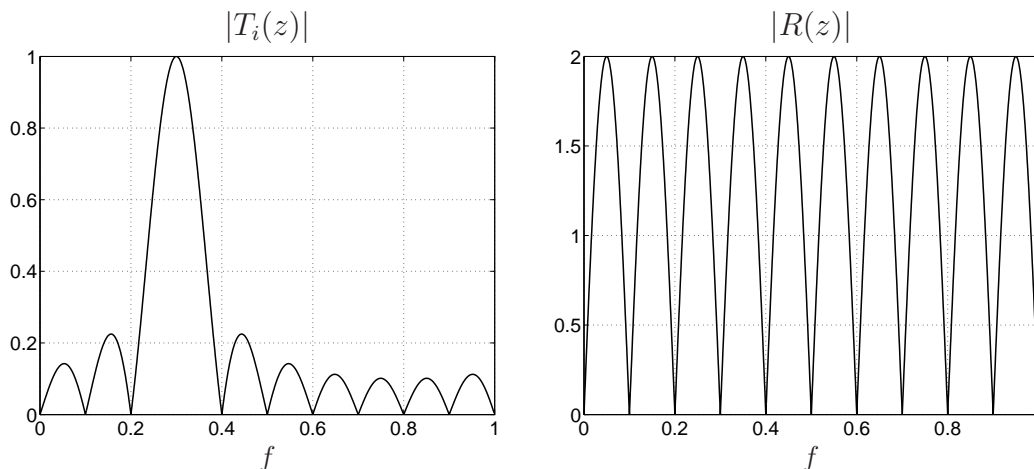
$$\lim_{f \rightarrow f_i} T_i(e^{j2\pi f}) = 1. \quad (2.50)$$

$$\lim_{\substack{f \rightarrow f_k \\ k \neq i}} T_i(e^{j2\pi f}) = 0. \quad (2.51)$$

$$\lim_{f \rightarrow f_i} R(e^{j2\pi f}) = 0. \quad (2.52)$$

Az egyenletek eredményeit a 2.4. ábra szemlélteti. A fenti egyenletekből az alábbi fontos tulajdonságok következnek:

- Az egyes rezonátorcsatornák tekinthetők az i -edik komponens frekvenciájának megfelelő sávközépi frekvenciájú sávszűrőkként, ahogyan a 2.4(a). ábrán látható.
- A rezonátorfrekvenciákon elhelyezkedő jelekre a hozzá tartozó rezonátorcsatorna átvitele egységnyi, tehát a megfigyelő ezen komponenseket amplitúdótorzítás nélkül elő tudja állítani a jelből; lásd (2.50) és a 2.4(a). ábrán $f = 0.3$.
- Egy adott rezonátorcsatorna kimenetét a többi rezonátorcsatorna frekvenciájára eső jel nem befolyásolja, tehát a jel egyes komponensei teljesen függetlenül kezelhetők; lásd (2.51) és a 2.4(a). ábrán minden $f = \{i \cdot 0.1; i \neq 3\}$ frekvenciáérték.
- A hibajelre vonatkoztatott átvitel minden rezonanciafrekvencián nulla, tehát a rezonátorfrekvenciákra eső komponenseket a megfigyelő hiba nélkül elő tudja állítani: (2.52).



(a) Rezonátor kimenetére vonatkoztatott átvitel.

(b) Hibajelre vonatkoztatott átvitel.

2.4. ábra. Spektrális megfigyelő jellemző átviteli függvényei. Paraméterek: $N = 10$, $f_1 = 1/N$, $i = 3$.

A megfigyelő működése a 2.3(b). ábrán látható idővariáns leírás segítségével is szemléletesen magyarázható. Az egyes csatornák be- és kimenetén megtalálható $c_{i,n}^*$ és $c_{i,n}$ komplex exponenciális jellel való szorzás az i -edik rezonátorfrekvenciának megfelelő demodulációként és modulációként fogható fel. A rezonátorcsatornában található $\frac{1}{z-1}$ integrátor bemenetére így az „alapsávi” hibajel kerül. Az integrátor kimenetének alapsávi, konstans Fourier-együtthatót kell követni. Az integrátor DC erősítése végtelen, így a negatív visszacsatolás miatt a követés hibája nulla. Az integrátor kimenetén az adott rezonátorcsatornának megfelelő $A_i e^{j\varphi_i}$ értékű Fourier-együttható jelenik meg, amelyet $c_{i,n}$ -nel megszorozva visszaállítjuk az i -edik jelkomponenst.

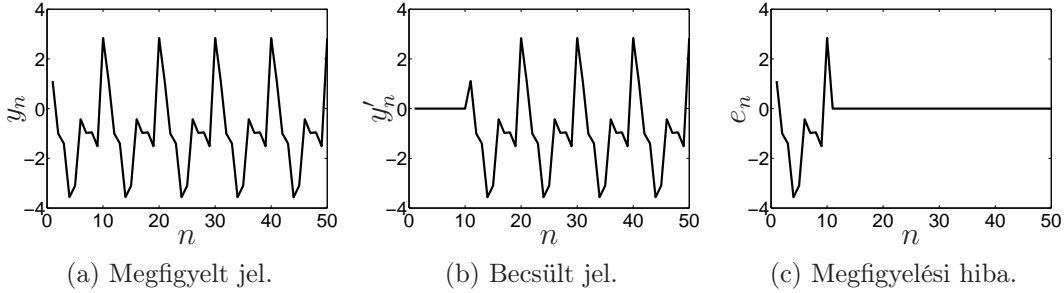
A következőkben a rezonátorfrekvenciák, illetve α értékének megfelelően néhány speciális esetet tárgyalok. Azt a kitüntetett esetet, amikor $f_1 = \frac{1}{N}$, a továbbiakban *egyenletes rezonátorelhelyezkedésnek* nevezem.

Egyenletes rezonátorelhelyezkedés, véges beállítás : $f_1 = \frac{1}{N}$, $\alpha = 1$

A mintavételi frekvencia a jel frekvenciájának egész számú többszöröse, így a rezonátorfrekvenciák ekvidisztáns módon vannak elosztva 0 Hz és a mintavételi frekvencia között. A megfigyelő ebben az esetben véges beállású, ami azt jelenti, hogy legfeljebb N ütem alatt nullává válik az $\tilde{\mathbf{x}}_n$ paraméterhiba [12, 13]. A \mathbf{c}_n és \mathbf{g}_n vektorok N mintánként periodikusak, és ortogonális bázis - reciprok bázis párt alkotnak [13]. Az ortogonalitás miatt a $\{\mathbf{c}_l; l = 0 \dots N - 1\}$ és $\{\mathbf{c}_q; q = 0 \dots N - 1\}$ vektorokra igaz, hogy:

$$\mathbf{c}_l^H \mathbf{c}_q = (\mathbf{c}_l^T \mathbf{c}_q^*)^* = \sum_{i=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(q-l)i} = \begin{cases} N, & \text{ha } q = l \\ 0, & \text{ha } q \neq l \end{cases} \quad (2.53)$$

Ahol $(\cdot)^H$ a transzponált konjugált operátort jelöli.



2.5. ábra. Spektrális megfigyelő jellemző időfüggvényei egyenletes rezonátorelhelyezkedés és véges beállítás esetén. Paraméterek: $N = 10$, $f_1 = 1/N$, $\alpha = 1$, $i = 3$.

Felhasználva ezt a tulajdonságot, az idővariáns forma (2.42) által adott állapotátmeneti mátrixára $\alpha = 1$ esetre felírható, hogy:

$$(\mathbf{I} - \frac{1}{N} \mathbf{c}_n \mathbf{c}_n^T) \cdot (\beta \mathbf{c}_q^*) = \begin{cases} 0 \mathbf{c}_q^*, & \text{ha } q = (n \bmod N) \\ \beta \mathbf{c}_q^*, & \text{ha } q \neq (n \bmod N) \end{cases}, \quad (2.54)$$

ahol β tetszőleges skalár, \bmod pedig a moduló operátort jelöli.

(2.54) alapján belátható, hogy a megfigyelő ortogonális projekciók sorozatát végzi el, és minden transzformációt követően a paraméterhibát egy-egy bázisvektor mentén nulla értékűvé transzformálja [12].

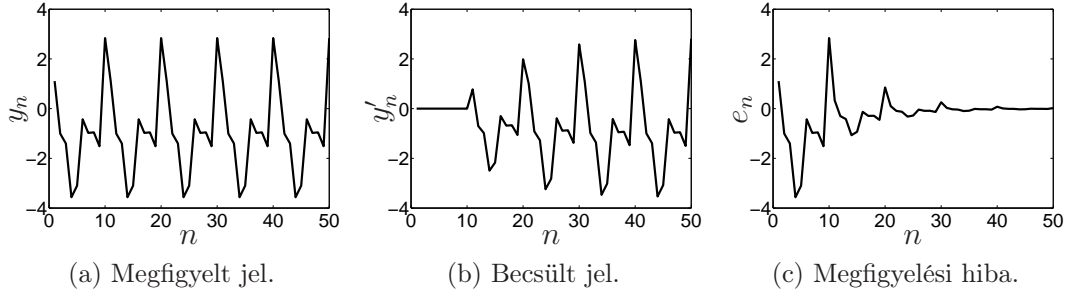
A megfigyelő működésének első N üteme tehát felfogható egyfajta „tanulási” fázisnak, amikor a paraméterhiba N darab ortogonális koordináta mentén nullává válik. A megfigyelő által adott y'_n becslés ebben a szakaszban folyamatosan nulla. Legfeljebb N ütemet követően a paraméterhiba nullává válik, tehát folyamatosan követni tudja a becsült jel a mért jelet ($y'_n = y_n$), és a hibajel folyamatosan nulla. Ezt a tanulási-követési folyamatot szemlélteti a 2.5. ábra.

Egyenletes rezonátorelhelyezkedés, exponenciális beállítás : $f_1 = \frac{1}{N}$, $0 < \alpha < 1$

A rezonátorfrekvenciákra vonatkozó megállapítások megegyeznek az előző pontban leírtakkal. A megfigyelőben alkalmazott \mathbf{c}_n és \mathbf{g}_n vektorok továbbra is ortogonálisak, tehát a (2.53) egyenletben adott összefüggés érvényes. Az α paraméter változása miatt viszont (2.54) nem teljesül. Ebben az esetben az látható be, hogy

$$\tilde{\mathbf{x}}_{n+N} = (1 - \alpha) \tilde{\mathbf{x}}_n, \quad (2.55)$$

tehát a beállítás ebben az esetben nem zajlik le véges lépésben, hanem a rendszer végtelen impulzusválaszú (IIR: Infinite Impulse Response), és a hibajel a 2.6. ábrán szemléltetett exponenciális módon áll be.



2.6. ábra. Spektrális megfigyelő jellemző időfüggvényei egyenletes rezonátorelhelyezkedés és exponenciális beállítás esetén. Paraméterek: $N = 10$, $f_1 = 1/N$, $\alpha = 0.7$, $i = 3$.

Tetszőleges alapharmonikus frekvencia, exponenciális beállítás : f_1 tetszőleges, $0 < \alpha < 1$

Ebben az esetben a \mathbf{c}_n és \mathbf{g}_n vektorok ortogonalitására vonatkozó megállapítások nem érvényesek. A megfigyelő végtelen impulzusválaszú. Továbbra is érvényes azonban, hogy gyors beállítás biztosítható, amennyiben $\alpha = 1$, és P értékét a (2.13) által megengedett legnagyobb értékre választjuk. Ebben az esetben a megfigyelő rezonátorpozíciói jól közelítik az egyenletes rezonátorelhelyezkedést. Különösen igaz ez akkor, ha N megfelelően nagy értékű [68].

Összességében a megfigyelő hangolására szolgáló két fő paraméter α és P . P maximális értékét (2.13) szabja meg. Ennél alacsonyabb érték beállítása akkor indokolt, ha tudjuk, hogy a mért jel a (2.13) egyenlet által megengedettnél kevesebb komponenst tartalmaz, vagy számítási korlátokba ütközünk. Az α paraméter a beállási gyorsaság és mérés varianciájának beállítására szolgál. Egyhez közeli értékű α esetén a beállítás gyors, viszont zajos jel esetén a mérés varianciája nagy lehet. α beállítása ennek megfelelően kompromisszumok eredménye, amelyre vonatkozóan a [67] irodalomban találhatóak ajánlások.

Megfigyelő zajos mérés esetén

Amennyiben y_n jelet additív mérési zaj terheli, a megfigyelő (2.30)–(2.43) állapotegyenletei egyszerű módon kiegészíthetők az n_n -nel jelölt zajjal az alábbi formában:

időinvariáns modell	idővariáns modell
$y'_n = \mathbf{c}_n^T \hat{\mathbf{x}}_n$ (2.56)	$y'_n = \mathbf{c}_n^T \hat{\mathbf{x}}_n$ (2.59)
$e_n = y_n - y'_n + n_n$ (2.57)	$e_n = y_n - y'_n + n_n$ (2.60)
$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \langle z_i \rangle \hat{\mathbf{x}}_n + \mathbf{g}_n e_n$ (2.58)	$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \hat{\mathbf{x}}_n + \mathbf{g}_n e_n$ (2.61)

Míg a paraméterhibára és a hibajel pillanatértékére vonatkozó összefüggések:

időinvariáns modell	idővariáns modell
$\tilde{\mathbf{x}}_{n+1} = (\langle z_i \rangle - \mathbf{g}\mathbf{c}^T)\tilde{\mathbf{x}}_n + \mathbf{g}n_n$ (2.62)	$\tilde{\mathbf{x}}_{n+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{g}_n\mathbf{c}_n^T)\tilde{\mathbf{x}}_n + \mathbf{g}_nn_n$ (2.64)
$e_n = \mathbf{c}^T\tilde{\mathbf{x}}_n + n_n$ (2.63)	$e_n = \mathbf{c}_n^T\tilde{\mathbf{x}}_n + n_n$ (2.65)

A fenti összefüggések az eredeti egyenletekben y_n helyett $(y_n + n_n)$ kifejezés alkalmazásával adódnak.

Kitekintés

A következőkben rövid áttekintés található a jelmodell alapú Fourier-transzformáció megvalósításának legfőbb alternatíváiról. Mivel a jelmodell a lineáris rendszerek általános állapotváltozós alakjával adott, így paramétereinek mérésére a rezonátor alapú megfigyelőn kívül bármilyen általános állapotmegfigyelő alkalmas; közismert módszert kínál a Luenberger-megfigyelő [69] és a Kálmán-szűrő [70].

A rezonátor alapú megfigyelő a Luenberger-féle megfigyelőtervezési eljárással ekvivalens: a megfigyelő sajátértékeit megadva a Luenberger-féle megfigyelő a (2.26)-(2.29) becsatolóvektorokat eredményezi [14]. A (2.30)-(2.39) által leírt heurisztikus eljárás tehát a Luenberger-megfigyelő közelítő megvalósításának tekinthető.

A Kálmán-szűrő segítségével tervezett spektrális megfigyelő optimális becslést ad abban az értelemben, hogy a paraméterbecslés hibájának kovarianciáját minimalizálja [71]. A [71] cikkben található a módszer részletes tervezési leírása és analízise. Jóllehet a módszer a zajparaméterek pontos ismeretében optimális becsatolóvektor számítását teszi lehetővé, a Kálmán-szűrő kanonikus formájában nem tervezhető gyakorlatban alkalmazható megfigyelő a (2.18)-(2.25) egyenletek által leírt jelmodellhez az állapotzaj hiányában [71]. Ennek megfelelően a jelmodell módosítása, vagy az algoritmus kis mértékű heurisztikus módosítása itt is szükséges lehet [71].

Habár a Kálmán-szűrővel szemben a rezonátor alapú megfigyelőnek a 2.3. ábrán bemutatott formájára általános esetben nem mutatható meg, hogy optimális lenne bármilyen szempontból, gyakorlati alkalmazása a megvalósítás szempontjából előnyös. Ennek oka, hogy a megfigyelő hangolásához kizárólag az α paraméter szükséges, amely explicit módon egyszerű szorzóként jelenik meg a \mathbf{g} becsatolóvektorban, így annak újratervezése (pl. frekvenciaadaptáció esetén, lásd 2.1.2. alfejezet) nem igényel jelentős számítási kapacitást. A mérés jel-zaj viszonya α függvényében pedig számítható [67], tehát a tervezés egzakt módon megoldható.

2.1.2. Adaptív Fourier-analízis (AFA)

A rezonátor alapú megfigyelő eddig tárgyalt formájában a jel frekvenciája mint ismert paraméter szerepel. Amennyiben a frekvencia értéke nem ismert, vagy pillanatnyi értéke időben változhat, abban az esetben a megfigyelő kiterjeszhető úgy, hogy képes legyen a frekvencia aktuális értékének mérésére. Az algoritmus *adaptive Fourier analyzer* (AFA) néven vált ismertté [68].

Az AFA alapötlete az, hogy amennyiben egy jel frekvenciája eltér az ismertnek vélt értékétől, akkor az alapharmonikusának Fourier-együtthatója egy, az eltérés mértékében forgó komplex vektor lesz. Ezt a jelenséget kihasználva az algoritmus az

alapharmonikus Fourier-együttható forgási sebességével arányosan módosítja az $f_{1,n}$ alapharmonikus frekvenciát, és ezáltal egyfajta integráló szabályozóként hangolja be a megfigyelő frekvenciáját.

Az algoritmus a következő lépésekből áll [68]. A változók kezdeti értékének beállítására:

$$\hat{\mathbf{x}}_n = 0, \quad (2.66)$$

$$f_{1,0} = \text{tetszőleges}, \quad (2.67)$$

$$\mathbf{c}_0 = [1, 1 \dots 1]. \quad (2.68)$$

Ezt követően a megfigyelő üzemeltetése $n = 0, 1, \dots$ pontokra:

Az aktuális frekvencia alapján a rezonátorok számának meghatározása:

$$P_n f_{1,n} < 0.5 \leq (P_n + 1) f_{1,n} \rightarrow N_n = 2P_n + 1. \quad (2.69)$$

A (2.35)–(2.39) alapján az állapotváltozók frissítése:

$$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \hat{\mathbf{x}}_n + \frac{1}{N_n} \mathbf{c}_n^* (y_n - \mathbf{c}_n^T \hat{\mathbf{x}}_n). \quad (2.70)$$

Az alapharmonikushoz tartozó $\hat{x}_{1,n}$ állapotváltozó elfordulása alapján módosítjuk a frekvenciát:

$$f_{1,n+1} = f_{1,n} + \frac{1}{2\pi N_n} \text{angle}(\hat{x}_{1,n+1} \hat{x}_{1,n}^*), \quad (2.71)$$

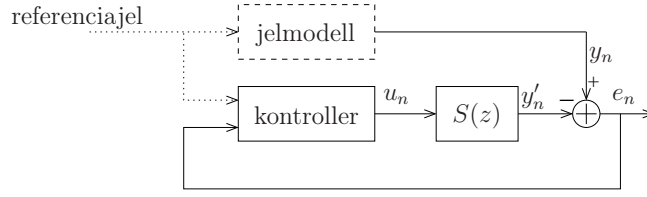
ahol az $\text{angle}(\cdot)$ operátor két komplex szám közötti szögeltérést adja meg. A bázisfüggvényeket tartalmazó \mathbf{c}_n vektort előállítására:

$$\mathbf{c}_{n+1} = [c_{i,n+1}]^T; \quad i = 0 \dots N_n - 1, \quad (2.72)$$

$$c_{i,n+1} = c_{i,n} e^{j2\pi f_{i,n+1}}. \quad (2.73)$$

A frekvenciaadaptáció miatt nemcsak paraméterhangolás, de a rezonátorcsatornák változó száma miatt struktúraváltozás is történhet; erre az időindexszel ellátott N_n utal. A (2.69) egyenlet alapján minden mintavételi ütemben úgy állítjuk a rezonátorok számát, hogy a mintavételi tétel teljesüljön.

Gyakorlati szempontból a (2.69) által adott feltételt érdemes módosítani, és már valamivel a Nyquist-frekvencia alatt megszüntetni a rezonátorokat. A rezonátorok elhelyezkedése ugyanis szimmetrikus a Nyquist-frekvenciára, ezért amennyiben egy rezonátorpólus közel kerül a Nyquist-frekvenciához, akkor közel kerül a konjugált póluspárja is, ami numerikus okok miatt nem előnyös.



2.7. ábra. Zavarjel megszüntetésének alapfeladata.

2.2. Dinamikusan visszacsatolt rezonátoros struktúrák

2.2.1. Zavarjel megszüntetésének alapfeladata periodikus jelekre

Az alapfeladat a 2.7. ábrán látható elrendezésben az, hogy egy $S(z)$ dinamikus rendszer bemenetére adott u_n jel segítségével úgy vezéreljük azt, hogy az e_n hibajel valamilyen költségfüggvény szerint minimális legyen. Az $S(z)$ szakaszt hagyományos terminológia szerint másodlagos útnak (secondary path) nevezzük. Feltételezzük, hogy $S(z)$ stabil rendszer [14, 15, 16, 17]; a továbbiakban exponenciális stabilitást feltételezünk. Az ábrán látható általános struktúra egy úgynevezett jelmodell alapú szabályozási kört ábrázol [15, 16, 17]. A módszer lényege, hogy a szabályozó algoritmus struktúráját az y_n jelre felállított jelmodellnek megfelelően alakítjuk ki, így ideális esetben a modellnek megfelelő bármely y_n -re zérus hibajel tudunk elérni. A szabályzó a hibajel, és, amennyiben szükséges, a jelről valamilyen információt hordozó referenciajel alapján hangolja a jelparamétereket, és állítja elő az u_n beavatkozójelet.

Az $S(z)$ rendszer jellemzésére az átviteli függvényen kívül használjuk még az \mathbf{S} diagonálmátrixot:

$$\mathbf{S} = \text{diag}(\dots S(z_i) \dots) \in \mathbb{C}^{N \times N}, \quad (2.74)$$

ahol $S(z_i)$ a rendszer átvitelét jelöli az i -edik rezonátorfrekvencián. Az algoritmusokban alapvetően $S(z)$ és \mathbf{S} becslőjét alkalmazzák, amelyeket rendre $\hat{S}(z)$ és $\hat{\mathbf{S}}$ jelölnek. Amennyiben nincsen más megadva $\hat{S}(z) = S(z)$ feltételezéssel éleik.

Az \mathbf{S} mátrix számítható $S(z)$ impulzusválaszának Fourier-transzformáltjából:

$$\mathbf{S} = \sum_{k=0}^{\infty} s_k \langle c_{i,-k} \rangle, \quad (2.75)$$

$$\langle c_{i,-k} \rangle = \text{diag}(\dots c_{i,-k} \dots) \in \mathbb{C}^{N \times N}, \quad (2.76)$$

ahol s_k jelöli az impulzusválaszt, és a $\langle c_{i,-k} \rangle$ diagonálmátrix főátlójában találhatóak az i -edik rezonátorfrekvenciához tartozó $c_{i,-k} = e^{-j2\pi f_i k}$ bázisfüggvények.

Célszerű ezen túl az átvitelifüggvény-mátrix inverzének definiálása is:

$$w_i = \hat{S}(z_i)^{-1}, \quad (2.77)$$

$$\mathbf{W} = \text{diag}(\dots w_i \dots) = \hat{\mathbf{S}}^{-1} \in \mathbb{C}^{N \times N}. \quad (2.78)$$

Elfajult esetektől eltekintve az inverz számítható.

Feltételezzük, hogy y_n a (2.10) formában adott jelmodellel írható le. Belátható, hogy állandósult állapotban a hibajel nullává tehető, amennyiben

$$u_n = \sum_{i=0}^{N-1} w_i A_i e^{j\varphi_i} \cdot c_{i,n}. \quad (2.79)$$

Mivel a w_i komponensek állandósult állapotban kompenzálják az $S(z)$ átvitelt, így a rendszeren áthaladva az u_n jel a következő kimenetet eredményezi:

$$y'_n = \sum_{i=0}^{N-1} (S(z_i)w_i) \cdot A_i e^{j\varphi_i} \cdot c_{i,n} = \sum_{i=0}^{N-1} A_i e^{j\varphi_i} \cdot c_{i,n}. \quad (2.80)$$

tehát (2.10) alapján $e_n = y_n - y'_n = 0$.

Az eddig alkalmazott jelmodell alapú felírás szerint a rendszer bemenőjele (idővariáns és -invariáns alakban is) a következő alakban írható, $\hat{\mathbf{x}}_n$ -et tekintve az u_n jel állapotváltozójának:

$$u_n = \mathbf{c}_n^T \hat{\mathbf{x}}_n^{\text{LTV}} = \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}_n^{\text{LTI}}. \quad (2.81)$$

A (2.79) egyenletben adott optimális megoldás tehát [14]:

$$\hat{\mathbf{x}}_n^{\text{opt}} = \mathbf{W} \mathbf{x}_n, \quad (2.82)$$

ahol \mathbf{x}_n az y_n -hez tartozó jelmodell állapotváltozója (lásd: (2.20) és (2.24)). Az egyenlet az idővariáns és -invariáns alakra egyaránt érvényes.

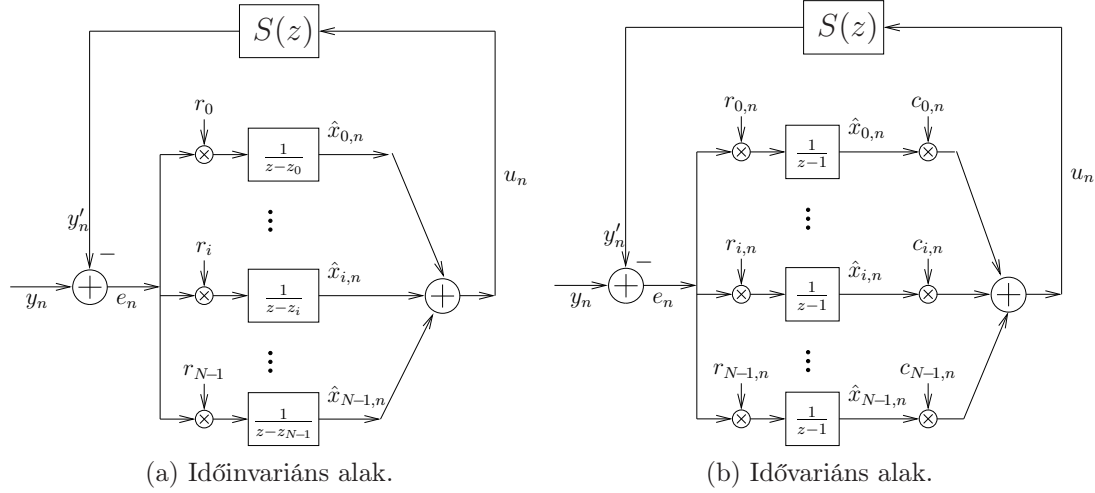
Habár a (2.82) által adott megoldás ideális esetben zérus hibajelet eredményez, valós környezetben például a zavaró jel változása vagy az átviteli függvények pontatlan ismerete miatt a direkt megoldás helyett célszerű valamilyen, a paraméterek folytonos adaptálását megvalósító algoritmust alkalmazni.

A folyamatos adaptáció megvalósítására ajánlott megoldás az, hogy a $S(z)$ rendszert a 2.3 ábrán látható megfigyelő valamelyikének közös visszacsatoló ágába helyezzük [14]. Láthattuk ugyanis, hogy a rezonátorok rezonátorfrekvenciákon mutatott *végtelen erősítése* miatt állandósult állapotban a megfigyelő hibajele nullába áll be, tehát teljesíti az elvárásokat. Az $S(z)$ által okozott nem egységnyi visszacsatolás azonban stabilitás szempontjából kritikus, így ennek a módosított algoritmusnak a tárgyalására a következő szakaszban kerül sor.

A 2.7. ábrán látható elrendezés a már bemutatott zajcsökkentő alkalmazásnak a következő módon feleltethető meg. Az elnyomandó zajt y_n jelöli. A hangszórók bemenetére adandó jel u_n . Az akusztikus rendszert $S(z)$ jelöli, amely magában foglal minden egyéb átviteli függvényt, pl. a jelátalakítók és a jelkondicionálók átvitelét is. Sok alkalmazásban, mint például az aktív zajcsökkentésben, az e_n hibajel valójában a beavatkozó jel és zavarjel szuperpozíciójaként alakul ki, emiatt a gyakorlatban úgy járunk el, hogy $(-u_n)$ jelet adunk a bemenetre. A zajcsökkentő rendszerben található mikrofonok a hibajelet érzékelik közvetlenül, tehát nem kell az $(y_n - y'_n)$ értéket számítani.

2.2.2. Egycsatornás algoritmusok ismertetése

Alapstruktúra



2.8. ábra. Dinamikusan visszacsatolt rezonátoros struktúrák.

A dinamikusan visszacsatolt rezonátoros struktúra blokkdiagramja a 2.8. ábrán látható. Az algoritmus tervezése az r_i együtthatók megválasztását jelenti. A tervezésre vonatkozó részletes megfontolásokat [14] tartalmazza. Gyakorlati megfontolásokat is figyelembe véve [14] alapján az r_i és $r_{i,n}$ értékekre a következő választás javasolt:

időinvariáns modell	idővariáns modell
$r_i = \frac{\alpha}{N} \frac{1}{\hat{S}(z_i)} z_i \quad (2.83)$	$r_{i,n} = \frac{\alpha}{N} \frac{1}{\hat{S}(z_i)} c_{i,n}^* \quad (2.84)$

Legyen ebben az esetben is az algoritmus állapotváltozója $\hat{\mathbf{x}}_n$. A 2.8. ábrát, valamint (2.77) és (2.17) változódefiníciókat felhasználva az algoritmust leíró egyenletek a következők:

időinvariáns modell	idővariáns modell
$u_n = \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}_n \quad (2.85)$	$u_n = \mathbf{c}_n^T \hat{\mathbf{x}}_n \quad (2.88)$
$e_n = y_n - y'_n \quad (2.86)$	$e_n = y_n - y'_n \quad (2.89)$
$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \langle z_i \rangle \hat{\mathbf{x}}_n + \frac{\alpha}{N} \mathbf{W} \mathbf{z} e_n \quad (2.87)$	$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \hat{\mathbf{x}}_n + \frac{\alpha}{N} \mathbf{W} \mathbf{c}_n^* e_n \quad (2.90)$

Az $\frac{1}{N}$ értéket gyakran célszerű α -ba beleértetni, így $\frac{\alpha}{N}$ helyett α -t alkalmazni [14].

Az állapotegyenletek nagymértékben hasonlítanak a megfigyelőnél ismertetettekhez. Alapvető különbség a \mathbf{W} mátrix jelenléte, amelynek szerepe a visszacsatolásba helyezett rendszer hatásának kompenzálása.

Abban az esetben, ha $\hat{S}(z)$ nem egyezik meg $S(z)$ -vel, akár instabilitás is felléphet. A rendszer stabilitásának feltétele [14]:

$$-\pi/2 < \arccos(S(z_i)) + \arccos(w_i) < \pi/2, \quad \forall i. \quad (2.91)$$

A feltétel azt jelenti, hogy a rezonátorfrekvenciákon a valódi rendszer és az inverz átvitel becslőjének fázisa nem szabad, hogy 90° -nál nagyobb mértékben eltérjen egymástól. Ennél kisebb eltérés esetén megfelelően kis α mellett a rendszer mindig stabilizálható [14]. Belátható, hogy amennyiben $\hat{S}(z)$ teljesíti a stabilitási feltételt, az $\hat{\mathbf{x}}_n$ állapotváltozók a (2.82) által adott optimális értékhez konvergálnak [14].

Az α paraméter szerepe kettős. Egyrészt szükséges a rendszer stabilitásának biztosításához, amely a rezonátoros megfigyelővel ellentétben általában csak $\alpha < 1$ esetén érhető el. Ennek oka, hogy a w_i együtthatók csak a rezonátorfrekvenciákon írják le jól az inverz átvitelt, és ahhoz, hogy a rezonátorfrekvenciák közötti modellezési hiba ellenére is biztosítani lehessen az eredő negatív visszacsatolást, kis α szükséges [14]. A stabilitás biztosításán túl α segítségével állítható be a rendszer sebessége és zavarérzékenysége: kis α jó zavartűrést, de lassú beállást eredményez, míg nagy α gyors beállást, viszont nagyobb zavarérzékenységet eredményez. Funkcióját tekintve α a szabályozástechnikában használatos terminológia szerint a hurokerősítés szerepét tölti be.

A rezonátorokat minden olyan frekvencián üzemeltetni kell, amelyen a zavarójel harmonikus komponenseket tartalmaz. A végtelen nyílt hurkú erősítés miatt minden, a rezonátorfrekvenciákra eső komponens esetén a nulla hibajel biztosítható állandósult állapotban.

A (2.85)-(2.90) által adott algoritmus optimális abban az értelemben, hogy a rezonátorelhelyezkedéstől függetlenül maximális fázistartalékot biztosít [14]. Egyenletes rezonátorelhelyezkedés esetén $\alpha = 1$ választással, továbbá amennyiben $S(z)$ -nek csak pólusai vannak és legfeljebb $N - 1$, a rendszer véges impulzusválaszú lesz [14]; ez tekinthető az elérhető leggyorsabb beállásnak. Általános esetben pedig elmondható, hogy az algoritmus által elérhető leggyorsabb beállítás a $w_i = S(z_i)^{-1}$ választással érhető el [14]. A leggyorsabb beálláshoz tartozó α megválasztására analitikus formula egyelőre nem ismert, numerikus számítására [14] disszertációban található módszer.

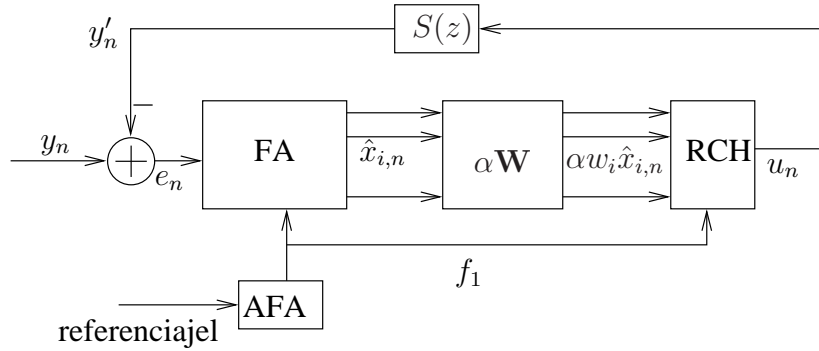
A frekvencia adaptálására ebben az esetben is lehetőség nyílik. Az AFA megvalósítható az algoritmus saját állapotváltozói segítségével is, de ajánlott egy különálló AFA blokk implementálása. Ennek bemenetére viszont általában nem közvetlenül a zavarjelet kötjük, hanem a zajforrástól közvetlen módon szerzett úgynevezett referenciajelet [14].

Beállási idő csökkentése

A 2.9. ábrán látható struktúra segítségével az eddigiéknél gyorsabb beállású zavar-kompenzáció valósítható meg [14]. A rendszer működése a következő. A zavarjel és a kompenzáló jel eredőjeként adódó e_n hibajelelet az FA-val jelölt rezonátor alapú Fourier-analizátor (lásd 2.3(b). ábra) Fourier-komponenseire bontja. Az analizátor $\hat{x}_{i,n}$ állapotváltozóit súlyozzuk az $S(z)$ rendszer rezonátorfrekvenciákon vett inverz

átvitelével, és a súlyozott jeleket egy RCH-val jelölt újabb rezonátorblokkra vezetjük. Az RCH blokk a 2.2(b). ábrán látható struktúrát jelöli, amelynek bemenetei az integrátorok bemenő jelei. Az RCH egy az FA blokk által vezérelt jelszintetizátor.

Az algoritmus beállási idejének csökkenése a következő módon magyarázható. Az inverz rendszer modellezése általában csak a rezonátorfrekvenciákon lehet tökéletes, mivel csupán a w_i értékek ismertek. A rezonátorfrekvenciák közötti modellezési hiba viszont az ideális esethez képest kisebb α értéket enged meg a stabilitás biztosítása érdekében [14], ami lassabb beállást eredményez. A 2.4(a). ábra alapján látható, hogy egy zárt hurokban működő rezonátorcsatorna sávszűrőként funkcionál egy adott rezonanciafrekvencia körül. Az extra rezonátorbank beiktatásával a rezonátorfrekvenciák közötti átvitel tehát csökken, ami olyan hatású, mintha α értékét csökkentettük volna, de csak a rosszul modellezett frekvenciasávokban.



2.9. ábra. Beállási idő csökkentésének módszere.

Jelölje $\hat{\mathbf{x}}_n$ az FA és $\hat{\mathbf{q}}_n$ az RCH állapotváltozóit. Az állapotegyenletek ekkor:

$$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \hat{\mathbf{x}}_n + \frac{1}{N} \mathbf{c}_n^* (e_n - \mathbf{c}_n^T \hat{\mathbf{x}}_n), \quad (2.92)$$

$$\hat{\mathbf{q}}_{n+1} = \hat{\mathbf{q}}_n + \alpha \mathbf{W} \hat{\mathbf{x}}_n, \quad (2.93)$$

$$u_n = \mathbf{c}_n^T \hat{\mathbf{q}}_n. \quad (2.94)$$

Az α konvergenciaparaméter szerepe ebben az esetben is a zajérzékenység és beállási idő hangolása, valamint a stabilitás biztosítása.

Átviteli függvény mérése

A gyakorlati alkalmazások többségében az $S(z)$ átviteli függvény előre nem ismert, így a rendszer beüzemelésének első lépése általában az $S(z)$ átvitel azonosítása. Az azonosításra ajánlott módszer a [14, 67] irodalmakban olvasható: léptetett frekvenciájú, nulla fázisú szinuszos jellel gerjesztjük a rendszert, a választ pedig rezonátor alapú megfigyelő segítségével mérjük, és minden frekvencián eltároljuk a mért értéket. A mérési frekvenciákat előzetes információk hiányában érdemes egyenletes felbontással kijelölni.

A gyakorlatban sokszor úgy járunk el, hogy az azonosítást követően kiszámítjuk és eltároljuk a mért $S(z_k)$ átvitelek inverzét (w_k), majd a dinamikus visszacsatolást

rezonátoros struktúra üzemeltetése során minden rezonátorcsatornához a hozzá legközelebbi identifikált frekvencián mért átvitel inverzét rendeljük. Az identifikáció frekvenciafelbontását úgy kell megválasztani, hogy a stabilitás tetszőleges rezonátorfrekvencia esetén teljesüljön [14]; érdemes úgy eljárni, hogy a szomszédos frekvenciákon mért átvitelek közötti fáziseltérés ne haladja meg a néhány tíz fokot. Az identifikáció frekvenciafelbontása a mért értékek közötti interpoláció segítségével csökkenthető. Amennyiben az y_n zavaró jel frekvenciája ismert, elegendő az alap- és felharmonikus frekvenciákon identifikálni a rendszert.

2.2.3. Többcsatornás algoritmus ismertetése

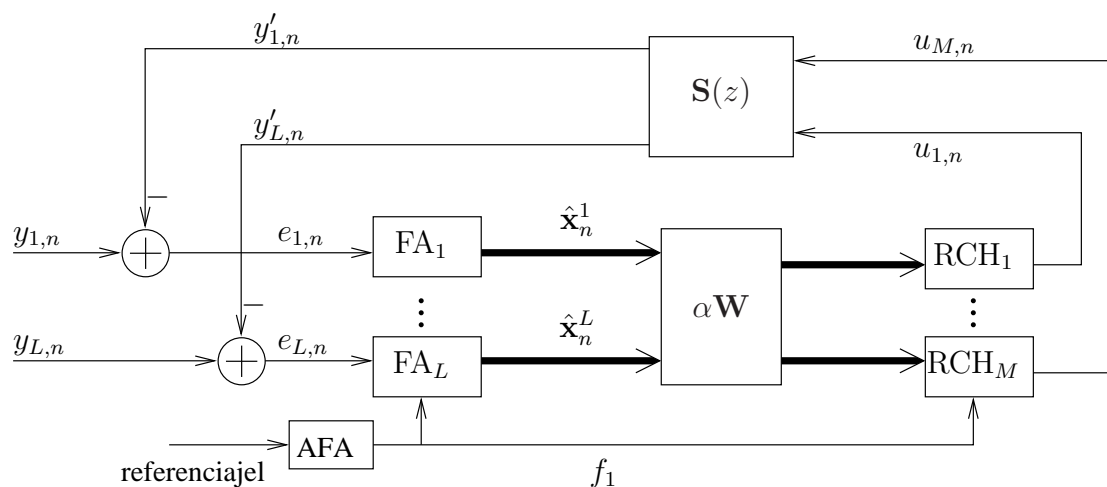
A 2.9. ábrán bemutatott rendszer egyszerűen kiterjeszthető többkimenetű–többbemenetű, azaz többcsatornás rendszerré a be- és kimeneteken található FA és RCH blokkok megtöbbszörözésével, illetve a \mathbf{W} inverz átviteli mátrix általánosításával a 2.10. ábrán látható módon. Az ábrán a vastag vonalak a vektorváltozókat jelölik. Többcsatornás esetben az M darab bemenettel és L darab kimenettel rendelkező $\mathbf{S}(z)$ rendszer m -edik bemenete és l -edik kimenete közötti átvitelt jelölje $S^{l,m}(z)$, és a (2.74) alapján előállított diagonálmátrix legyen $\mathbf{S}^{l,m} \in \mathbb{C}^{N \times N}$. A rezonátorfrekvenciákon az ezekből a mátrixokból képzett hipermátrix jellemzi a rendszert:

$$\mathbf{S} = [\mathbf{S}^{l,m}] \in \mathbb{C}^{LN \times MN}, \quad \begin{matrix} m=1 \dots M, \\ l=1 \dots L, \end{matrix} \quad (2.95)$$

Az átvitel becsült értéke $\hat{\mathbf{S}}$. Ideális esetben $\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{S}$. Az inverz átvitel ezek alapján definiálható:

$$\mathbf{W} = \hat{\mathbf{S}}^\# \in \mathbb{C}^{MN \times LN}, \quad (2.96)$$

ahol $(\cdot)^\#$ a Moore-Penrose féle pszeudoinverzét jelöli.



2.10. ábra. Többcsatornás dinamikusan visszacsatolt rezonátoros struktúra.

Jelölje $\hat{\mathbf{x}}_n^l$ az l -edik FA és $\hat{\mathbf{q}}_n^m$ az m -edik RCH blokk állapotváltozóit. Az állapot-egyenletek ekkor:

$$\hat{\mathbf{x}}_{n+1}^l = \hat{\mathbf{x}}_n^l + \frac{1}{N} \mathbf{c}_n^* (e_{l,n} - \mathbf{c}_n^T \hat{\mathbf{x}}_n^l), \quad l = 1 \dots L \quad (2.97)$$

$$\hat{\mathbf{q}}_{n+1}^m = \hat{\mathbf{q}}_n^m + \sum_{l=1}^L \alpha \mathbf{W}^{m,l} \hat{\mathbf{x}}_n^l, \quad m = 1 \dots M \quad (2.98)$$

$$u_{m,n} = \mathbf{c}_n^T \hat{\mathbf{q}}_n^m, \quad m = 1 \dots M \quad (2.99)$$

$$(2.100)$$

ahol $\mathbf{W}^{m,l} \in \mathbb{C}^{N \times N}$ a \mathbf{W} hipermátrix m -edik N méretű blokk sorának az l -edik N méretű blokkoszlopa.

Jelölje \mathbf{S}_i és \mathbf{W}_i rendre az \mathbf{S} és \mathbf{W} mátrixok i -edik rezonátorfrekvenciához tartozó elemeiből képzett mátrixot. A rendszer stabilitásának kritériuma [14]:

$$-\pi/2 < \arccos(\lambda_{l,i}) < \pi/2, \forall i. \quad (2.101)$$

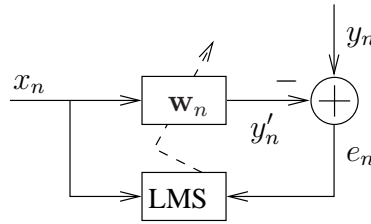
$$\lambda_{l,i} = \lambda_l(\mathbf{S}_i \mathbf{W}_i), \quad \begin{matrix} l=1 \dots L \\ i=0 \dots N-1 \end{matrix} \quad (2.102)$$

tehát az $\mathbf{S}_i \mathbf{W}_i$ mátrixok minden sajátértékének pozitív valós részűnek kell lenni. Egycsatornás esetben ez ekvivalens a (2.91) feltétellel.

2.3. LMS alapú algoritmusok

2.3.1. LMS algoritmus bemutatása

Az LMS (Least Mean Square) algoritmus [15] alapfelépítése a 2.11. ábrán látható. Az algoritmus feladata a \mathbf{w}_n adaptív transzverzális szűrő hangolása oly módon, hogy az e_n hibajel teljesítményét minimalizálja.



2.11. ábra. Az LMS algoritmus alapstruktúrája.

Az LMS algoritmus egyszerű és robusztus felépítése miatt az adaptív jelfeldolgozás alapvető eszközévé vált. A felhasználási körei olyan általános problémák, mint rendszeridentifikáció [72, 73], adaptív csatornaki egyenlítés [74, 75], visszhangcsökkentés [76, 77], adaptív antennarendszerek és nyálábformálás [78, 79].

\mathbf{w}_n optimális értékét jelölje \mathbf{w}_o , amely formálisan a következő egyenlet megoldása:

$$\mathbf{w}_o = \arg \min_{\mathbf{w}_n} \frac{1}{2} \mathbb{E} \{ e_n^2 \}, \quad (2.103)$$

ahol $\mathbb{E}\{\cdot\}$ a várható-érték operátort jelöli.

Az algoritmus részletes ismertetéséhez definiáljuk a következő változókat:

- N az adaptív szűrő hosszát jelöli.
- $w_{i,n}$ a \mathbf{w}_n szűrő i -edik eleme, tehát:

$$\mathbf{w}_n = [w_{0,n} \dots w_{N-1,n}]^T \in \mathbb{R}^{N \times 1}. \quad (2.104)$$

- x_n az úgynevezett referenciajel, amelyből az \mathbf{x}_n regressziós vektort képezzük:

$$\mathbf{x}_n = [x_n \dots x_{n-N+1}]^T \in \mathbb{R}^{N \times 1}. \quad (2.105)$$

A referenciajelet általában szélessávú, sztochasztikus jelnek tekintjük. A (2.103) egyenlet megoldása az úgynevezett Wiener-megoldás [15]:

$$\mathbf{w}_o = [w_{o,0} \dots w_{o,N-1}] = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{p} \in \mathbb{R}^{N \times 1}, \quad (2.106)$$

ahol $\mathbf{R} = \mathbb{E}\{\mathbf{x}_n \mathbf{x}_n^T\}$ a referenciajel autokorrelációs mátrixa, míg $\mathbf{p} = \mathbb{E}\{\mathbf{x}_n y_n\}$ a referenciajel és az y_n jel keresztkorrelációs vektora. A feltételezett jelmodell szerint az y_n jel az x_n referenciajel szűrésével áll elő [15]:

$$y_n = \sum_{i=0}^{N-1} w_{o,i} x_{n-i} = \mathbf{x}_n^T \mathbf{w}_o. \quad (2.107)$$

Valós idejű rendszerekben is jól használható megoldást kínál \mathbf{w}_o megtalálására az LMS algoritmus, amely az optimumkeresési problémát iteratív módszerrel oldja meg az adaptív szűrő együtthatóinak folyamatos hangolásával. Az algoritmust a következő egyenletek írják le:

$$y'_n = \sum_{i=0}^{N-1} w_{i,n} x_{n-i} = \mathbf{x}_n^T \mathbf{w}_n, \quad (2.108)$$

$$e_n = y_n - y'_n, \quad (2.109)$$

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n + \mu e_n \mathbf{x}_n, \quad (2.110)$$

ahol μ pozitív szám az úgynevezett konvergenciaparaméter. A szűrő hangolása a legmeredekebb lejtő módszerével történik, amelynek költségfüggvénye: $\frac{1}{2} e_n^2 = \frac{1}{2} (y_n - y'_n)^2 = \frac{1}{2} (y_n - \mathbf{x}_n^T \mathbf{w}_n)^2$. A \mathbf{w}_n szerinti pillanatnyi gradiens becslője:

$$\hat{\nabla}_n = \frac{1}{2} \frac{\partial e_n^2}{\partial \mathbf{w}_n} = \frac{1}{2} \frac{\partial e_n^2}{\partial e_n} \frac{\partial e_n}{\partial \mathbf{w}_n} = -e_n \mathbf{x}_n. \quad (2.111)$$

A negatív gradiens irányába hangolva \mathbf{w}_n -et, a $\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n - \mu \hat{\nabla}_n$ képletet alkalmazva (2.110) adódik.

A $0 < \mu < 1/\text{tr}(\mathbf{R})$ választás biztosan stabil rendszert eredményez. $\text{tr}(\mathbf{R})$ az \mathbf{R} mátrix nyomát jelöli. Stabil algoritmus esetén a szűrő az optimális megoldáshoz konvergál [15].

A négyzetes költségfüggvényen kívül más konvex költségfüggvény alkalmazása is lehetséges. A dolgozat szempontjából legfontosabb az úgynevezett hibaelőjeles algoritmus [80, 81], amely az $|e_n|$ költségfüggvényt minimalizálja. Ebben az esetben a gradiens $\hat{\nabla}_n = \frac{\partial |e_n|}{\partial \mathbf{w}_n} = -(e_n)\mathbf{x}_n$ tehát az adaptációs algoritmus:

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n + \mu \text{sign}(e_n)\mathbf{x}_n, \quad (2.112)$$

ahol $\text{sign}(\cdot)$ az előjelfüggvényt jelöli:

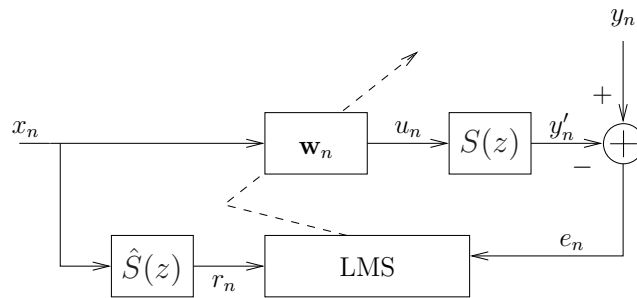
$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{ha } x < 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \\ 1 & \text{ha } x > 0 \end{cases}. \quad (2.113)$$

Az algoritmus számítási igény szempontjából kedvező, mivel a hiba előjelével történő szorzás csupán az előjelek állítását igényli [80, 81, 82, 83]. Az algoritmus Laplace-eloszlású zaj esetén ad optimális adaptációs eljárást [84], de előnyös impulzusszerű zavarok jelenléte esetén is [85]. Hátrányos tulajdonsága a hosszú beállási idő.

A 4. fejezetben ezen algoritmus továbbfejlesztésére és rezonátor alapú struktúrákban történő felhasználására tesztek javaslatokat, illetve vizsgálom az új algoritmusok tulajdonságait.

2.3.2. Egycsatornás FxLMS algoritmus bemutatása

Az LMS algoritmus továbbfejlesztett változata, a 2.12. ábrán látható FxLMS (Filtered-x Least LMS: szűrt referenciájú LMS) algoritmus képes a hibajel teljesítményének minimalizálására abban az esetben is, amennyiben az adaptív szűrő kimenete egy dinamikus rendszerhez kapcsolódik. Ez a 2.7. ábrán látható zavarjel-kompenzációs feladat megoldására alkalmas sztochasztikus jelek esetén.



2.12. ábra. Az FxLMS algoritmus alapstruktúrája.

Az algoritmushoz tartozó jelölések a következők:

- $S(z)$ jelöli dinamikus rendszert, $\hat{S}(z)$ pedig annak modelljét. Továbbiakban $\hat{S}(z) = S(z)$ feltételezéssel élünk.
- s_k jelöli $S(z)$ impulzusválaszát.

- r_n : szűrt referenciajel, amely az x_n referenciajel $S(z)$ -vel történő szűrésének eredményeként adódik, \mathbf{r}_n pedig az r_n -ből képzett regressziós vektor:

$$\mathbf{r}_n = [r_n \dots r_{n-N+1}]^T \in \mathbb{R}^{N \times 1}, \quad (2.114)$$

$$r_n = \sum_{k=0}^{\infty} s_k x_{n-k} \leftrightarrow \mathbf{r}_n = \sum_{k=0}^{\infty} s_k \mathbf{x}_{n-k}. \quad (2.115)$$

Az adaptív szűrő kimenetén található dinamikus rendszer jelenléte esetén az egyszerű LMS algoritmus stabilitása nem biztosítható [86]. A stabilitás érdekében ebben az esetben a szűrt referenciajellel adaptáljuk a \mathbf{w}_n szűrőt. Az állapotegyenletek:

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n + \mu e_n \mathbf{r}_n, \quad (2.116)$$

$$e_n = y_n - y'_n, \quad (2.117)$$

$$u_n = \mathbf{x}_n^T \mathbf{w}_n. \quad (2.118)$$

Az adaptív szűrő optimális értéke az LMS algoritmushoz hasonlóan [16]:

$$\mathbf{w}_o = \mathbf{R}_{rr}^{-1} \mathbf{p}_{ry}, \quad (2.119)$$

ahol $\mathbf{R} = \mathbb{E} \{ \mathbf{r}_n \mathbf{r}_n^T \}$, és $\mathbf{p}_{ry} = \mathbb{E} \{ \mathbf{r}_n y_n \}$.

Az $S(z)$ rendszer kimenetén előírt jelre a következő modellt alkalmazzuk [87, 88]:

$$y_n = \mathbf{r}_n^T \mathbf{w}_o + n_n. \quad (2.120)$$

Az előírt jel tehát áll egyrészt az optimális megoldáshoz tartozó $\mathbf{r}_n^T \mathbf{w}_o$ jelből, valamint egy n_n zajkomponensből, amely tartalmazza a mérési zajt és az úgynevezett modellezési zajt. Ez utóbbi akkor lép fel, ha a \mathbf{w}_n szűrő N fókuszuma nem elég nagy ahhoz, hogy teljes mértékben modellezhessük \mathbf{w}_n -nel az y_n jelet.

Az optimális szűrőegyütthatók ismeretében definiálható az adaptív szűrő együtthatóinak optimumtól való eltérése:

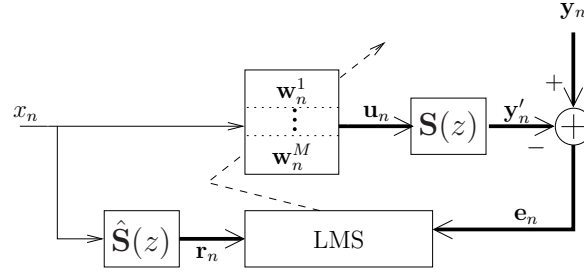
$$\tilde{\mathbf{w}}_n = \mathbf{w}_n - \mathbf{w}_o. \quad (2.121)$$

A $\tilde{\mathbf{w}}_n$ paraméterhibára vonatkozó rekurzív összefüggés megkapható (2.116) mindkét oldalából kivonva a \mathbf{w}_o vektort:

$$\tilde{\mathbf{w}}_{n+1} = \tilde{\mathbf{w}}_n + \mu e_n \mathbf{r}_n. \quad (2.122)$$

Az FxLMS algoritmus μ megfelelően kis értéke mellett stabilizálható, amennyiben a dinamikus rendszer, illetve modelljének fáziskarakterisztikája nem tér el egymástól 90° -nál nagyobb mértékben a működési tartományban [86]:

$$-\pi/2 < \text{arc}(\hat{S}(z)) - \text{arc}(S(z)) < \pi/2. \quad (2.123)$$



2.13. ábra. Többcsatornás FxLMS algoritmus.

2.3.3. Többcsatornás FxLMS algoritmus bemutatása

A többcsatornás FxLMS algoritmus [89] képes többkimenetű–több-bemenetű rendszerek esetén is a hibajel teljesítményének minimalizálására. A költségfüggvény ekkor $\frac{1}{2}\mathbb{E}\{\|\mathbf{e}_n\|^2\} = \frac{1}{2}\mathbb{E}\left\{\sum_{i=1}^L e_{i,n}^2\right\}$. A változók indexelése megegyezik a 2.2.3. szakaszban adottakkal. A referenciajelet ebben az esetben M darab adaptív szűrőn keresztül ($\mathbf{w}_n^1 \dots \mathbf{w}_n^M$) vezetjük az $\mathbf{S}(z)$ rendszerre.

Jelölje $s_k^{m,l}$ az $\mathbf{S}(z)$ rendszer m -dik bemenete és l -edik kimenete közötti impulzusválaszát. Többcsatornás esetben minden lehetséges impulzusválasz-kombinációhoz tartozik egy szűrt referenciajel:

$$\mathbf{r}_n^{l,m} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}_{n-k} s_k^{m,l}, \quad \begin{matrix} m=1 \dots M, \\ l=1 \dots L, \end{matrix} \quad (2.124)$$

és a szűrők adaptációját a következő egyenlet alapján végezzük:

$$\mathbf{w}_{n+1}^m = \mathbf{w}_n^m + \mu \sum_{l=1}^L e_{l,n} \mathbf{r}_n^{l,m}, \quad m = 1 \dots M. \quad (2.125)$$

Az algoritmus kimenetei pedig:

$$u_{m,n} = \mathbf{x}_n^T \mathbf{w}_n^m, \quad m = 1 \dots M. \quad (2.126)$$

2.4. A rezonátor és LMS alapú algoritmusok kapcsolata

Ebben a szakaszban a dolgozatomban szereplő két nagy algoritmuscsalád tulajdonságait vetem össze néhány jellegzetes szempont alapján. Mivel bizonyos alkalmazásokban (pl. aktív zajcsökkentés [14, 52], rendszeridentifikáció [67, 72]) egymás versenytársaként jelennek meg, így tisztában kell lenni előnyös és hátrányos tulajdonságaikkal, alkalmazhatóságukkal.

Habár mindkét algoritmuscsalád jelmodell alapú, alapvető különbség, hogy míg a rezonátor alapú algoritmusok periodikus jeleket előállító jelmodellre, addig az LMS

alapú algoritmusok általános, sztochasztikus jelek szűrésével előálló jelmodellre építenek. A feldolgozandó jel tulajdonságai alapján a megfelelő modellt, és a hozzá tartozó struktúrát kell választani. Közvetlenül frekvenciatartománybeli tulajdonságok vizsgálatára általában a rezonátor alapú, míg időtartománybeli jellemzők mérésére az LMS alapú algoritmusok alkalmazása célszerű.

A kétfajta algoritmus közötti kapcsolat Widrow [90] munkája alapján állítható fel. Eszerint a rezonátor alapú megfigyelő idővariáns alakja egyenletes rezonátorelhelyezkedés esetén megegyezik az LMS alapú spektrumbecslő eljárással [90]. Ebben az elrendezésben azonban az LMS algoritmusban az \mathbf{x}_n regressziós vektor nem egy képletetűsor, hanem olyan komplex vektor, amelynek minden komponense egy komplex exponenciális bázisfüggvény aktuális értékét tartalmazza. A (2.35)–(2.39) és (2.108)–(2.110) egyenleteket összehasonlítva ez azt jelenti, hogy az LMS algoritmus esetén $\mathbf{x}_n = \mathbf{c}_n$ referenciajelet alkalmazva a rezonátor alapú megfigyelőhöz jutunk. Ez a két algoritmus formai hasonlóságában nyilvánul meg.

Dinamikusan visszacsatolt rendszerek kapcsolatáról részletesen olvashatunk a [14, 4. fejezet] és [91] irodalmakban. Sztochasztikus jelek esetén egyértelműen az FxLMS alapú eljárások alkalmazása szükséges. Az összehasonlítás tehát periodikus jelek esetén releváns, amikor viszont a rezonátor alapú algoritmusok kedvezőbb tulajdonságokat mutatnak.

A rezonátor alapú algoritmusok nagy előnye, hogy egyenletes beállási időt kínálnak minden rezonátorfrekvencián, míg az FxLMS algoritmus esetén az egyes szinuszos komponensekre vonatkoztatott beállási idők jelentősen eltérhetnek. Ez két okra vezethető vissza.

Egyik ok, hogy rezonátoros algoritmus esetén az állapotváltozók frissítésére használt és az FxLMS algoritmus szűrt referenciajelében található harmonikus komponenseknek megfeleltethető $c_{i,n}$ értékek teljesítménye komponensenként egzaktul megegyezik, mivel ezeket mesterségesen generáljuk. FxLMS algoritmus esetén viszont a szűrt referenciajelben található szinuszos komponensek teljesítménye nehezen kontrollálható, általában fizikai kényszerek által meghatározott. Mivel az adaptáció sebessége arányos az adott komponens teljesítményével, így kis teljesítményű komponensek esetén lassú az adaptáció.

Másik ok, hogy az FxLMS algoritmus a rendszer modelljét módosítás nélkül használja, míg rezonátoros algoritmus esetén az inverz modellt alkalmazzuk, ami biztosítja az $S(z)$ rendszer dinamikájának kiegyenlítését. Ez azért előnyös, mert ahol $S(z)$ nagy elnyomással rendelkezik, ott az inverz átvittel való szorzás kvázi nagyobb konvergenciaparamétert eredményez, tehát kiegyenlíti az eredő hurokerősítést minden frekvenciakomponens esetén. Ez biztosítja az egyező beállási időt komponensenként. A rezonátoros algoritmushoz hasonló, kedvező viselkedés az FxLMS algoritmus esetén is elérhető [92]. Amíg azonban a frekvenciától függetlenül egyenletes teljesítménymutatók rezonátoros algoritmus esetén a paraméterek megfelelő választásával biztosítottak, addig az FxLMS esetén a javulás az algoritmus komplexitásának növelésével érhető csak el.

A stabilitási kritérium alapjaiban véve megegyezik a két algoritmus esetén (lásd: (2.91) és (2.123)). Amíg azonban az FxLMS algoritmus esetén gyakorlatilag a teljes működési tartomány esetén biztosítani kell a maximálisan 90° -os eltérést a valódi

$S(z)$ rendszer és annak $\hat{S}(z)$ modellje között, addig a rezonátor alapú algoritmusok esetén ez csupán a rezonátorfrekvenciák környezetében szükséges. Számításigény szempontjából ez kedvezőtlen az FxLMS algoritmus esetén, különösen abban esetben, amennyiben a visszacsatoló $S(z)$ rendszer impulzusválasza hosszú.

Jóllehet a rezonátoros struktúra esetén csupán a rezonátorfrekvenciákhoz tartozó inverz átvitelekkel kell szorozni, ami számítási igény szempontjából kedvező, viszont amennyiben az y_n zavaró jel frekvenciája előre nem ismert, vagy változhat, akkor az átvitelt megfelelő felbontással el kell tárolni az üzemi frekvenciasávban. Ennek köszönhetően az $S(z)$ rendszert jellemző adatok tárolása miatt jelentkező memóriaigény szempontjából az FxLMS és a rezonátoros struktúra összemérhető.

Míg FxLMS algoritmus esetén az $S(z)$ rendszert jellemző impulzusválasz változtatás nélkül felhasználható az algoritmusban, addig a rezonátoros struktúra esetén az $S(z)$ átvitel inverzét kell alkalmazni. A valós idejű működés szempontjából kedvező, amennyiben az inverzeket offline módon kiszámítjuk, és eltároljuk. Habár ez a lépés növeli a beüzemelési fázisban elvégzendő feladatok számát az FxLMS algoritmushoz képest, a módszerrel a futási idő jelentősen csökkenthető, főleg nagy méretű MIMO rendszerek esetén.

3. fejezet

Jelérzékelés és jelátvitel

Ebben a fejezetben az elosztott jelérzékelés és jelfeldolgozás miatt fellépő szinkronizációs és stabilitási problémákkal foglalkozom. Megmutatom, hogy milyen feltételeket kell teljesíteni a jelátvitelre szolgáló hálózatnak a visszacsatolt rendszer stabilitásának biztosítása érdekében, és olyan szinkronizációs algoritmusokat mutatok be, amelyek segítségével a rendszer stabilitása biztosítható. Kétfajta jelátviteli módszert tekintek át. Egyik esetben a szenzorok a nyers mérési adatokat továbbítják, másik esetben a szenzorok lokális spektrális megfigyelőt futtatnak, és a Fourier-együtthetőkkel továbbítják a központi jelfeldolgozó egység felé.

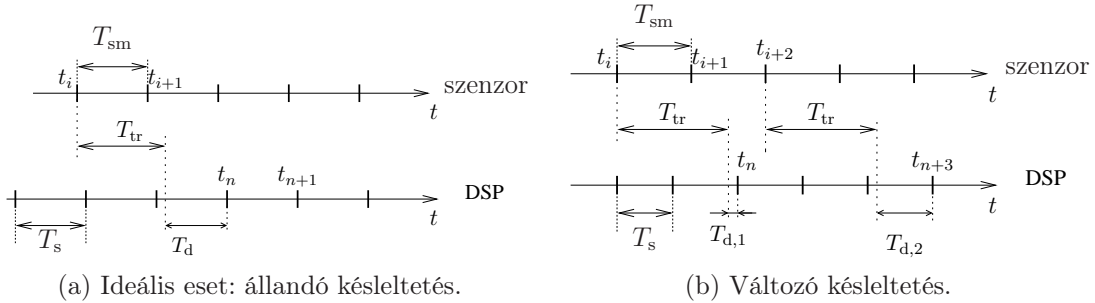
3.1. Adatút jellemzése

A hagyományos jelfeldolgozó rendszerekben a mintavételezés és a jelfeldolgozás szorosan összekapcsolódik, és a folyamat a mintavételezés hagyományos matematikai apparátusával jól leírható. Esetünkben ez bonyolultabb folyamat, mert a mintavételezési, valamint a jelfeldolgozási lépés szétválik, így az eddigi hagyományos rendszermodellünket ennek megfelelően finomítani kell. A következőkben idővezérelt, ekvivalens mintavételezést és jelfeldolgozást feltételezek, amelyek első megközelítésben az egyes részegységeken egymástól függetlenül zajlanak le.

Az adatátvitel jellemzéséhez tekintsük a 3.1(a). ábrát, amelyen egy adatküldési és -feldolgozási folyamat időzítési diagramja látható. Az időtengelyeken található osztások az érzékelők és a központi egység ütemezési időpontjait mutatják. A $\{t_i, t_{i+1}, \dots\}$ időpontok a szenzorokon történő mintavételezést, a $\{t_n, t_{n+1}, \dots\}$ időpontok pedig a központi egységen a beérkező adatok feldolgozását és a kimeneti adatok előállítását jelölik. A mintavételi időköz az érzékelő és jelfeldolgozó egységen rendre T_{sm} és T_s , amelyek $f_{sm} = T_{sm}^{-1}$ és $f_s = T_s^{-1}$ mintavételi frekvenciának felelnek meg. Feltételezzük, hogy mindig a legutoljára beérkezett adat feldolgozása történik meg. Az ábrán két jól elkülönülő szakasz látható a késleltetésben (a t_i és t_n időpontok közötti intervallum) [7]:

- Adatátviteli idő (T_{tr}): amíg az elküldött adat megérkezik a feldolgozó egységhez.

- Egységek ütemezése miatt kialakuló késleltetés (T_d): az adat megérkezése és feldolgoása között eltelt idő.



3.1. ábra. Adatátviteli késleltetések jellemzése.

Az adatátviteli késleltetés (T_{tr}) a hálózat késleltetéséből és az egyes egységek szoftveres késleltetéséből adódik. Alapjában véve a következő szakaszokból épül fel [7, 29]:

- Mintavételezéstől a csomag küldésre kész állapotáig. Magában foglalja például a bufferelést, a rádió hardveres kezelését, az adatmozgatást, a csomag összeállítását.
- Küldésre kész állapottól az adatok kisugárzásának kezdetéig eltelt idő. Ez a közeghozzáférési idő, amely a rendszer legbizonytalanabb pontja, ugyanis a kommunikációs csatorna megosztott, így rosszul tervezett hálózat esetén nem minden esetben szabad a csatorna az előírt időpontban.
- Adatátvitel a küldőtől a fogadóig. Magában foglalja a fizikai rétegben végzett kommunikációt: kódolás, dekódolás, moduláció, demoduláció, jelterjedési késleltetés.
- Csomag megérkezésétől a feldolgozásig eltelt idő. Magában foglalja a rádió hardveres kezelését, az adatcsomag feldolgozását, az adatmozgatást.

A T_{tr} adatátviteli időt a továbbiakban konstansnak tekintem. Ez a hálózat determinisztikus működtetésével érhető el, amely a gyakorlati tapasztalatok alapján megfelelő szoftveres környezettel és hálózati protokollal biztosítható (lásd: az 1.3. alfejezetet). A determinisztikus működés következtében minden eszköz esetén előre definiált módon meghatározható, hogy mikor foglalja le a kommunikációs csatornát (pl. időosztásos módon). A véletlenszerű közeghozzáférést kerülni kell, mert az ütközésekhez vezethet, és jelentős mértékben ronthatja az időzítések állandóságát [56]. Fontos, hogy nagy prioritással kell kezelni a valós idejű kommunikációhoz kötődő feladatokat. A T_{tr} idő ingadozásait a mintavételi periódusidőkhöz képest kell tekinteni. Törekedni kell, hogy legalább egy-két nagyságrenddel kisebb legyen azoknál.

A T_d késleltetés jellegében nagy mértékben különbözik T_{tr} -től. A T_d késleltetés jellemzéséhez tekintsük a 3.1(b). ábrát, ahol két különböző adatátviteli út is fel van

tüntetve. Látható, hogy amennyiben a szenzor és a jelfeldolgozó egység mintavételi frekvenciái akár kismértékben is, de eltérnek egymástól, abban az esetben az adat érkezése és feldolgozása közötti idő folyamatosan változhat, tehát az ábra alapján: $T_{d,1} \neq T_{d,2}$. A bemutatott jelenséget gyakran szokás az órák, illetve időzítések *elcsúszásának* (drift) vagy *szinkronizálatlanságának* nevezni.

Fontos megjegyezni, hogy a T_d abban az esetben is változhat, amikor névlegesen megegyező mintavételi frekvenciával üzemel két egység. Az időzítésekért felelős alkatrészek toleranciája miatt egzakt egyenlőség ugyanis nem biztosítható. Az időzítések elcsúszásához köthető fontos paraméter az úgynevezett drift, amely egy adott hálózati csomópont lokális idejének (t^{loc}) változási gyorsaságát adja meg egy helyesnek tekintett referenciaidőhöz (t^{ref}) képest [29]:

$$\rho = \frac{d t^{\text{loc}}}{d t^{\text{ref}}} - 1. \quad (3.1)$$

A ρ értéke az időzítők felépítésétől és a felhasznált alkatrészek pontosságától függ. Az általánosan elterjedt kvarcoszcillátorok esetén $\rho=10\text{-}100$ ppm mértékű drift teljesíthető.

A legfőbb elvi különbség T_d és T_{tr} között, hogy míg T_{tr} -t csupán az egységek önálló működése szabja meg, addig T_d értékét két egység időzítési viszonyai *együttesen* befolyásolják.

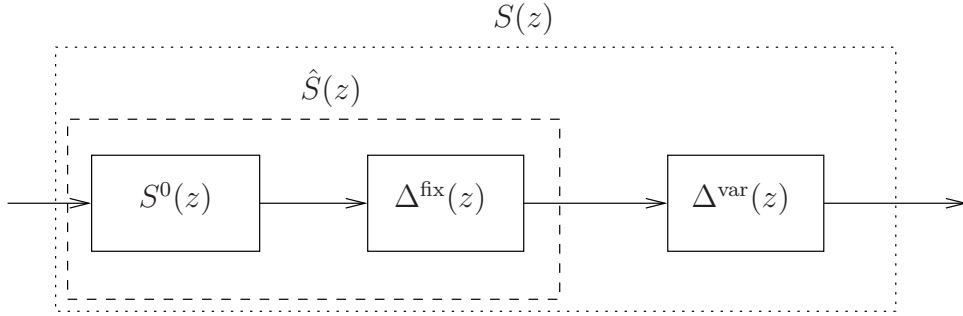
A változó T_d hatásáról, valamint T_d értékének kontrollálásáról a következő alfejezetekben lesz szó. Az eszközök időzítésének eltéréséből származó problémákat szinkronizációs feladatként tárgyalom.

3.2. Mintavételezés és jelfeldolgozás szinkronizálása

A szinkronizáció és a stabilitás kapcsolatának áttekintését követően két alapvető szinkronizációs módszert mutatok be. A bemutatott módszerek alapján javaslatot teszek egy az 1.3. alfejezetben bemutatott architektúra esetén az egyes adatátviteli szintek közötti szinkronizációs lánc kialakítására.

3.2.1. Szinkronizáció és stabilitás kapcsolata

A szinkronizációhoz kapcsolódó időzítési kérdések jelfeldolgozó rendszerben történő vizsgálata a 3.2. ábra alapján történik, amely a 2.7. ábrán látható $S(z)$ rendszer dekompozícióját mutatja hálózati kommunikációval megvalósított adattovábbítás esetén. A rendszer áll egyrészt az $S^0(z)$ fizikai rendszerből, kiegészítve azt a hálózat által okozott $\Delta^{\text{fix}}(z)$ és $\Delta^{\text{var}}(z)$ jelölésű késleltetésekkel. $\Delta^{\text{fix}}(z)$ az állandó, míg $\Delta^{\text{var}}(z)$ a változó késleltetést jelöli. Az $\hat{S}(z)$ becült átvitel tartalmaz minden állandó komponenst, ez $S(z)$ -től csupán a változó értékű késleltetésben különbözik. $\Delta^{\text{var}}(z)$ azért nem foglalható be $\hat{S}(z)$ -be, mert $\hat{S}(z)$ -vel ellentétben $\Delta^{\text{var}}(z)$ általánosságban nem ismert. A fix késleltetések konkrét értéke nem lényeges, meghatározásuk implicit módon, az $\hat{S}(z)$ átviteli függvény mérése során történik. Az átvitel identifikációja a gyakorlatban a rendszer beüzemelésének első fázisa, módszere a [14, 67] irodalmakban olvasható.



3.2. ábra. Késleltetések modellezése az átviteli függvényben.

Legyen a T_d késleltetés kezdeti, ismertnek feltételezett értéke T_d^0 . Ekkor az ismert és ismeretlen késleltetések rendre:

$$T_{\text{fix}} = T_{\text{tr}} + T_d^0, \quad (3.2)$$

$$\Delta T_d = T_d - T_d^0. \quad (3.3)$$

Mivel általában a mintavételi időpontok elcsúszása lassú folyamat, így jellemezhetjük a rendszert egy kvázistacioner állapottal, és hozzárendelhetünk egy átvitelt, amely legalább rövid távon jól jellemzi a rendszert.

A változó késleltetés jellemezhető az alábbi átviteli függvénnyel:

$$\Delta^{\text{var}}(f) = e^{-j2\pi f f_s \Delta T_d}, \quad (3.4)$$

ahol f dimenzió nélküli változó az f_s mintavételi frekvenciához képest adja meg a relatív frekvenciát a 2.1.1. alfejezetben leírtak alapján, tehát $f \cdot f_s$ szorzat az abszolút frekvenciát adja meg.

A (3.4) egyenletben adott átvitel a következő frekvenciafüggő fázistolással egyenértékű:

$$\Delta\phi(f) = -2\pi f f_s \Delta T_d. \quad (3.5)$$

A (2.91) egyenletben adott stabilitási feltétel szerint a valódi rendszer és az ismert rendszermodell fáziskarakterisztikájának hibája nem lehet nagyobb 90° -nál egyik f_i rezonátorfrekvencián sem. Valós értékű jeleket feltételezve az $i = [0 \dots P]$ pozitív indexeket elegendő vizsgálni, a konjugált negatív párokra a feltételek automatikusan teljesülnek. A stabilitás feltétele azon tény alapján fogalmazható meg, hogy a valódi és a becült átviteli függvény közötti fázishiba $\Delta\phi(f)$ -el egyezik meg, tehát:

$$|\Delta\phi(f_i)| < \pi/2, \quad \forall i \quad (3.6)$$

$$2\pi f_i f_s |\Delta T_d| < \pi/2, \quad \forall i \quad (3.7)$$

$$|\Delta T_d| < \frac{1}{4f_i f_s}, \quad \forall i. \quad (3.8)$$

A késleltetés mértékét alapvetően a legmagasabb üzemi rezonátorfrekvencia, tehát $\max(f_i) = f_P$ korlátozza, ez adja a legszűkebb felső korlátot. Az is megállapítható, hogy a késleltetés állandó értéken tartásával ($|\Delta T_d| = 0$) a rendszer mindig stabilizálható, tehát a fix késleltetések nem okoznak stabilitási problémát.

A 3.1. ábra alapján látható, hogy amennyiben követjük azon alapelvet, hogy mindig az utolsó beérkezett mintát dolgozza fel a jelfeldolgozó egység, akkor $T_d < T_{sm}$, így $|\Delta T_d| < T_{sm}$ is érvényes. Amennyiben ugyanis közvetlenül egy jelfeldolgozási pont előtt érkezik egy adat, akkor $T_d = 0$, amennyiben viszont közvetlenül a jelfeldolgozási időpontot követően érkezik, akkor még az azt T_{sm} idővel megelőzően kapott utolsó aktuális mintát kell feldolgozni, ekkor $T_d \approx T_{sm}$. Létezik tehát egy olyan kritikus frekvencia (f_{crit}), amely biztosítja, hogy (3.8) minden $f_i < f_{crit}$ esetén teljesül:

$$f_{crit} f_s = f_{crit,abs} = \frac{1}{4} \frac{1}{T_{sm}}. \quad (3.9)$$

$f_{crit,abs} = f_{crit} f_s$ az abszolút frekvenciát jelöli. Amennyiben a mintavételi frekvenciák névlegesen megegyeznek, tehát $f_s \approx \frac{1}{T_{sm}}$, akkor f_{crit} a mintavételi frekvencia negyede. A stabilitás így strukturálisan is biztosítható, ha a rezonátorcsatornákat csupán a mintavételi frekvencia negyede alatt üzemeltetjük. Gyakorlatban ez azt jelenti, hogy $\{i : |f_i| \geq f_{crit}\}$ indexű rezonátorok állapotváltozóit nem frissítjük, és konstans nulla értéket állítunk be.

Amennyiben a rendszer több szenzort tartalmaz, és az ebben a szakaszban bemutatott stabilitási feltétel minden szenzor esetén érvényes, abban az esetben a teljes rendszer stabilitása biztosított [14, 3.6.2. alfejezet].

Az eredmények alapján látható, hogy a jelérzékelés és jelfeldolgozás szinkronizálatlan volta visszacsatolt rendszer esetén stabilitási problémákat okoz. Habár a rezonátorfrekvenciák korlátozásával stabil rendszer eredményezhető, a visszacsatolás fázishibája a beállási sebesség csökkenését okozhatja, emiatt érdemes $|\Delta T_d| = 0$ állapotot biztosítani. Ezt az egységek szinkronizálásával lehet elérni, amelyre a következő szakaszokban kínálunk megoldást.

Irodalmi forrásokban gyakori feltételezés az eseményvezérelt architektúra, amikor a jelfeldolgozó egység az adatokat azok beérkezését követően azonnal feldolgozza [94, 95], így $|\Delta T_d| = 0$ biztosított. Ez a módszer azonban több szenzor esetén már nehézkes, és egy szenzor esetén sem feltétlenül alkalmazható, amennyiben a hardver kialakítása idővezérelt (például az 1.3. alfejezetben bemutatott rendszer esetén a $\Sigma\Delta$ DA-átalakítók miatt).

A következő szakaszokban kifejezetten az alkalmazás igényeihez igazított, kis erőforrásigényű eljárásokat mutatok be, amelyek determinisztikussá teszik a késleltetést, így biztosítják a stabilitást. A visszacsatolt rendszerek területén hasonló jellegű, részletes leírás a szinkronizáció rendszerszintű megvalósításáról a szerző tudomása szerint nem található.

3.2.2. Mintavételezés szinkronizálása

A szinkronizáció szenzorhálózatok és bármilyen elosztott rendszer esetén az egyes egységek autonóm működése miatt általános probléma. Akár számítógép-

hálózatokban [96], akár speciálisan szenzorhálózatokban történő szinkronizációra is számos megoldás létezik [97, 98, 99, 100], ezen protokollok azonban jellegzetesen általános óraszinkronizációval foglalkoznak. Az általam vizsgált rendszerben viszont cél a mintavételezés szinkronizálása folytonos adatáramlás esetén, amelyre a következőkben bemutatásra kerülő, kis számítási kapacitást igénylő eljárást dolgoztam ki. Az alkalmazás további specialitása, hogy nem igényel abszolút szinkronizációt, tehát a mintavételi időpontoknak nem kell egzaktul egybeesniük, csupán egymáshoz viszonyított helyzetüket kell állandó értéken tartani, az állandó szintű késleltetés érdekében. Az ajánlott algoritmus fizikai szinkronizációt valósít meg, tehát a mintavételi időpontok tényleges módosítását végzi el.

A mintavételezés szinkronizálására az általános óraszinkronizálás területén is elterjedt PLL (Phase Locked Loop) elvet alkalmazom [93], amelyet például az Internet alapú szinkronizáció kapcsán jól ismert NTP (Network Time Protocol) [96] protokollban is felhasználnak.

A módszer a mintavételi frekvenciák hangolásával biztosítja, hogy a 3.1. ábrán látható T_d konstans értéken maradjon a működés teljes időtartama alatt. A szinkronizációs algoritmus megvalósításához szükséges a mintavételi frekvencia hangolását lehetővé tevő hardveres egység. Erre a célra leggyakrabban hangolható időzítőt alkalmaznak, például micaz/mitmótok esetén [102]. Ez egy rendszerórajelről üzemelő számláló, amely egy programozható értéket (N_{div}) elérve törlődik, és megszakítást generál, ahol a mintavételezés és/vagy jelfeldolgozás elvégezhető. Jelölje a számláló órajel-frekvenciáját f_{quartz} . A mintavételi frekvencia:

$$f_m = f_{quartz}/N_{div}. \quad (3.10)$$

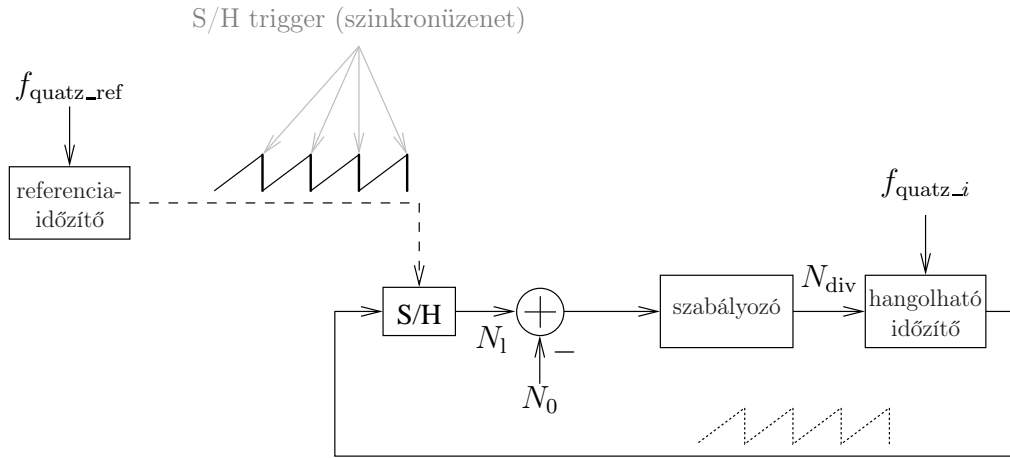
A számláló időfüggvénye fűrészjel alakú, amelynek lefutó élénél történik a mintavételezés. A szinkronizációs algoritmus a különböző egységeken ezen fűrészjelek egymáshoz viszonyított fázisát tartja állandó értéken a mintavételi frekvencia hangolásával. Mivel a fűrészjelek lefutó élei a mintavételi pontokat határozzák meg, így a módszer biztosítja a mintavételezés szinkronizálását.

A szinkronizációs algoritmus elvi blokkdiagramja a 3.3. ábrán látható, működése a következő. Az algoritmushoz szükséges egy referencia hálózati csomópont kijelölése. A referencia-csomópont feladata, hogy szinkronizációs üzeneteket küldjön a mintavételi időpontokban (nem feltétlenül kell minden mintavételi pontban). Mivel az üzenetek küldése mindig azonos időközönként történik, így használhatók szinkronizációs referenciaként. A szinkronizációs üzenet megérkezésekor minden hálózati eszköz kiolvassa az időzítő számlálójának az értékét. Ezt jelöli N_1 a 3.3. ábrán. Ez a mintavételezési (S/H: Sample and Hold) művelet megegyezik a PLL-ekben alkalmazott fázisdetektor funkcióval, mivel a fűrészjel kiolvasott értéke arányos annak fázisával. A mintavételi frekvenciát változtatva tehát a fázisdetektor kimenete állandó értéken tartható. A mintavételi frekvencia hangolása N_{div} változtatásával érhető el.

Jelölje N_0 a fázisdetektor kimenetének előírt értékét, N_{div}^{nom} a névleges mintavételi frekvenciához tartozó N_{div} értéket, illetve N_{tol} egy toleranciaparaméter. Az időzítő hangolására szolgáló szinkronizációs algoritmus a következő:

- a) ha $N_0 + N_{tol} \geq N_1 \geq N_0 - N_{tol}$, akkor f_m -et névleges értéken hagyjuk:

$$N_{div} = N_{div}^{nom}.$$



3.3. ábra. A szinkronizációs algoritmus elvi blokkdiagramja. Folytonos vonalú fűrészfél: referenciaidőzítő számlálójának értéke. Pontozott vonalú fűrészfél: szinkronizálendő időzítő számlálójának értéke.

- b) ha $N_1 < N_0 - N_{\text{tol}}$, akkor f_m -et növeljük, tehát N_{div} értéket csökkentjük:

$$N_{\text{div}} = N_{\text{div}}^{\text{nom}} - \Delta N.$$
- c) ha $N_1 > N_0 + N_{\text{tol}}$, akkor f_m -et csökkentjük, tehát N_{div} értéket növeljük:

$$N_{\text{div}} = N_{\text{div}}^{\text{nom}} + \Delta N.$$

A szinkronizációt a szinkronizációs üzenet érkezésekor kell végrehajtani.

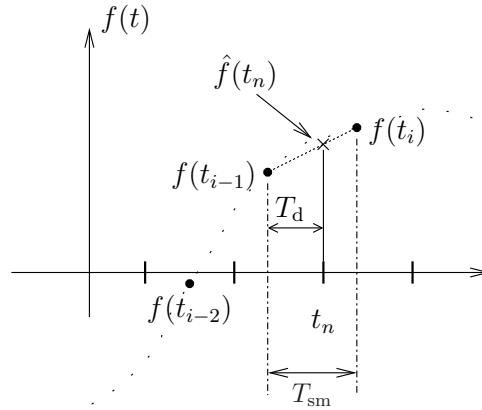
Az N_{tol} toleranciaparaméter a szinkronizációs üzenetek érkezési ideje detektálásának bizonytalanságait hivatott kiküszöbölni. Értékét tapasztalati úton úgy kell beállítani, hogy az üzenet érkezési idejének detektálásában bekövetkező átlagos ingadozás ne okozza az időzítő elhanglását.

Az időzítő hangolására ajánlott algoritmus nem igényel bonyolult aritmetikai műveleteket, így szerény erőforrásokkal rendelkező eszközökön is implementálható.

Az N_{div} értékének növelését és csökkentését érdemes a legkisebb lehetséges értékkel végrehajtani, mert alapvetően $N_{\text{div}} = N_{\text{div}}^{\text{nom}}$ esetén névlegesen megegyező mintavételi frekvenciák miatt az elcsúszás a mintavételi pontok között lassú, és így minimális korrekció szükséges. ΔN értékét úgy kell megválasztani, hogy képes legyen kompenzálni az elcsúszást, azaz a következő feltételnek kell teljesülnie:

$$\frac{\Delta N}{N_{\text{div}}^{\text{nom}}} > \rho. \quad (3.11)$$

Amennyiben adatvesztés lép fel a rendszerben, az $N_{\text{div}} = N_{\text{div}}^{\text{nom}}$ beállítás javasolt. A szinkronüzenet elvesztése például időkorlátok megadásával detektálható. A szinkronüzenetek elvesztése különösen abban az esetben kritikus, amennyiben egy előző szinkronüzenet hatására az időzítő elhangolt állapotba kerül [b) vagy c) állapot], mert ekkor a névlegestől elhangolt állapotban a szinkronizációs algoritmus túlkompenzálhat a PLL hurok visszacsatolásának hiánya miatt.



3.4. ábra. Szinkronizáció interpolációval.

A szinkronizációs üzenetként bármilyen általános üzenet is szolgálhat, így nem jelent a szinkronizáció extra terhelést a hálózatban (implicit szinkronizáció [29]). Ajánlott a mintavételezett adatokat tartalmazó üzenetet használni szinkronizációra. Az egyetlen feltétel, hogy a csomag kiküldésének idejét pontosan időzítsük.

3.2.3. Szinkronizáció interpolációval

Az előző szakaszban bemutatott, a mintavétel szinkronizálására alkalmas eljárás feltételezi, hogy a rendszerben található egységek képesek egy *egységes* mintavételi frekvencia kis környezetében üzemelni, ami megköveteli egy megfelelő finomsággal hangolható időzítő jelenlétét. Az ebben a szakaszban ismertetendő interpolációs eljárás nem igényel ilyen megkötéseket.

Az interpolációval történő szinkronizációról bővebb leírás található a [101] irodalomban, ezért csupán röviden ismertetem a legfontosabb alapelveket, mert az ajánlott szinkronizációs rendszerben felhasználom ezt a módszert is. A módszer lényege, hogy a T_d idő folyamatos mérésével a változó T_d késleltetést úgy kompenzáljuk, hogy a mintavételi időpontot az interpoláció segítségével virtuálisan eltoljuk a jelfeldolgozási időpontba. Az elvet lineáris interpoláció alkalmazása esetén a 3.4. ábra illusztrálja, és az interpolációhoz használt összefüggés a következő:

$$\hat{f}(t_n) = f(t_{i-1}) \frac{T_{sm} - T_d}{T_{sm}} + f(t_i) \frac{T_d}{T_{sm}}, \quad (3.12)$$

ahol $\hat{f}(t_n)$ a jel becsült értékét jelöli a jelfeldolgozási időpontban, $f(t_{i-1})$ és $f(t_i)$ rendre a szenzor által küldött, a jelfeldolgozási időpontot megelőző és követő mintákat jelölik. A kauzalitás biztosítása érdekében egy mintányi késleltetést be kell iktatni. Mivel ez a késleltetés állandó, így stabilitási problémát nem okoz.

A 3.4. ábrán bemutatott lineáris interpoláció a legegyszerűbb esetet szemlélteti, de az interpolációra számos módszer létezik (Lagrange, Hermite, spline, sinc stb.) [103, 104, 105]. Általánosságban elmondható, hogy minél kisebb az interpoláció hibája, annál több adat szükséges, ami viszont a késleltetést növeli. Nagy késleltetés

	fizikai szinkronizáció	interpoláció
számítási komplexitás	alacsony	közepes/nagy
hardverigény	hangolható időzítő	egyszerű időmérés
T_{sm} és T_s viszonya	megegyeznek	tetszőleges
késleltetés	nincsen extra késleltetés	extra késleltetés

3.1. táblázat. Szinkronizációs eljárások összehasonlítása.

a beállási sebesség csökkenését eredményezi visszacsatolt rendszerekben, ezért az interpolációhoz felhasznált adatok mennyiségét érdemes minimalizálni.

3.2.4. Többszintű szinkronizációs architektúra bemutatása

Gyakorlatban az adatátvitel akár több elkülönülő szakaszt is tartalmazhat, amelyek mindegyikében biztosítani kell a szinkronizációt az egységek között. Ez a szinkronizációs lánc biztosítja, hogy a rendszer eredő késleltetése determinisztikus legyen. Ebben a szakaszban az 1.3. ábrán látható tesztalkalmazás architektúrájához javaslok egy többszintű szinkronizációs mechanizmust, figyelembe véve a konkrét hardvereszközök tulajdonságait. Az adatút ebben az esetben a következő: szenzor \rightarrow bázisállomás \rightarrow központi jelfeldolgozó egység. A szinkronizációs láncolat kialakítása során az előző két szakaszban bemutatott eljárások által kínált lehetőségeket vettem figyelembe. A kétfajta eljárás a 3.1. táblázatban összefoglalt tulajdonságokkal rendelkezik.

A rendszer két szinkronizációs szintet tartalmaz:

- szinkronizáció hálózaton belül,
- szinkronizáció a hálózat és a jelfeldolgozó egység között.

A szenzorok egymás közötti, valamint a szenzorok és a bázisállomás közötti szinkronizációjához a 3.2.2. alfejezetben bemutatott PLL-elvet alkalmazó eljárást célszerű használni. Az algoritmus előnye, hogy ténylegesen is biztosítja a mintavételi időpontok állandó relatív pozícióját. Az egységek rendelkeznek a szükséges hangolható időzítővel, és a szerény számítási kapacitásuk miatt előnyös a szinkronizációs algoritmus egyszerű felépítése. Az eljárás további előnye, hogy implicit módon elősegíti a hálózati működés ütemezését is, amely egyébként is megkívánná az eszközök bizonyos szintű szinkronizálását a csomagok küldésének időzítéséhez.

A bázisállomás a szenzoroktól blokkosan érkező adatokat szétbontja, és az időben összetartozó mintákat a mintavételezés ütemében a jelfeldolgozó egység felé továbbítja. A jelfeldolgozó egység szempontjából a hálózat transzparens, gyakorlatilag egy többcsatornás AD-átalakítóként tekinthető, amely hozzá képest aszinkron módon szolgáltatja az adatokat.

A jelfeldolgozó egység és a bázisállomás közötti szinkronizáció nem lehetséges a mintavételi időpontok fizikai hangolásával, mert a jelfeldolgozó egység mintavételi

frekvenciája nem hangolható, csupán a mintavételi frekvencia egész számú többszörösét vagy törtrészét lehetne beállítani, ami igen durva hangolást jelentene. A hálózat mintavételi időpontjait sem lehet fizikailag a jelfeldolgozó egységhez szinkronizálni, mivel a szenzorok mintavételi frekvenciáját nem lehet a jelfeldolgozó egység mintavételi frekvenciájáig növelni. Ennek következtében a hálózathoz történő szinkronizációra interpoláció javasolt. A tesztkörnyezetben a (3.12) által leírt lineáris interpolációt alkalmaztam, mert tapasztalatok szerint megfelelő működést biztosít, kis késleltetést okoz, valamint alacsony a számításigénye.

Az itt bemutatott szinkronizációs architektúra kialakítását az 1.3. alfejezetben bemutatott rendszer inspirálta, de a leírt elvek általánosak, tehát nem kötődnek szorosan a konkrét eszközökhöz.

3.3. Rezonátor alapú, elosztott jelfeldolgozó rendszer szinkronizálása

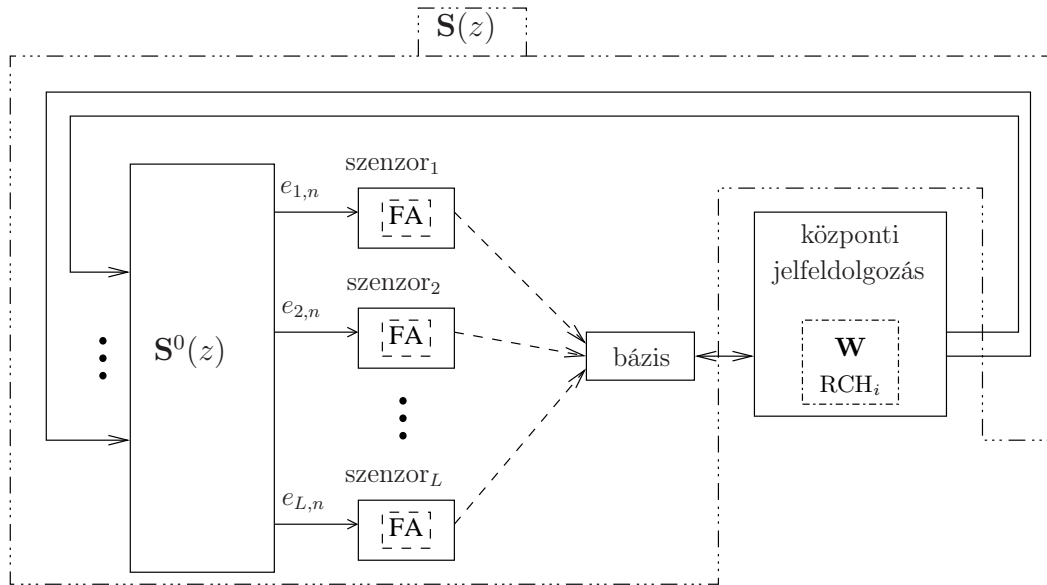
A következőkben a 2.2.3. alfejezetben ismertetett dinamikus visszacsatolt rezonátoros struktúráknak a szenzorhálózatban elosztott, lokális rezonátorokkal történő megvalósítását ismertetem. Feltételt adok a stabilitásra, valamint bemutatom az elosztottan működő rezonátorok szinkronizálására kifejlesztett módszert.

3.3.1. Elosztott rendszer bemutatása

Az elosztott rezonátorokat tartalmazó dinamikus visszacsatolt rendszer felépítése a 3.5. ábrán látható. A rendszer sajátossága, hogy a 2.10. ábrán látható többszörös algoritmus hibajeleket feldolgozó rezonátorbankjait (FA) a vezeték nélküli szenzorok valósítják meg, és a feldolgozás eredményeként adódó Fourier-együtthatókat továbbítják rádió keresztül a központi jelfeldolgozó egység felé, amely a \mathbf{W} -vel való szorzást, illetve a kimeneti rezonátorokat (RCH_i) valósítja meg. A szenzorokon a 2.3(b). ábrán látható idővariáns megfigyelőt kell implementálni.

Az eljárás egy lényeges tulajdonsága, hogy mivel a bemeneti jel Fourier-együtthatói általában lassabban változnak, mint a bemenőjel, így továbbításuk ritkábban is lehetséges, tehát adott sáv szélesség esetén több szenzor adata továbbítható. Ez előnyös lehet például akusztikus jelek esetén, mert a szenzorhálózatok által kínált kommunikációs sáv szélesség a rendszer szűk keresztmetszete lehet már néhány szenzor esetén is. A szenzorok számát korlátozza a megfigyelt jel paramétereinek (frekvencia, amplitúdó, fázis) változási gyorsasága, valamint a megkívánt teljesítménymutatók, például beállási idő.

A lassan változó jelparaméterekre vonatkozó feltételezés reális lehet például forgó gépek zajának feldolgozásakor. Ebben az esetben ugyanis a gépek fordulatszáma akár több tíz vagy száz fordulat/másodperc értéket is elérhet, de a mechanikai tehetetlenség miatt a fordulatszám lassan változik.



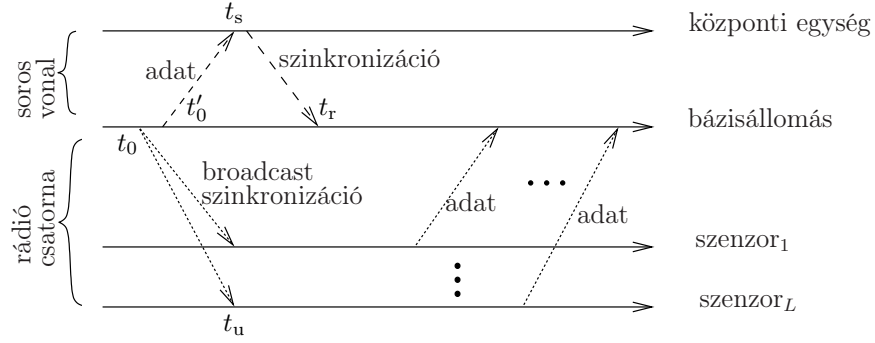
3.5. ábra. Elosztott rezonátoros algoritmus.

Az elosztott rezonátoros rendszer tulajdonságai a következők:

- Előnyök:
 - Csökkentett kommunikációigény.
 - Részben tehermentesíti a központi egységet a számítás alól.
 - Közvetlenül a mért adatokon dolgozik, így például adatvesztés nem torzítja a jelet.
- Hátrányok:
 - Extra vezérlőjelek küldése a rezonátorok vezérléséhez.
 - Növekvő késleltetés, lassabb beállítás.
 - A szenzorokon kicsi a számítási kapacitás, így nagyobb a numerikus hiba, és kevesebb együtthetót képes kiszámolni, mint centralizált feldolgozás esetén.

Az 1.3. alfejezetben bemutatott mintarendszer esetén a szenzorok öt darab komplex együtthetót képesek kiszámítani ($P = 5$).

A hálózatot az eszközök időmultiplex módon (TDMA) használják. A hálózat ütemezése periodikus, minden egyes periódusban a 3.6. ábrán látható működés ismétlődik. Egy-egy perióduson belül a következő feladatok kerülnek végrehajtásra. A bázisállomás üzenetet küld a szenzorok felé, amely az elosztott rezonátorok szinkronizálására szolgál (lásd később). A szenzorok az üzenetet követően adott sorrendben



3.6. ábra. Hálózati működés ütemezése.

küldik a számított Fourier-együtthatókat, amelyeket a bázisállomás továbbít a jelfeldolgozó egység felé. A jelfeldolgozó egység szintén küld szinkronizációs üzenetet a bázisállomás felé a rezonátorok szinkronizálására.

Az egyes szenzorokon megvalósított algoritmus a következő:

$$\hat{\mathbf{x}}_{n+1}^{[l]} = \hat{\mathbf{x}}_n^{[l]} + \frac{\alpha}{N} \mathbf{c}_n^{*[l]} \left(e_{l,n} - \mathbf{c}_n^{\text{T}[l]} \hat{\mathbf{x}}_n^{[l]} \right), \quad (3.13)$$

$$\varphi_{i,n+1}^{[l]} = \varphi_{i,n}^{[l]} + 2\pi f_{i,n}, \quad i = 0 \dots N-1, \quad (3.14)$$

$$\mathbf{c}_{i,n+1}^{[l]} = e^{j\varphi_{i,n+1}^{[l]}}, \quad i = 0 \dots N-1, \quad (3.15)$$

$$\mathbf{c}_{n+1}^{[l]} = [\mathbf{c}_{i,n+1}^{[l]}]^{\text{T}}, \quad i = 0 \dots N-1, \quad (3.16)$$

ahol i a rezonátorok indexét jelöli, a $[l]$ index az algoritmust futtató szenzor azonosítója, $\varphi_{i,n}^{[l]}$ az i -edik rezonátor bázisfüggvényének fázisa. A fázist ebben az esetben explicit módon számítjuk a (2.73) egyenlettel ellentétben, mert a rezonátorok szinkronizálásához szükség van a fázis közvetlen módosítására. A frekvencia a (2.12) egyenlet által adott, az alapharmonikus frekvenciáját ($f_{1,n}$) a bázisállomás szinkron-üzenete tartalmazza.

3.3.2. Elosztott rendszer stabilitásvizsgálata

Az elosztott rezonátorok esetén a szenzorok által küldött Fourier-együtthatók értelmezésében az amplitúdó egyértelmű, míg a szög értelmezéséhez szükséges a viszonyítási alapként szolgáló bázisfüggvény fázisa ($\varphi_{i,n}^{[l]}$). Amennyiben tehát nem biztosítható a bázisfüggvények fázisának egymáshoz képest kötött futása, abban az esetben a fázisok közötti elcsúszás változó fázistolást visz a rendszerbe, és a 3.2. ábrán látható rendszermodell $\Delta^{\text{var}}(z)$ hibatagjának fázisában megjelenik. A 3.2.1. alfejezetben leírtak alapján a konstans késleltetések és fázistolások nem okoznak stabilitási problémát.

A bázisfüggvények fázisai közötti elcsúszásának vizsgálatához a (3.14) által adott rekurzióban figyelembe kell vennünk az időzítők közötti driftet:

$$\varphi_{i,n+1} = \varphi_{i,n} + 2\pi f_{i,n}(1 - \rho), \quad (3.17)$$

$$\varphi_{i,n+1} = [\varphi_{i,n} + 2\pi f_{i,n}] - 2\pi f_{i,n}\rho. \quad (3.18)$$

Az átalakítás azon észrevételen alapszik, hogy a (3.14) egyenletben adott diszkrét idejű integrálásban az f_i frekvencia az egységnyi mintavételi frekvenciához képest adott. A lokális időzítők ρ értékű hibája miatt a frekvencia valójában $f_{i,n}(1 - \rho)$ az adott eszköz lokális időalapjához viszonyítva. A szenzorok által alkalmazott (3.14) és a helyes eredményt szolgáltatató (3.18) egyenleteket összevetve a szinkronizáció hiánya miatt $-2\pi f_{i,n}\rho$ tag jelenik meg, amely a következő fázishibát eredményezi:

$$\Delta\phi_{i,n} = -2\pi\rho \sum_{k=0}^{n-1} f_{i,k}. \quad (3.19)$$

Az időalap hibájára nézve a rendszer integráló jellegű, így kis hiba is hosszú idő után jelentős fázishibát eredményez. Feltételezve, hogy a frekvencia állandó, (3.19) átírható az n időindex explicit használatával:

$$\Delta\phi_{i,n} = -2\pi\rho n f_i. \quad (3.20)$$

Vegyük észre, hogy míg egyszerű mintatovábbító rendszer esetén a mintavételi időpontok elcsúszása fizikailag egyetlen mintavételenyi időközre korlátozódik, mivel mindig a legutolsó adatot dolgozzuk föl, addig az elosztott rezonátorok esetén a bázisfüggvények 2π szerinti periodikussága korlátozza az elcsúszás maximális mértékét. A stabilitás feltétele ebben az esetben is a maximálisan 90° -os fázishiba a visszacsatolásban, de figyelembe vesszük a 2π szerinti periodicitást is:

$$k2\pi - \pi/2 < |\Delta\phi_{i,n}| < k2\pi + \pi/2, \quad \begin{matrix} k=\dots,-1,0,1,\dots \\ i=0\dots N-1 \end{matrix}. \quad (3.21)$$

A továbbiakban csak a pozitív frekvenciákat vizsgáljuk, valós jelekre a negatív frekvenciákon a feltételek változatlanok. Kifejtve $\Delta\phi_{i,n}$ -et, és felhasználva, hogy $f_i = i f_1$:

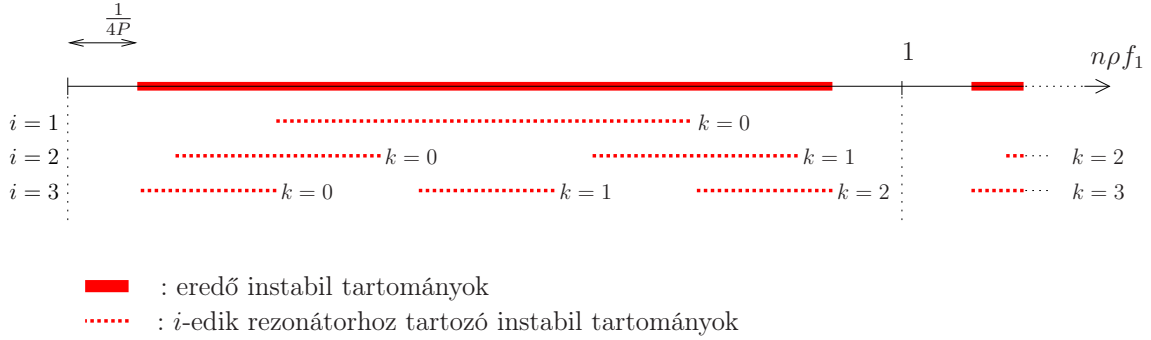
$$k2\pi - \pi/2 < 2\pi\rho n i f_1 < k2\pi + \pi/2, \quad (3.22)$$

$$\frac{k}{i} - \frac{1}{4i} < \rho f_1 < \frac{k}{i} + \frac{1}{4i}, \quad \begin{matrix} k=\dots,-1,0,1,\dots \\ i=0\dots P \end{matrix}. \quad (3.23)$$

A 3.7. ábrán látható illusztráción az instabil tartományok vannak kirajzolva (3.23) alapján $P = 3$ esetére, minden harmonikus komponensre $\{i = 1 \dots 3\}$.

Analitikusan is megmutatható, de a 3.7. ábra alapján egyszerűen belátható, hogy $n\rho f_1 = \frac{1}{4P}$ esetén ($k = 0, i = P$) lép be a rendszer az instabil tartományba, és $n\rho f_1 = 1 - \frac{1}{4P}$ pontban hagyja el azt. Ez alapján látható, hogy a stabil szakaszok aránya a teljes üzemidőhöz képest:

$$\frac{T_{\text{stabil}}}{T_{\text{total}}} = \frac{1}{2P}. \quad (3.24)$$



3.7. ábra. Instabil tartományok. $P = 3$. Folytonos vastag vonal: eredő instabil tartomány. Szaggatott vastag vonalak: instabilitási tartomány rezonátoronként $i = 1 \dots 3$.

Amennyiben a rendszer több szenzort tartalmaz, és az ebben a szakaszban bemutatott stabilitási feltétel minden szenzor esetén érvényes, abban az esetben a teljes rendszer stabilitása biztosított [14, 3.6.2. alfejezet].

A lényegi különbség az egyszerű mintatovábbító rendszerhez képest, hogy elosztott rezonátorok esetén alacsonyabb frekvencián is gondot okozhat a folyamatos elcsúszás, mert az egyszerű adatgyűjtéssel szemben nem korlátozódik a késleltetés egy mintára. Bármilyen alacsony frekvencián egy idő után instabil lesz a rendszer. A stabilitást az összes harmonikus frekvenciája együttesen határozza meg.

3.3.3. Elosztott rezonátorok szinkronizálása

A szinkronizációs algoritmusnak biztosítania kell, hogy minden egységen ismert legyen a jel frekvenciája (f_1), valamint azt, hogy a $c_{i,n}$ bázisfüggvények fázisai közötti eltérés konstans legyen. A fázisoknak nem kell egzaktul megegyezni, a stabilitás ugyanis csupán azt kívánja meg, hogy egy ismert állapothoz képest ne változzon a visszacsatolásban található fázistolás.

A rendszerben a jelfeldolgozó egység által számított fázis- és frekvenciaértékeket tekintjük referenciaként, a többi egység ehhez szinkronizálódik.

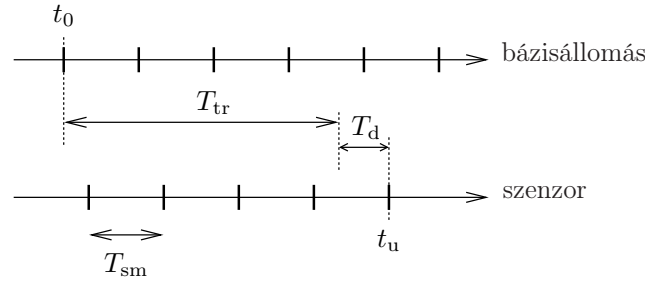
A szinkronizáció szinkronizációs üzenetek segítségével történik. Az üzenetek feldolgozása a mintavételi időpontokban történik a következő módon:

- Nem érkezett új szinkronizációs üzenet a mintavételi időpontban:
 - Fázis frissítése (3.14) alapján.
 - Frekvencia nem változik.
- Új szinkronizációs üzenet érkezett a mintavételi időpontban:
 - Frekvencia és fázis frissítése az üzenetben adott értékekkel.

A fázis esetén elegendő az alapharmonikus bázisfüggvény fázisát ($\varphi_{1,n}$) szinkronizálni, ugyanis a felharmonikusok fázisai ebből származtathatóak (2.12) analógiájára:

$$\varphi_{i,n} = i\varphi_{1,n}, \quad i = 0 \dots P. \quad (3.25)$$

$$\varphi_{i,n} = -\varphi_{N-i,n}, \quad i = P + 1 \dots N - 1. \quad (3.26)$$

3.8. ábra. Bázisfüggvények szinkronizálása (bázisállomás \leftrightarrow szenzorok).

A mivel a frekvencia általában nem változik jelentősen, így ennek szinkronizálása nem kritikus, egyszerűen a frekvenciát tartalmazó üzenetek küldésével megoldható. A fázisok ezzel szemben gyorsan változnak, így szinkronizálásuk megfontolást igényel.

Az elosztott rezonátorok szinkronizációja a 3.2.4. alfejezetben található megfontolások alapján két fázisban történik: a bázisállomás és a jelfeldolgozó egység, valamint a bázisállomás és a szenzorok között.

A szenzorok és a bázisállomás szinkronizálása

A szinkronizációs algoritmus megköveteli, hogy a 3.2.2. alfejezetben bemutatott algoritmus segítségével a szenzorok, valamint a bázisállomás mintavételezése szinkronizálva legyenek.

A 3.8. ábra a folyamat időzítési diagramját mutatja. A működés a következő. A bázisállomás a t_0 időpontban elküldi a alapharmonikus frekvencia és fázis aktuális értékeit $[f_1(t_0)$ és $\varphi_1(t_0)]$, amelyekkel a szenzorok a t_u időpontban frissítik saját változóikat.

Mivel az eszközök mintavételezése szinkronizálva van, így a $(t_u - t_0)$ értéke konstans. A szinkronizációs üzenetben elküldött fázis valódi értéke az üzenet küldése közben is változik, és ez $(t_u - t_0)f_1(t_0)$ értékű fázishibát okoz. Mivel a fázishiba konstans, így stabilitási problémát nem okoz.

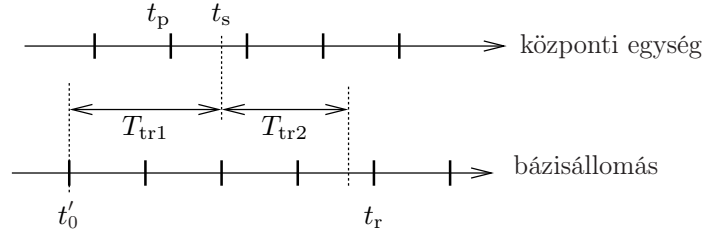
A bázisállomás és a központi jelfeldolgozó egység szinkronizálása

A szinkronizáció időzítési diagramja a 3.9. ábrán látható.

A bázisállomás t'_0 időpontban egy szinkronizációt kezdeményező üzenetet küld a jelfeldolgozó egység felé. A jelfeldolgozó egység a kezdeményező üzenet megérkezésekor kiszámítja az aktuális fázist:

$$\varphi_1(t_s) = \varphi_1(t_p) + f_1(t_p)(t_s - t_p), \quad (3.27)$$

majd $\varphi_1(t_s)$ és $f_1(t_p)$ értékeket egy szinkronizációs üzenetben elküldi a bázisállomáshoz, amely aktualizálja a saját változóit ezen értékekkel az üzenet beérkezését közvetlenül követő t_r mintavételi időpontban.



3.9. ábra. Bázisfüggvények szinkronizálása (bázisállomás \leftrightarrow központi egység).

Mivel a bázisállomás és a jelfeldolgozó egység mintavételezése nem szinkronizálható, így a $\varphi_1(t_p)$ fázis egyszerű továbbítása egy $(t_s - t_p)$ értékű változó késleltetést okozna, amelyet a (3.27) második tagja korrigál. Az üzenetek továbbításához szükséges $T_{tr1} + T_{tr2}$ idő konstansnak tekinthető a determinisztikus hálózati működés miatt, tehát a t'_0 és t_r relatív pozíciója kötött. A szinkronizációra szolgáló $\varphi_1(t_s)$ fázisinformáció továbbításához szükséges T_{tr2} idő konstansnak tekinthető a determinisztikus hálózati működés miatt, tehát a valódi fázis adott frekvencián mindig $2\pi(t_r - t_s)f$ értékkel változik meg ezen idő alatt. Ez minden frekvencián konstans fázishibát okoz, és a 3.2.1. alfejezetben leírtak alapján a konstans késleltetések és fázistolások nem okoznak stabilitási problémát.

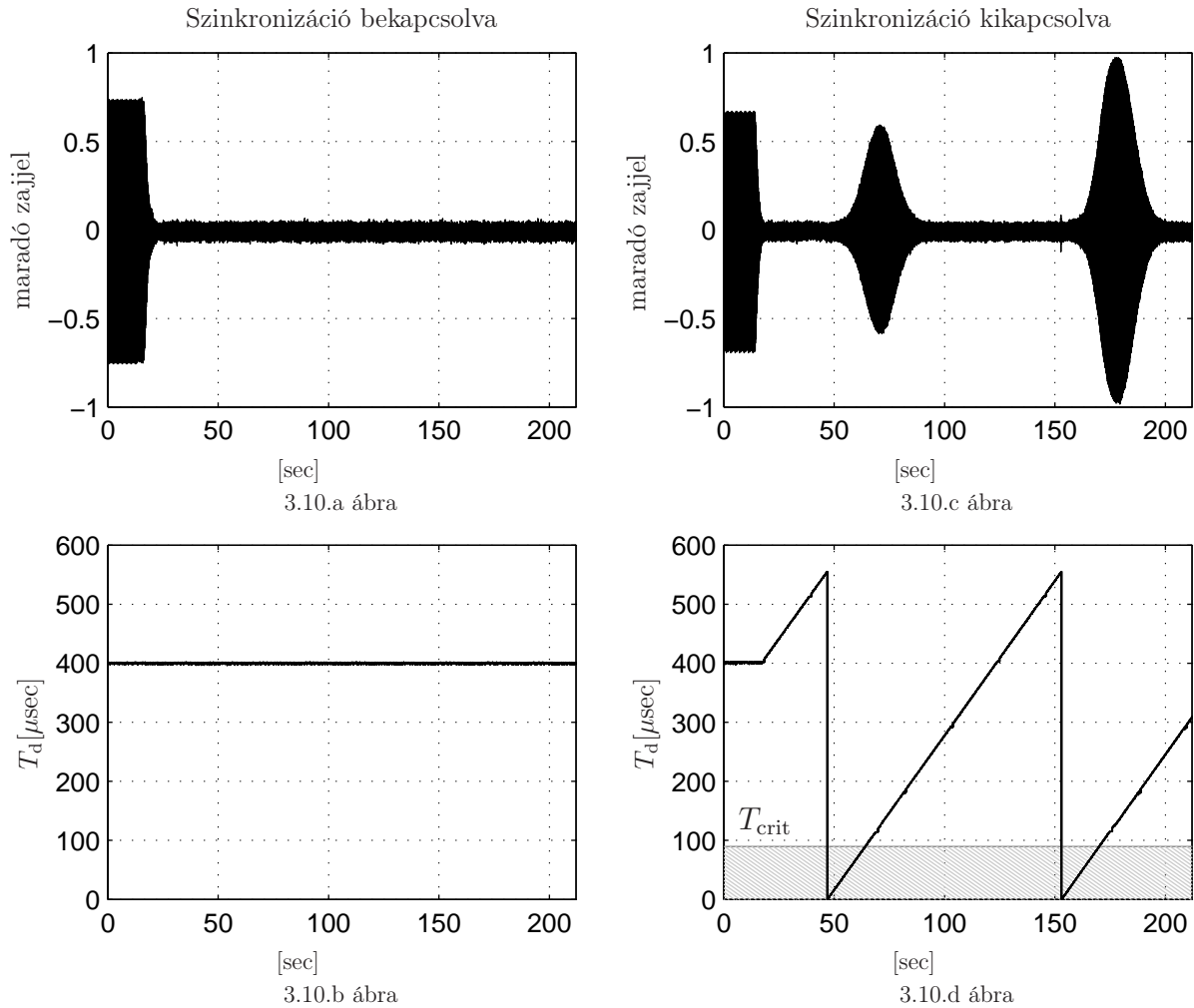
3.4. Teszteredmények bemutatása

A stabilitásra vonatkozó elméleti eredményeket, valamint a szinkronizációs algoritmusok gyakorlati tesztjeit az 1.3. ábrán látható zajcsökkentő rendszerben végeztem egy szenzort és egy hangszórót tartalmazó (egycsatornás) elrendezésben. A zajcsökkentési kísérletek során $f_{zaj} = 115$ Hz-es mesterségesen generált szinuszos zavarjelet alkalmaztam (y_n), a szenzor és a hangszóró távolsága 50 cm volt. A zajérzékelő szenzornál létrejövő zajszintet egy tőle 1 cm-es távolságban elhelyezett mikrofont felhasználva PC-n rögzítettem.

A mérések alapkonceptiója, hogy a zajcsökkentő rendszert ki- és bekapcsolt szinkronizáció mellett is üzemeltetjük. Az elméleti eredmények alapján bekapcsolt szinkronizáció mellett a zajcsökkentő rendszernek stabilnak kell maradnia, míg kikapcsolt szinkronizáció esetén egy idő elteltével instabillá kell válnia. Az $S(z)$ átvitel mérésére (identifikációjára) szinkronizált állapotban került sor, tehát $\hat{S}(z)$ a fix késleltetéseket tartalmazta.

Egyszerű mintatovábbító rendszer

A mérési eredmények a 3.10. ábrán láthatók. Az egymás alatt elhelyezkedő ábrák időben összetartozó eredményeket jelenítenek meg. A felső ábrán a zajérzékelő szenzornál mérhető zaj időfüggvénye, míg az alsó diagramokon a 3.1. ábrán T_d -vel jelölt mennyiség látható. A bal, illetve jobb oszlopok a be-, illetve kikapcsolt szinkronizáció esetén mérhető értékeket mutatják.



3.10. ábra. Vezeték nélküli zajcsökkentő rendszer mérési eredményei. Egyszerű adatgyűjtő rendszer. (a) és (c): a hibajel be- és kikapcsolt szinkronizáció mellett. (b) és (d): T_d be- és kikapcsolt szinkronizáció mellett.

A szinkronizált állapotot vizsgálva a zajszint $t_{\text{ANCon}} = 15$ sec-et követően, a rendszer indítása után elkezdi csökkenni, és az állandósult állapotot elérve mindvégig stabil marad (3.10(a). ábra). A zajcsökkentés mértéke a kezdeti szinthez képest 26 dB. A szinkronizáció működésének helyességét a 3.10(b). ábra igazolja. Látható, hogy a T_d késleltetés konstans $T_d^0 = 400 \mu\text{sec}$ szinten marad, amelyet a 3.2.2. alfejezetben bemutatott szinkronizációs algoritmus biztosít.

A 3.10(c) és (d) ábrák a rendszer változóit ábrázolják kikapcsolt szinkronizáció esetén. A zajcsökkentő rendszer szinkronizációs algoritmus $t_{\text{syncoff}} = 20$ sec-ig volt bekapcsolva, aztán a rendszer szinkronizálatlan állapotban működött tovább. A szinkronizáció kikapcsolását követően T_d értéke rögtön elkezdi változni, tehát a mintavételi időpontok kezdenek elcsúszni egymáshoz képest. A csúszás gyorsasága (drift) a fűrészelj meredekségéből számítható, amely $\rho = 5.5$ ppm. T_d értéke a $[0 \dots 555] \mu\text{sec}$ intervallumban változik, amely a mótók $T_{\text{sm}} = \frac{1}{f_{\text{sm}}} = \frac{1}{1800 \text{ Hz}} =$

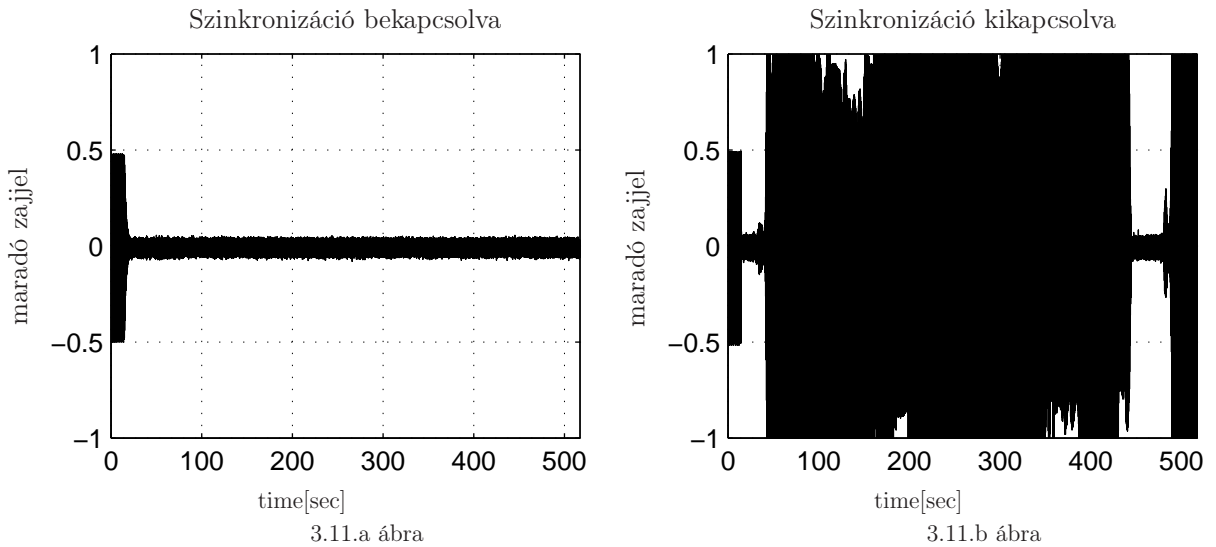
555 μsec értékű mintavételi periódusidejének köszönhető (lásd 3.2.1. alfejezet).

Az algoritmus stabilitásához megengedhető maximális $|\Delta T_d|$ megváltozás (3.8) egyenlet alapján számítható. Figyelembe véve, hogy a zaj frekvenciája $f_{\text{zaj}} = 115 \text{ Hz}$, és a mintavételi frekvencia a jelfeldolgozó processzoron $f_s = 2000 \text{ Hz}$, így a relatív alapharmonikus frekvencia: $f_1 = \frac{115 \text{ Hz}}{2000 \text{ Hz}} = 0.0575$. A mótok 1800 Hz-es mintavételi frekvenciája miatt maximum $P = 7$ rezonátorpár valósítható meg, így $\max(f_i) = f_P = 7 \cdot 0.0575 = 0.4025$, tehát:

$$|\Delta T_d| < \frac{1}{4f_s f_P} = 310 \mu\text{sec}. \quad (3.28)$$

A 3.10(d). ábrán a $T_{\text{crit}} = T_d^0 - |\Delta T_d| = 90 \mu\text{sec}$ vonal jelöli a stabilitás határhelyzetét. Amennyiben T_d az alatta található szürkével satírozott tartományba lép, a stabilitás feltétele nem teljesül. Összevetve a 3.10(c) és (d) ábrákat látható, hogy a kritikus tartományba belépve a rendszer instabillá válik, amelyet az egyre növekvő zajszint jelez. Miután T_d elhagyja a kritikus tartományt, a rendszer újra stabilizálódik, és beáll az állandósult állapotba.

Elosztott rezonátoros rendszer



3.11. ábra. Elosztott rezonátor alapú zajcsökkentő rendszer mérési eredményei.

Az elosztott rezonátoros zajelnyomó rendszerhez tartozó mérési eredmények a 3.11. ábrán láthatók. A grafikonokon a zajérzékelő szenzornál mérhető zaj időfüggvénye látható. A 3.11(a) ábrán a bekapcsolt szinkronizáció mellett mérhető hibajel látható. A zajcsökkentő algoritmus a bekapcsolását követően ($t_{\text{ANC on}} = 15 \text{ sec}$) beáll az állandósult állapotba, és mindvégig stabilan üzemel. A zajelnyomás mértéke 26 dB.

A 3.11(b). ábrán a szinkronizálatlan rendszer mérési eredményei láthatók. A zajcsökkentő algoritmus bekapcsolása $t_{\text{ANC on}} = 15 \text{ sec}$ időpontban történt, a szinkronizáció $t_{\text{sync off}} = 20 \text{ sec}$ időpontig üzemelt. Közvetlenül a szinkronizáció kikapcsolását

követően a rendszer még stabil marad, de aztán 42 sec időpontban instabillá válik (az instabil állapotban megnövekedett zajszint miatt a mérőmikrofon telítődött).

A 3.3.2. alfejezetben leírtak alapján az elcsúszás mértéke az elosztott rezonátoros rendszerben nem korlátozódik egy mintavételnyi periódusidőre, emiatt az instabil állapot jóval hosszabb ideig tart, mint a 3.10(c). ábrán látható esetben. Az instabil állapotok kialakulásának magyarázatát a 3.7. ábra illusztrálja. A stabil állapot aránya a teljes üzemidőhöz képest számítható a 3.11(b). ábra alapján. Egy teljes instabil-stabil állapotpárt tartalmazó periódus a [42..488] sec intervallum, ahol [42..442] sec intervallumban instabil, és [442..488] sec tartományban stabil a rendszer, tehát:

$$\frac{T_{\text{stabil}}}{T_{\text{total}}} = \frac{488 - 442}{488 - 42} = 0.1031, \quad (3.29)$$

míg (3.24) alapján számított érték $\frac{1}{2P} = \frac{1}{10} = 0.1$, mivel a mótok limitált számítási kapacitásuk miatt $P = 5$ rezonátorpárt képesek megvalósítani. Látható, hogy az elvi érték összhangban van a mérési eredménnyel.

Az elosztott rezonátoros rendszerben a legnagyobb gyakorlatban tesztelt kiépítés hat hangszórót és nyolc szenzort tartalmazott, szemben a mintatovábbításon alapuló rendszerrel, ahol három szenzor alkalmazása volt lehetséges. Az elosztott jelfeldolgozás segítségével tehát elérhető a sáv szélesség kedvezőbb kihasználása.

3.5. Eredmények összegzése

Ebben fejezetben a hálózaton keresztül dinamikusan visszacsatolt rezonátoros struktúra stabilitási és szinkronizációs kérdéseit vizsgáltam. Bemutattam, hogy a hálózati visszacsatolás hogyan jellemezhető jelfeldolgozási szempontból, és ennek alapján vizsgáltam a hálózati adatátvitel jelfeldolgozó algoritmusra gyakorolt hatását. Alapvető probléma az eltérő időalapok miatt bekövetkező szinkronizátlanság miatt jelentkezik, a hálózat által okozott konstans értékű késleltetések a stabilitást nem befolyásolják.

Kétféle adatátviteli módszert vizsgáltam. Az egyik módszer szerint a szenzorok a mintavételezett jeleket átalakítás nélkül továbbítják a jelfeldolgozó egység irányába. Ebben az esetben megmutattam, hogy a mintavételi és jelfeldolgozási időpontok között mekkora maximális elcsúszás engedhető meg egy ismert (identifikált) állapothoz képest. Az eredmények alapján látható, hogy a rendszer szinkronizálás nélkül is stabilizálható, amennyiben a rezonátorokat csupán egy kritikus frekvencia alatt üzemeltetjük. Ez jó közelítéssel a mintavételi frekvencia negyede. Az általános stabilitás biztosítása érdekében bemutattam egy, a mintavételi frekvencia hangolásán alapuló PLL-elvű algoritmust, amely fizikailag is biztosítja a mintavételi időpontok közötti állandó eltérést. Szakirodalmi hivatkozás alapján röviden ismertettem az interpoláción alapuló szinkronizációs módszert, és egy lehetséges szinkronizációs láncolatot ajánlottam az 1.3. alfejezetben bemutatott architektúrához, amelyben a szenzorok adatainak továbbítását egy bázisállomás végzi a központi jelfeldolgozó egység irányába. Az ajánlott módszer szerint a hálózaton belül célszerű fizikailag szinkroni-

zálni a mintavételi időpontokat, és a hálózat interpolációt felhasználva illeszthető a központi egységhez.

A másik adatátviteli módszer szerint a szenzorok előfeldolgozást hajtanak végre az érzékelt jelen egy lokálisan futtatott rezonátoros megfigyelő segítségével, így egy elosztott jelfeldolgozó architektúra jön létre. Az elosztott architektúra elsődleges előnye az adatredukció, amely lehetővé teszi a sávszélesség kedvező kihasználását és több szenzor használatát, de a lokális feldolgozás miatt csökkentheti az adatvesztés hatását is. Hátránya, hogy nagy számítási kapacitást igényel a szenzorok részéről. Stabilitás szempontjából lényeges eltérés az egyszerű mintatovábbító rendszerhez képest, hogy ebben az esetben nem adható olyan frekvencia, amely alatt minden esetben stabil a rendszer. Ebben a rendszerben az elosztottan működő rezonátorokban felhasznált bázisfüggvények szinkronizálását kell megoldani. A szinkronizációra egy kétszintű szinkronizációs eljárást dolgoztam ki, amely a szenzorok és a bázisállomás, illetve a bázisállomás és a jelfeldolgozó egység között biztosítja a szinkronizációt. Az elosztott rezonátorok nemcsak visszacsatolt rendszerekben, hanem periodikus jeleket megfigyelő mérőrendszerekben is alkalmazhatók.

Az elméleti számítások helyességét gyakorlati mérések is megerősítették, amelyek összhangban voltak az elméleti eredményekkel.

Az itt közölt eredményeket a [2] cikkben publikáltam.

4. fejezet

Alacsony sávszélességigényű adaptív algoritmusok bemutatása

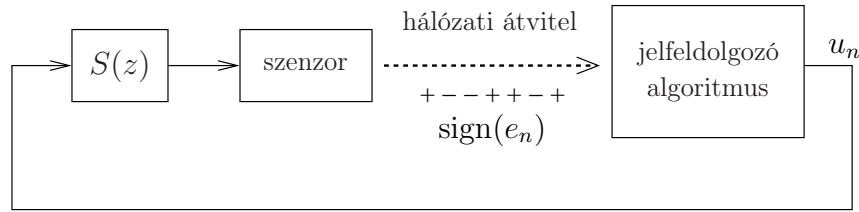
Ebben a fejezetben a dinamikus visszacsatolt rezonátoros struktúra és az FxLMS algoritmus visszacsatoló ágában továbbítandó adatok mennyiségének csökkentésére kifejlesztett eljárásokat mutatok be. Habár a 3.3.1. alfejezetben ismertetett elosztott rezonátoros algoritmus állandó paraméterű zaj esetén elvileg bármekkora mértékű adatredukciót lehetővé tesz a Fourier-együtthatók továbbítási gyakoriságának csökkentésével a beállítás lassulása árán, de csupán periodikus jelek esetén alkalmazható, és nagy számítási teljesítményt igényel a szenzorok részéről. A bemutatásra kerülő módszerek előnye, hogy sztochasztikus jelek esetén is alkalmazhatóak, és a szenzorokon történő implementálásuk nem erőforrás-igényes. Hátrányuk, hogy még hosszú távon állandó paraméterű jelek esetén sem korlátlan az adatredukció mértéke.

A javasolt algoritmus a 2.3.1. alfejezetben bemutatott hibaelőjel alapú adaptációs szabályt alkalmazza dinamikus visszacsatolt struktúrák esetén. A szakirodalomban elérhető eredmények egységnyi visszacsatolással rendelkező struktúrákra vonatkoznak, így dolgozatomban megvizsgálom, hogy a dinamikus visszacsatolás esetén is alkalmazható-e a hibaelőjeles adaptáció, és ez hogyan módosítja a hibaelőjeles algoritmusok ismert tulajdonságait. Ezen túl egy, a konvergenciatulajdonságokat javító módszert is ismertetek.

Az analízist mind rezonátoros, mind FxLMS algoritmus esetén bemutatom.

4.1. Hibaelőjeles rezonátoros struktúra

Ebben az alfejezetben a hibaelőjeles dinamikus visszacsatolt rezonátoros struktúrát ismertetem, kitérve az azt leíró egyenletekre, az adatátvitel során elérhető sávszélesség-nyereség számítására, valamint az algoritmus tulajdonságainak kvalitatív és kvantitatív magyarázatára.



4.1. ábra. Hibaelőjeles algoritmus alkalmazása.

4.1.1. Algoritmus bemutatása

A hibaelőjeles dinamikusan visszacsatolt rezonátoros struktúra állapotegyenlete az eredeti algoritmust leíró (2.88)–(2.90) egyenletek módosításával adódik, oly módon, hogy az e_n hibajel helyett annak előjelét alkalmazzuk az állapotfrissítés során:

$$u_n = \mathbf{c}_n^T \hat{\mathbf{x}}_n, \quad (4.1)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \hat{\mathbf{x}}_n + \alpha \mathbf{W} \mathbf{c}_n^* \text{sign}(e_n). \quad (4.2)$$

Az egyenletekben a jelölések egyszerűsége érdekében $\frac{\alpha}{N}$ helyett α -t használom a konvergenciaparaméter jelölésére [14].

A hiba nagyságát az algoritmus nem használja fel az adaptációhoz, így ezen tulajdonságuk miatt a hibaelőjeles algoritmusokat gyakran fix lépésközű algoritmusként is említik.

Az algoritmus felhasználásának rendszerszintű vázlata a 4.1. ábrán látható. A hibajelét érzékelő szenzor az eredetileg b bites adatok helyett csupán a hiba előjelét továbbítja a központi egység felé, ezáltal csökkentve a kommunikáció sávszélességigényét.

Az algoritmus segítségével ideális esetben b -ed részére lenne csökkenthető az adatmennyiség. Reálisabb kép kapható az elérhető sávszélesség-nyereségről a következő feltételezések alkalmazásával:

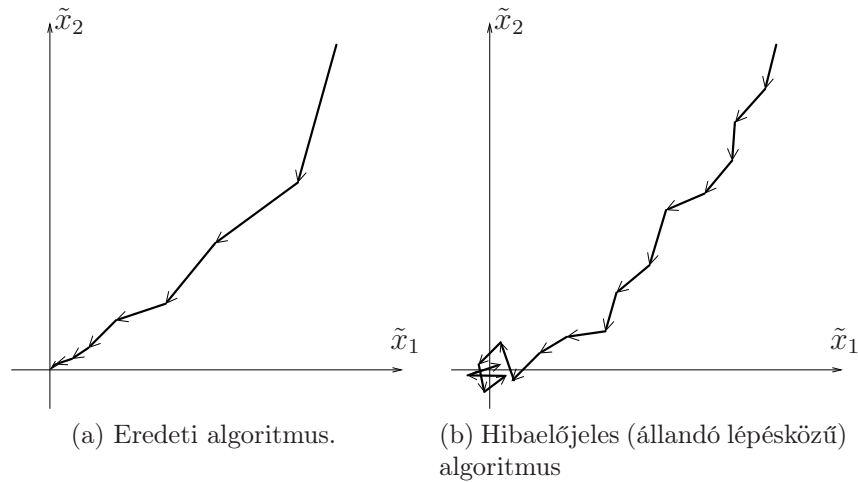
- 1) csomag alapú kommunikáció,
- 2) D darab minta csomagonként (D bitnyi adat hibaelőjeles algoritmus esetén),
- 3) b bites számábrázolás az eredeti algoritmus esetén (összesen Db bit/csomag),
- 4) o bites overhead csomagonként.

Ezen feltételek mellett a hibaelőjeles algoritmus által elért sávszélesség-csökkenés az eredeti algoritmushoz viszonyítva:

$$\eta = \frac{D + o}{Db + o} = \frac{1 + o/D}{b + o/D}. \quad (4.3)$$

A legnagyobb nyereség határértékben b -szeres csökkenést jelent. Ezt akkor tudjuk megközelíteni, amennyiben egy csomagban minél több adatot továbbítunk. Ekkor az overhead aránya csökken, tehát o/D kicsi.

Példaként reális feltételezés ZigBee kompatibilis kommunikáció [58] esetén 15 byte ($o = 120$ bit) méretű overhead, valamint $D = 24$ darab $b = 8$ bites



4.2. ábra. Konvergenciatulajdonságok illusztrációja.

adat/csomag. Ebben az esetben $\eta = 0.4615$, tehát több mint kétszeres csökkenés érhető el az elküldött adatmennyiségben.

Tovább növelhető a nyereség, amennyiben a hibaelőjeles algoritmus esetén több adatot küldünk egy csomagban, mint amennyi a hagyományos algoritmus esetén a protokoll által engedett maximális csomagméret miatt lehetséges. Ebben az esetben természetesen számolnunk kell a növekvő késleltetés negatív hatásaival.

A kommunikációs igény csökkentése miatt a rendelkezésre álló sávszélesség mellett több szenzor alkalmazható, ezen túlmenően a fogyasztás szempontjából is előnyös, mivel a kommunikáció energiaigényes művelet.

Habár a (2.113) definíció alapján az előjelfüggvény értékészlete a nulla értéket is tartalmazza, a 4.1. ábrán a szenzor csupán $+/-$ értékeket továbbít, ellenkező esetben két bitre lenne szükség $\text{sign}(e_n)$ ábrázolásához. Amennyiben $e_n = 0$ fordul elő, abban az esetben ajánlott véletlenszerűen $+/-$ értéket továbbítani, így ofszetmentes lesz a visszacsatolás. A gyakorlatban a nulla szint ábrázolása nem kritikus, a zaj miatt egzaktul zérus hiba általában nem teljesíthető. Ennek megfelelően az analízis során továbbra is az előjelfüggvény (2.113) definícióját használom, amely jól közelíti a valós működést.

A rezonátoros algoritmus konvergenciatulajdonságai az előjelfüggvény alkalmazása miatt jelentős mértékben megváltoznak. Két változást érdemes kiemelni az eredeti algoritmushoz képest:

- Ideális esetben sem érhető el zérus hiba.
- Általában hosszabb beállási idő.

Ezen tulajdonságok szemléletes magyarázatában segít a 4.2. ábra. A 4.2(a). ábra az eredeti algoritmus paramétereinek konvergenciáját illusztrálja, amelyek exponenciális jelleggel közelítenek az optimális értékhez. Az optimumtól távol e_n értéke általában nagy, így nagyobb mértékben módosulnak a paraméterek, míg az optimumhoz közel a hiba kicsi, így finomabb lépésekkel konvergálnak az optimum irányába. A

hibaelőjeles algoritmus esetén a hiba értéke nem, csupán az $\alpha \mathbf{W} \mathbf{c}_n^*$ tag befolyásolja a lépés nagyságát. A fix lépésköz miatt az algoritmus nem képes az optimumba belépni, hanem az optimum környezetében lépked. A lépésköz nagysága α értékkel hangolható. Kis állandósult állapotbeli hiba kis α -t kíván, ekkor viszont lassú a beállítás.

A dolgozatban a hibaelőjeles algoritmus működésének azon szakaszát, amelyben a paramétervektor az optimum körül lépked, állandósult állapotnak nevezem.

A következő szakaszokban az itt ismertetett viselkedést támasztom alá analitikus vizsgálatokkal.

A hibaelőjeles algoritmus többszörösre kiterjeszthető az eredeti algoritmusnak megfelelően [14]:

$$\hat{\mathbf{x}}_{n+1}^m = \hat{\mathbf{x}}_n^m + \alpha \sum_{l=1}^L \mathbf{W}^{m,l} \mathbf{c}_n^* \text{sign}(e_{l,n}), \quad m = 1 \dots M \quad (4.4)$$

$$u_n^m = \mathbf{c}_n^T \hat{\mathbf{x}}_n^m, \quad m = 1 \dots M. \quad (4.5)$$

Az l indexű változók az l -edik bemenethez, míg az m indexű változók az m -edik kimenethez tartoznak. A változók definíciói a 2.2.3. alfejezetben találhatóak.

A továbbiakban az egyszörös rendszer analízisével foglalkozom.

Az analízis során feltételezem, hogy az $S(z)$ dinamikus rendszer s_k -val jelölt impulzusválasza tartalmaz legalább d mintányi késleltetést, tehát:

$$\gamma_k = s_{k+d} \quad \text{és} \quad \{s_k = 0; k < d\}, \quad (4.6)$$

ahol γ_k az impulzusválasz azon része, amelyről már nem tudjuk, hogy tartalmaz-e több késleltetést. Amennyiben nem ismert a késleltetés mértéke, úgy $d = 0$ választás is lehetséges. A késleltetés a hálózati adattovábbítás természeténél fogva jelenik meg az impulzusválaszban.

A számítások során kihasználom, hogy \mathbf{c}_n normája:

$$\|\mathbf{c}_n\| = \sqrt{N}, \quad (4.7)$$

ami abból következik, hogy (2.11) miatt: $\|\mathbf{c}_n\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{N-1} c_{i,n}^* c_{i,n}} = \sqrt{\sum_{i=0}^{N-1} 1}$.

4.1.2. Hiba abszolút középértékének számítása

A hibaelőjeles algoritmusok teljesítményének általános mérőszáma az e_n hibajel abszolút középértéke (MAE: Mean Absolute Error) [80], amelyet ebben a szakaszban a hibaelőjeles dinamikusan visszacsatolt rezonátoros struktúrára számítok ki. Az analízis alaplépéseit [80] alapján végeztem.

A hiba abszolút középértékére az E_n^a jelölést alkalmazom, amely:

$$E_n^a = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |e_k|. \quad (4.8)$$

A hiba abszolút középértéke állandósult állapotban, amikor $n \rightarrow \infty$:

$$E_{ss}^a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |e_k|. \quad (4.9)$$

A hiba abszolút középértékének számításához definiáljuk a ξ változót:

$$\xi = \|\mathbf{W}\| \sum_{k=1}^{\infty} k |\gamma_k|. \quad (4.10)$$

A fenti formula levezetésére később kerül sor. Látható, hogy alapvetően az impulzusválasz súlyozott összege. Szemléletesen fogalmazva ξ értéke annál nagyobb, minél nagyobb időindex felé tolódnak impulzusválasz nagy energiájú részei.

Feltételezve, hogy létezik egy n_n megfigyelési zaj is, definiáljuk a

$$\nu = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |n_k|, \quad n \gg 1, \quad (4.11)$$

változót, amely n_n abszolút középértékét adja meg. Feltételezve, hogy n elég nagy, ν jó közelítéssel konstansnak tekinthető.

A következő tétel E_n^a és E_{ss}^a felső korlátait adja meg, amelyeket rendre az \bar{E}_n^a és \bar{E}_{ss}^a változókkal jelöltem.

4.1. Tétel. *A hibaelőjeles dinamikusan visszacsatolt rezonátoros struktúra esetén a hibajel abszolút középértékének felső korlátja:*

$$E_n^a \leq \bar{E}_n^a, \quad (4.12)$$

$$\bar{E}_n^a = \frac{1}{2n\alpha} \|\mathbf{S}\tilde{\mathbf{x}}_0\|^2 + \alpha N \left(\frac{1}{2} + d + \xi \right) + \nu. \quad (4.13)$$

Állandósult állapotban a hiba abszolút középértékének felső korlátja:

$$E_{ss}^a \leq \bar{E}_{ss}^a, \quad (4.14)$$

$$\bar{E}_{ss}^a = \alpha N \left(\frac{1}{2} + d + \xi \right) + \nu. \quad (4.15)$$

Bizonyítás: Az A. Függelék alapján (lásd A.1. Lemma):

$$y'_n = \mathbf{c}_n^T \mathbf{S} \hat{\mathbf{x}}_{n'} - h_n^r, \quad (4.16)$$

ahol $n' = n - d$ egy késleltetett időindex, és h_n^r kifejezést az (A-2) egyenlet definiálja. Az y'_n fenti alakját használva a hibajel is számítható (2.89) és (2.23) alapján. Az n_n -nel jelölt additív mérési zajt is figyelembe véve:

$$e_n = y_n - y'_n + n_n = \mathbf{c}_n^T (\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_{n'}^S) + h_n^r + n_n, \quad (4.17)$$

ahol

$$\hat{\mathbf{x}}_n^S = \mathbf{S} \hat{\mathbf{x}}_n \quad (4.18)$$

egyszerűsítő jelölést alkalmazom. Az $\hat{\mathbf{x}}_n^{\mathbf{S}}$ vektor a rezonátorok $\hat{\mathbf{x}}_n$ állapotváltozóinak az $S(z)$ rendszer rezonátorfrekvenciákon mérhető átvitelével szorzott értékeit tartalmazza. Mivel $\hat{\mathbf{x}}_n$ az $S(z)$ rendszer bemenő jelének Fourier-együtthatóit tartalmazza, így $\hat{\mathbf{x}}_n^{\mathbf{S}}$ a $S(z)$ kimenetére transzformált Fourier-együtthatókat jelöli a $\hat{\mathbf{x}}_n$ állandósult értéke esetén. Mivel az $S(z)$ kimenő jelének előírt értéke y_n , amelynek Fourier-együtthatóit \mathbf{x}_n tartalmazza, így amennyiben $\hat{\mathbf{x}}_n^{\mathbf{S}} \equiv \mathbf{x}_n$, a hibajel nullára csökken. Ez alapján definiálhatjuk az $\tilde{\mathbf{x}}_n^{\mathbf{S}}$ -re vonatkozó hibafüggvényt:

$$\tilde{\mathbf{x}}_n^{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{x}}_n^{\mathbf{S}} - \mathbf{x}_n. \quad (4.19)$$

$\tilde{\mathbf{x}}_n^{\mathbf{S}}$ időbeni változását leíró rekurzív összefüggés megkapható (4.2) mindkét oldalát beszorozva \mathbf{S} -sel, figyelembe véve, hogy $\mathbf{W} = \mathbf{S}^{-1}$ és kivonva mindkét oldalból \mathbf{x}_n -et:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{n+1}^{\mathbf{S}} = \tilde{\mathbf{x}}_n^{\mathbf{S}} + \alpha \mathbf{c}_n^* \text{sign}(e_n). \quad (4.20)$$

Mivel $(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_{n'}^{\mathbf{S}}) = [(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n^{\mathbf{S}}) + (\hat{\mathbf{x}}_n^{\mathbf{S}} - \hat{\mathbf{x}}_{n'}^{\mathbf{S}})]$, így (4.17) átírható a következő alakra:

$$e_n = -\mathbf{c}_n^{\text{T}} \tilde{\mathbf{x}}_n^{\mathbf{S}} + \mathbf{c}_n^{\text{T}} (\hat{\mathbf{x}}_n^{\mathbf{S}} - \hat{\mathbf{x}}_{n'}^{\mathbf{S}}) + h_n^{\text{r}} + n_n. \quad (4.21)$$

Szorozzuk össze a (4.20) egyenletben adott $\tilde{\mathbf{x}}_{n+1}^{\mathbf{S}}$ vektort a transzponált konjugáltjával, ami az Euklideszi-norma négyzetét szolgáltatja:

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{x}}_{n+1}^{\mathbf{S}}\|^2 &= [\tilde{\mathbf{x}}_n^{\mathbf{S}} + \alpha \mathbf{c}_n^* \text{sign}(e_n)]^{\text{H}} [\tilde{\mathbf{x}}_n^{\mathbf{S}} + \alpha \mathbf{c}_n^* \text{sign}(e_n)] \\ &= \|\tilde{\mathbf{x}}_n^{\mathbf{S}}\|^2 + \alpha^2 \text{sign}(e_n) \mathbf{c}_n^{\text{T}} \mathbf{c}_n^* \text{sign}(e_n) + \alpha \text{sign}(e_n) \mathbf{c}_n^{\text{T}} \tilde{\mathbf{x}}_n^{\mathbf{S}} + \alpha \text{sign}(e_n) (\tilde{\mathbf{x}}_n^{\mathbf{S}})^{\text{H}} \mathbf{c}_n^* \\ &= \|\tilde{\mathbf{x}}_n^{\mathbf{S}}\|^2 + \alpha^2 \text{sign}(e_n) \mathbf{c}_n^{\text{T}} \mathbf{c}_n^* \text{sign}(e_n) + 2\alpha \text{sign}(e_n) \mathbf{c}_n^{\text{T}} \tilde{\mathbf{x}}_n^{\mathbf{S}}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

ahol kihasználtam, hogy $\mathbf{c}_n^{\text{T}} \tilde{\mathbf{x}}_n^{\mathbf{S}}$ valós értékű, tehát $\mathbf{c}_n^{\text{T}} \tilde{\mathbf{x}}_n^{\mathbf{S}} = (\tilde{\mathbf{x}}_n^{\mathbf{S}})^{\text{H}} \mathbf{c}_n^*$. $\mathbf{c}_n^{\text{T}} \tilde{\mathbf{x}}_n^{\mathbf{S}}$ behelyettesíthető a (4.21) egyenletből, és mindkét oldal osztható 2α -val:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\alpha} \|\tilde{\mathbf{x}}_{n+1}^{\mathbf{S}}\|^2 &= \frac{1}{2\alpha} \|\tilde{\mathbf{x}}_n^{\mathbf{S}}\|^2 + \frac{\alpha}{2} \text{sign}(e_n) \text{sign}(e_n) \mathbf{c}_n^{\text{T}} \mathbf{c}_n^* + \text{sign}(e_n) \mathbf{c}_n^{\text{T}} (\hat{\mathbf{x}}_n^{\mathbf{S}} - \hat{\mathbf{x}}_{n'}^{\mathbf{S}}) \\ &\quad + \text{sign}(e_n) h_n^{\text{r}} + \text{sign}(e_n) n_n - \text{sign}(e_n) e_n. \end{aligned} \quad (4.23)$$

A (4.23) egyenletben $\text{sign}(e_n) e_n = |e_n|$, tehát az e_n abszolút értékét adja. Mivel $\text{sign}(e_n)$ csupán a $\{+1, 0, -1\}$ értékeket veheti fel, így $\text{sign}(e_n) \text{sign}(e_n) \leq 1$, $\text{sign}(e_n) x \leq |x|$ bármely x -re és $\mathbf{c}_n^{\text{T}} \mathbf{c}_n^* = N$. Ezen megállapításokat felhasználva (4.23) a következő egyenlőtlenséggé alakítható:

$$\frac{1}{2\alpha} \|\tilde{\mathbf{x}}_{n+1}^{\mathbf{S}}\|^2 \leq \frac{1}{2\alpha} \|\tilde{\mathbf{x}}_n^{\mathbf{S}}\|^2 + \frac{\alpha}{2} N + |\mathbf{c}_n^{\text{T}} (\hat{\mathbf{x}}_n^{\mathbf{S}} - \hat{\mathbf{x}}_{n'}^{\mathbf{S}})| + |h_n^{\text{r}}| + |n_n| - |e_n|. \quad (4.24)$$

A (4.24) jobb oldalán található kifejezések felső korlátai az A. Függelékben találhatóak (lásd (A-10) és (A-13)):

$$\frac{1}{2\alpha} \|\tilde{\mathbf{x}}_{n+1}^{\mathbf{S}}\|^2 \leq \frac{1}{2\alpha} \|\tilde{\mathbf{x}}_n^{\mathbf{S}}\|^2 + \frac{1}{2} \alpha N + \alpha N d + \alpha N \xi + |n_n| - |e_n|. \quad (4.25)$$

A (4.25) rekurzív egyenletet kifejtve $\|\tilde{\mathbf{x}}_n^{\mathbf{S}}\|^2$ számítható:

$$\frac{1}{2\alpha} \|\tilde{\mathbf{x}}_n^{\mathbf{S}}\|^2 \leq \frac{1}{2\alpha} \|\tilde{\mathbf{x}}_0^{\mathbf{S}}\|^2 + n\alpha N \left(\frac{1}{2} + d + \xi \right) + \sum_{k=0}^{n-1} |n_k| - \sum_{k=0}^{n-1} |e_k|. \quad (4.26)$$

Mivel $0 \leq \frac{1}{2\alpha} \|\tilde{\mathbf{x}}_n^{\mathbf{S}}\|^2$, a (4.26) mindkét oldalát osztva n -nel, aztán átrendezve, a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$0 \leq \frac{1}{2n\alpha} \|\tilde{\mathbf{x}}_0^{\mathbf{S}}\|^2 + \alpha N \left(\frac{1}{2} + d + \xi\right) + \nu - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |e_k|,$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |e_k| \leq \frac{1}{2n\alpha} \|\tilde{\mathbf{x}}_0^{\mathbf{S}}\|^2 + \alpha N \left(\frac{1}{2} + d + \xi\right) + \nu. \quad (4.27)$$

Ezen eredmény alapján (4.12) közvetlenül, (4.14) pedig $n \rightarrow \infty$ határérték számításával következik. ■

Ezen szakasz fő eredménye a hibajelre mint a visszacsatolt rendszer elsődleges minőségi jellemzőjére adható felső korlát megadása; az állapotváltozók viselkedésének elemzése nem volt cél. Egzakt megállapításokhoz és az állapotváltozók optimum körüli viselkedésének leírásához (pl. határciklus kialakulásának kérdése) további vizsgálatok szükségesek. A 4.2.2. alfejezet végén leírt megállapítások alapján feltételezhető, hogy az állapotváltozók optimumtól való távolságára is adható valamilyen felső korlát.

4.1.3. Beállási idő vizsgálata

Ebben a szakaszban megmutatom, hogy a fix méretű lépéseknek köszönhetően alsó korlát adható a hibaelőjeles rezonátoros algoritmus beállási idejére.

4.2. Tétel. *Jelölje τ a hibaelőjeles rezonátoros algoritmus állandósult állapotának eléréséhez szükséges lépésszámot. τ alsó korlátja $\underline{\tau}$, amely a következő alakú:*

$$\tau \geq \underline{\tau}, \quad (4.28)$$

$$\underline{\tau} = \frac{\|\tilde{\mathbf{x}}_0^{\mathbf{S}}\|}{\alpha\sqrt{N}} = \frac{\|\tilde{\mathbf{x}}_0^{\mathbf{S}}\|}{\alpha N} \sqrt{N}. \quad (4.29)$$

Bizonyítás: A (4.20) egyenletben adott rekurziót kifejtve τ időpontig a következő egyenletet kapjuk:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{\tau}^{\mathbf{S}} = \tilde{\mathbf{x}}_0^{\mathbf{S}} + \alpha \sum_{i=0}^{\tau-1} \mathbf{c}_i^* \text{sign}(e_i). \quad (4.30)$$

A beállási időre vonatkozó alsó korlátot oly módon számíthatjuk, hogy feltételezzük, hogy az algoritmus elérte az optimumot, tehát a paraméterhiba nullává vált: $\tilde{\mathbf{x}}_{\tau}^{\mathbf{S}} = 0$. Ebben az esetben:

$$\tilde{\mathbf{x}}_0^{\mathbf{S}} = -\alpha \sum_{i=0}^{\tau-1} \mathbf{c}_i^* \text{sign}(e_i). \quad (4.31)$$

Mindkét oldal normáját számítva a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\|\tilde{\mathbf{x}}_0^{\mathbf{S}}\| = \left\| -\alpha \sum_{i=0}^{\tau-1} \mathbf{c}_i^* \text{sign}(e_i) \right\| \leq \alpha \sum_{i=0}^{\tau-1} \|\mathbf{c}_i^* \text{sign}(e_i)\|. \quad (4.32)$$

Mivel $\text{sign}(e_i)$ egy skalár változó, így $\|\mathbf{c}_i^* \text{sign}(e_i)\| \leq \|\mathbf{c}_i^*\| \|\text{sign}(e_i)\|$. Továbbá $\|\mathbf{c}_i^*\| = \sqrt{N}$ és $\|\text{sign}(e_i)\| \leq 1$ tulajdonságokat felhasználva:

$$\|\tilde{\mathbf{x}}_0^{\mathbf{S}}\| \leq \alpha \sum_{i=0}^{\tau-1} \sqrt{N} = \tau\alpha\sqrt{N}. \quad (4.33)$$

A (4.29) egyenletben adott beállási idő a fenti kifejezésből adódik. ■

Az eredmény szemléletesen magyarázható, ugyanis egy ütem alatt az algoritmus $\alpha\mathbf{c}_i^* \text{sign}(e_i)$ lépéssel változtatja az állapotváltozó optimumtól való távolságát. Egy lépés hossza, tehát normája $\alpha\sqrt{N}$. Ahhoz, hogy a kezdeti $\|\tilde{\mathbf{x}}_0^{\mathbf{S}}\|$ mértékű paraméterhibát nullává tegyük, legalább a (4.29) egyenletben adott számú lépés szükséges.

4.1.4. Eredmények értelmezése

Az algoritmus viselkedésére vonatkozó legfőbb megállapítások a (4.13), (4.15) és (4.29) egyenletek alapján tehetők meg. Habár az összefüggések nem egzakt egyenlőségek, hanem alsó és felső korlátok, segítségükkel számos következtetés levonható a paramétereknek az algoritmus működésére gyakorolt hatásáról.

A (4.13) egyenlet alapján a felső korlát egy időfüggő (tranziens), valamint egy állandó, az állandósult állapotot jellemző tagra bontható.

Az állandósult állapotban elért hiba felső korlátját (4.15) adja. Az állandósult állapot hibáját befolyásoló egyik tényező a ν , amely a mérési és egyéb, pl. a környezetből származó zavarok abszolút középértéke. A megfigyelési zaj általában nem kontrollálható, így ezt fizikai kényszernek kell tekinteni. ν magában foglalja még az ún. modellezési zajt, amikor nem üzemeltetünk elegendő rezonátort az y_n jel leírásához. Ez a hiba N növelésével csökkenthető.

A másik, az állandósult állapotban elért hibát befolyásoló tag $\alpha N (\frac{1}{2} + d + \xi)$, amely a fix méretű lépések miatt jelentkezik. Ez a tényező tervezési szempontból lényeges, mivel az α paraméter segítségével lehetővé teszi a hiba értékének kontrollálását. A dinamikus rendszer az $\alpha N(d + \xi)$ értékeket befolyásolja. Látható, hogy a késleltetés növekedtével az E_{ss}^{a} -re adható felső korlát is nő, amely arra enged következtetni, hogy a késleltetés növekedése a hibajel növekedését eredményezheti. A fix lépésméret miatt $\alpha N \frac{1}{2}$ hiba akkor is jelentkezik, amennyiben a visszacsatolás egységnyi, dinamikamentes. Jóllehet a ξ számításához használt (4.10) teljesen általános összefüggés, nem feltételezi, hogy γ_k nem tartalmaz késleltetést, tehát a késleltetést tartalmazó s_k is alkalmazható lenne a képletben $d = 0$ választással. A B. Függelékben azonban megmutatom, hogy a késleltetés különválasztásával alacsonyabb felső korlát adható a hiba abszolút középértékére.

Az algoritmus lényeges tulajdonsága, hogy az α konvergenciaparaméter bármely pozitív, véges értéke mellett korlátos marad a hiba abszolút középértéke. Ez a hibaelőjeles algoritmusok jól ismert tulajdonsága [80], amely dinamikus visszacsatolás esetén is érvényes marad.

Az algoritmus tranziens viselkedése a (4.29) és (4.13) egyenletek alapján vizsgálható. A tranziens jellemzésére használható képletek alkalmazásának nehézsége, hogy

az optimumtól való $\|\tilde{\mathbf{x}}_0^{\mathbf{S}}\|$ távolság függvényei, amely a gyakorlatban általában nem ismert. Mindazonáltal néhány kvalitatív következtetés levonását lehetővé teszik.

(4.29) alapján látható, hogy az optimum megközelítéséhez szükséges idő fordítottan arányos az α konvergenciaparaméterrel, ami azt jelenti, hogy az állandósult állapotban elérhető hiba csökkentése a tranziens hosszának növelésével tehető csak meg. A (4.13) egyenletben a tranziens tag szintén fordítottan arányos α -val.

A rezonátorok számának hatását illetően (4.15) és (4.29) vizsgálata szükséges. N értékének növelése (4.15) alapján az állandósult hiba abszolút középértékének növekedését vetíti előre; egyrészt a közvetlen egyenes arányosság miatt, másrészt N indirekt módon befolyásolja $\|\mathbf{W}\|$ és így ξ értékét is.

A rezonátorok számának a beállási időre gyakorolt hatását nehezebb meghatározni, mert N az állapotváltozó méretét is meghatározza, így közvetett módon a kezdeti paraméterhiba normáját ($\|\tilde{\mathbf{x}}_0^{\mathbf{S}}\|$) is befolyásolja. Abból kiindulva, hogy egy állandó hibaszinthez az αN értéket körülbelül állandó szinten kell tartani, így (4.29) második alakját tekintve láthatjuk, hogy $\alpha N = \text{konstans}$ esetén N növelése $\underline{\tau}$ növekedését eredményezi, ami azt jelenti, hogy a rezonátorok számát érdemes az y_n jel által megkövetelt minimális értéken tartani.

4.2. Hibaelőjeles FxLMS algoritmus

4.2.1. Algoritmus bemutatása

A 2.3.2. alfejezetben ismertetett FxLMS algoritmus hibaelőjeles változata a következő egyenletekkel írható le:

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n + \mu \text{sign}(e_n) \mathbf{r}_n, \quad (4.34)$$

$$e_n = y_n - y'_n, \quad (4.35)$$

$$u_n = \mathbf{x}_n^{\text{T}} \mathbf{w}_n. \quad (4.36)$$

Az algoritmus alkalmazási módja megegyezik a 4.1. ábrán bemutatott vázlatos elrendezéssel. Az FxLMS algoritmushoz hasonlóan annak hibaelőjeles változata is általános sztochasztikus zavarjelek esetén alkalmazható.

A szűrt referenciajeltől álló regressziós vektor (\mathbf{r}_n) valamilyen sztochasztikus jel mintáit tartalmazza, így a rezonátor alapú algoritmusoktól eltérően az állandó méretű lépésköz ebben az esetben egzaktnak nem tejesül. Ennek ellenére kijelenthető, hogy a szűrő adaptációjának mértéke az optimumtól való távolságtól ebben az esetben sem függ, tehát a 4.2. ábrán illusztrált tulajdonságok a hibaelőjeles FxLMS algoritmus esetében is érvényesek.

Az analízis módszere nagyban egyezik a hibaelőjeles rezonátoros algoritmus esetén bemutatottal. Lényegi különbség, hogy ebben az esetben az eredményeket várható értékben lehet megfogalmazni a feltételezett sztochasztikus jelmodell miatt. A következőkben feltételezem, hogy y_n , n_n , x_n és r_n :

- stacioner és
- ergodik.

A továbbiakban $R_{zw}(\tau)$ a z és w jelek keresztkorrelációs függvényét jelöli, amelyet a $\mathbb{E}\{\cdot\}$ várható-érték operátort felhasználva a következő egyenlet definiál:

$$R_{zw}(\tau) = \mathbb{E}\{z_t w_{t+\tau}\}. \quad (4.37)$$

4.2.2. Hiba abszolút középértékének számítása

Az analízist a [80] irodalom alapján végeztem, kiegészítve a dinamikus rendszer hatásának vizsgálatával.

A rezonátor alapú, hibaelőjeles algoritmushoz képest eltérést jelent, hogy ebben az esetben az állításokat várható értékben fogalmazom meg. Ennek megfelelően a hiba abszolút középértéke:

$$E_n^a = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}\{|e_k|\}, \quad (4.38)$$

és állandósult állapotban $E_{ss}^a = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n^a$.

Ebben az esetben is szükséges a megfigyelési zaj abszolút középértéke:

$$\nu = \mathbb{E}\{|n_n|\}. \quad (4.39)$$

Ezen túl definiáljuk a következő változókat:

$$\rho_w = R_{|r||r|}(0), \quad (4.40a)$$

$$\rho_d = \sum_{q=1}^d R_{|r||r|}(q), \quad (4.40b)$$

$$\rho_p = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{q=1}^k |\gamma_k| R_{|x||r|}(k-q). \quad (4.40c)$$

Az $R_{|\cdot||\cdot|}(\cdot)$ függvények a (4.37) által definiált korrelációs függvényt jelölik az r , illetve r és x abszolútértékei között. Az abszolút értéket tartalmazó korrelációs függvények számítása a C. Függelékben található útmutató alapján megtehető.

4.3. Tétel. *A hibaelőjeles FxLMS algoritmus esetén a hibajel abszolút középértékének felső korlátja:*

$$E_n^a \leq \bar{E}_n^a, \quad (4.41)$$

$$\bar{E}_n^a = \frac{1}{2n\mu} \mathbb{E}\{\|\tilde{\mathbf{w}}_0\|^2\} + \mu N \left(\frac{1}{2} \rho_w + \rho_d + \rho_p \right) + \nu. \quad (4.42)$$

Állandósult állapotban a hiba abszolút középértékének felső korlátja:

$$E_{ss}^a \leq \bar{E}_{ss}^a, \quad (4.43)$$

$$\bar{E}_{ss}^a = \mu N \left(\frac{1}{2} \rho_w + \rho_d + \rho_p \right) + \nu. \quad (4.44)$$

Bizonyítás: A D. Függelék alapján y'_n a következő módon számítható (lásd D.1. Lemma):

$$y'_n = \mathbf{r}_n^T \mathbf{w}_{n'} - h_n^F, \quad n' = n - d, \quad (4.45)$$

$$h_n^F = \mu \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{q=1}^k \gamma_k \mathbf{x}_{n'-k}^T \mathbf{r}_{n'-q} \text{sign}(e_{n'-q}). \quad (4.46)$$

A (2.120) és (4.45) alapján a hibajel a következő formában írható:

$$e_n = y_n - y'_n = \mathbf{r}_n^T (\mathbf{w}_o - \mathbf{w}_{n'}) + h_n^F + n_n. \quad (4.47)$$

A szűrőegyütthetők (2.121) egyenletben adott hibavektorának felhasználásával (4.47) átírható:

$$\begin{aligned} e_n &= \mathbf{r}_n^T (\mathbf{w}_o - \mathbf{w}_n + \mathbf{w}_n - \mathbf{w}_{n'}) + h_n^F + n_n \\ &= -\mathbf{r}_n^T \tilde{\mathbf{w}}_n + \mathbf{r}_n^T (\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_{n'}) + h_n^F + n_n. \end{aligned} \quad (4.48)$$

A továbbiakban a (2.121) egyenletben definiált $\tilde{\mathbf{w}}_n$ hibavektorral dolgozom, amelyre vonatkozó adaptációs szabály megadható (4.34) mindkét oldalából \mathbf{w}_o vektort kivonva:

$$\tilde{\mathbf{w}}_{n+1} = \tilde{\mathbf{w}}_n + \mu \mathbf{r}_n \text{sign}(e_n). \quad (4.49)$$

Szorozzuk meg $\tilde{\mathbf{w}}_{n+1}$ transzponáltjával (4.49) egyenlet mindkét oldalát, így az $\mathbf{r}_n^T \tilde{\mathbf{w}}_n = \tilde{\mathbf{w}}_n^T \mathbf{r}_n$ azonosságot felhasználva:

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{w}}_{n+1}\|^2 &= \tilde{\mathbf{w}}_{n+1}^T \tilde{\mathbf{w}}_{n+1} = [\tilde{\mathbf{w}}_n + \mu \mathbf{r}_n \text{sign}(e_n)]^T [\tilde{\mathbf{w}}_n + \mu \mathbf{r}_n \text{sign}(e_n)] \\ &= \|\tilde{\mathbf{w}}_n\|^2 + \mu^2 \text{sign}(e_n) \mathbf{r}_n^T \mathbf{r}_n \text{sign}(e_n) + 2\mu \text{sign}(e_n) \mathbf{r}_n^T \tilde{\mathbf{w}}_n. \end{aligned} \quad (4.50)$$

A (4.48) egyenletből $\mathbf{r}_n^T \tilde{\mathbf{w}}_n$ értéket kifejezve, behelyettesítve a (4.50) egyenletbe és mindkét oldal várható értékét számítva, a következő egyenlethez jutunk:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \{ \|\tilde{\mathbf{w}}_{n+1}\|^2 \} &= \mathbb{E} \{ \|\tilde{\mathbf{w}}_n\|^2 \} + \mu^2 \mathbb{E} \{ \text{sign}(e_n) \mathbf{r}_n^T \mathbf{r}_n \text{sign}(e_n) \} \\ &\quad + 2\mu \mathbb{E} \{ \text{sign}(e_n) \mathbf{r}_n^T (\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_{n'}) \} + 2\mu \mathbb{E} \{ \text{sign}(e_n) h_n^F \} \\ &\quad + 2\mu \mathbb{E} \{ \text{sign}(e_n) n_n \} - 2\mu \mathbb{E} \{ \text{sign}(e_n) e_n \}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

A (4.51) egyenletben $\text{sign}(e_n) e_n = |e_n|$, továbbá $\text{sign}(e_n) n_n \leq |n_n|$, $\text{sign}(e_n) h_n^F \leq |h_n^F|$, $\text{sign}(e_n) \mathbf{r}_n^T \mathbf{r}_n \text{sign}(e_n) \leq |\mathbf{r}_n^T \mathbf{r}_n|$, és $\text{sign}(e_n) \mathbf{r}_n^T (\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_{n'}) \leq |\mathbf{r}_n^T (\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_{n'})|$, mivel $\text{sign}(e_n)$ csupán a $\{+1, 0, -1\}$ értékeket vehet föl. Ez alapján (4.51) átalakítható:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \{ \|\tilde{\mathbf{w}}_{n+1}\|^2 \} &\leq \mathbb{E} \{ \|\tilde{\mathbf{w}}_n\|^2 \} + \mu^2 \mathbb{E} \{ |\mathbf{r}_n^T \mathbf{r}_n| \} + 2\mu \mathbb{E} \{ |\mathbf{r}_n^T (\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_{n'})| \} \\ &\quad + 2\mu \mathbb{E} \{ |h_n^F| \} + 2\mu \mathbb{E} \{ |n_n| \} - 2\mu \mathbb{E} \{ |e_n| \}. \end{aligned} \quad (4.52)$$

A (4.52) egyenletben található kifejezések felső korlátait a D. Függelék tartalmazza, lásd: (D-9), (D-10) és (D-13), amelyeket behelyettesítve és mindkét oldalt 2μ -vel osztva:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu} \mathbb{E} \{ \|\tilde{\mathbf{w}}_{n+1}\|^2 \} &\leq \frac{1}{2\mu} \mathbb{E} \{ \|\tilde{\mathbf{w}}_n\|^2 \} + \frac{1}{2} \mu N \rho_w + \mu N \rho_d \\ &\quad + \mu N \rho_p + \nu - \mathbb{E} \{ |e_n| \}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

A (4.53) egyenletet rekurzívan kifejtve, $\mathbb{E}\{\|\tilde{\mathbf{w}}_n\|^2\}$ számítható:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu}\mathbb{E}\{\|\tilde{\mathbf{w}}_n\|^2\} &\leq \frac{1}{2\mu}\mathbb{E}\{\|\tilde{\mathbf{w}}_0\|^2\} + n\frac{1}{2}\mu N\rho_w + n\mu N\rho_d \\ &+ n\mu N\rho_p + n\nu - \sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}\{|e_i|\}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Mivel $0 \leq \mathbb{E}\{\|\tilde{\mathbf{w}}_n\|^2\}$, (4.54) átrendezése és mindkét oldal leosztása n -nel a (4.42) egyenletben adott abszolút középértéket eredményezi. A (4.44) képletben szereplő állandósult állapotbeli értéket $n \rightarrow \infty$ határérték alkalmazásával kapjuk. ■

Ezen szakasz fő eredménye a hibajelre mint a visszacsatolt rendszer elsődleges minőségi jellemzőjére adható felső korlát megadása. Az adaptív szűrő együtthatóira nézve nem fogalmaztam meg állításokat. Az egységnyi visszacsatolású hibaelőjeles LMS algoritmus esetén irodalmi forrásokra támaszkodva elmondható, hogy adható egy eloszlásfüggvény, melyhez a szűrőegyütthatók eloszlásfüggvénye tart $n \rightarrow \infty$ esetén [80]. Valószínűsíthető, hogy ez a hibaelőjeles FxLMS algoritmus esetén is érvényes, de ennek igazolása további vizsgálatokat igényel.

A dolgozatban nem szerepeltettem, de hibaelőjeles FxLMS algoritmus esetén bizonyos feltételek mellett analitikusan is belátható, hogy várható értékét tekintve a szűrőegyütthatók hibájának normanégyzete, tehát $\mathbb{E}\{\|\tilde{\mathbf{w}}_n\|^2\}$, korlátos marad $n \rightarrow \infty$ esetén, más szóval a szűrőegyütthatók az optimum egy korlátos környezetében mozognak. A részletes feltételek és eredmények a [4] cikkben olvashatók.

4.2.3. Beállási idő vizsgálata

A 4.1.3. alfejezetben bemutatottakhoz hasonlóan a hibaelőjeles FxLMS algoritmus esetén is ismertetem a beállási időre vonatkozó alsó korlát számításának módját.

4.4. Tétel. *Jelölje τ a hibaelőjeles FxLMS algoritmus állandósult állapotának eléréséhez szükséges lépésszámot. τ alsó korlátja $\underline{\tau}$, amely a következő alakú:*

$$\tau \geq \underline{\tau}, \quad (4.55)$$

$$\underline{\tau} = \frac{\mathbb{E}\{\|\tilde{\mathbf{w}}_0\|\}}{\mu\sqrt{N}\rho_w} = \frac{\mathbb{E}\{\|\tilde{\mathbf{w}}_0\|\}}{\mu N\sqrt{\rho_w}}\sqrt{N}. \quad (4.56)$$

Bizonyítás: A $\tilde{\mathbf{w}}_0$ kezdeti értékből $\tilde{\mathbf{w}}_\tau$ kiszámítható a (4.49) egyenletben adott rekurziót felhasználva:

$$\tilde{\mathbf{w}}_\tau = \tilde{\mathbf{w}}_0 + \mu \sum_{i=0}^{\tau-1} \mathbf{r}_i \text{sign}(e_i). \quad (4.57)$$

Tegyük fel, hogy τ ütemet követően az algoritmus elérte az optimumot. A legjobb esetnek megfelelő $\tilde{\mathbf{w}}_\tau = 0$ értéket használva (4.57) a következő egyenletre vezet:

$$\tilde{\mathbf{w}}_0 = -\mu \sum_{i=0}^{\tau-1} \mathbf{r}_i \text{sign}(e_i). \quad (4.58)$$

Mindkét oldal normáját számítva a következı egyenlıtlenséget kapjuk:

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{w}}_0\| &= \left\| -\mu \sum_{i=0}^{\tau-1} \mathbf{r}_i \text{sign}(e_i) \right\| \leq \mu \sum_{i=0}^{\tau-1} \|\mathbf{r}_i \text{sign}(e_i)\| \\ &\leq \mu \sum_{i=0}^{\tau-1} \|\mathbf{r}_i\| \|\text{sign}(e_i)\| \leq \mu \sum_{i=0}^{\tau-1} \|\mathbf{r}_i\|. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Vegyük mindkét oldal várható értékét:

$$\mathbb{E} \{ \|\tilde{\mathbf{w}}_0\| \} \leq \mu \sum_{i=0}^{\tau-1} \mathbb{E} \{ \|\mathbf{r}_i\| \}. \quad (4.60)$$

Az $\mathbb{E} \{ \|\mathbf{r}_i\| \}$ tag a következı módon alakítható át (D-9) felhasználásával:

$$\mathbb{E} \{ \|\mathbf{r}_i\| \} = \mathbb{E} \left\{ \sqrt{\mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_i} \right\} \leq \sqrt{\mathbb{E} \{ \mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_i \}} \leq \sqrt{NR_{|r||r|}(0)} = \sqrt{N\rho_w}, \quad (4.61)$$

ahol egyrészt $\mathbb{E} \{ \mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_i \} \leq NR_{|r||r|}(0)$ (D-9) alapján, és a Jensens-egyenlıtlenség miatt $\mathbb{E} \{ f(x) \} \leq f(\mathbb{E} \{ x \})$ minden konkáv függvény esetén, így a négyzetgyök függvényre is alkalmazható. A (4.60) és (4.61) egyenletekbıl, (4.62) képletet kapjuk, amelybıl a (4.56) egyenletben adott beállási közvetlenül következik.

$$\mathbb{E} \{ \|\tilde{\mathbf{w}}_0\| \} \leq \mu\tau \sqrt{N\rho_w} \quad (4.62)$$

■

4.2.4. Eredmények értelmezése

A hibaelőjeles FxLMS tulajdonságaira vonatkozó legfőbb megállapítások a (4.42), (4.44) és (4.56) egyenletek alapján tehetők meg.

Az algoritmus működésére vonatkozó kvalitatív megállapítások megegyeznek a hibaelőjeles rezonátoros algoritmus esetén a 4.1.4. alfejezetben leírtakkal. Röviden összefoglalva:

- Az állandósult állapotbeli hiba a μ paraméterrel hangolható.
- A hiba abszolút középértékének csökkentése μ csökkentésével érhető el, ami a beállási időt növeli.
- A hibajel korlátos marad minden pozitív, véges μ esetén.
- N értékének növelése \bar{E}_{ss}^a növekedését okozza. A beállási időre vonatkozó hatása függ az optimális megoldás értékétıl, így egyszerű következtetés nem vonható le, a konkrét eset kiértékelését igényli.
- A hálózati késleltetést érdemes minimális szinten tartani, mert a késleltetés növeli a hibára adható felső korlátot.

Az egységnyi visszacsatolást tartalmazó hibaelőjeles LMS algoritmus [80] irodalomban közölt eredmény alapján az állandósult állapotban elérhető hiba felső korlátja (zajtól eltekintve) $\bar{E}_{\text{ss}}^{\text{a}} = \mu \frac{1}{2} \mathbb{E} \{ \|\mathbf{r}_n\|^2 \}$. Belátható, hogy a dolgozatban alkalmazott jelölésekkel ez $\bar{E}_{\text{ss}}^{\text{a}} = \frac{1}{2} \mu N \rho_w$. A visszacsatoló ágban található dinamikus rendszer tehát $\mu N (\rho_d + \rho_p)$ értékkel növeli a hiba abszolút középértékére adható felső korlátot, az egységnyi visszacsatoláshoz képest. A késleltetés indirekt módon jelenik meg a ρ_d változón keresztül. (4.40b) alapján látható, hogy d növelésével $R_{|r||r|}(q)$ egyre több elemét összegezzük. Mivel $R_{|r||r|}(q) \geq 0$, így a késleltetés növeli a felső korlátot.

A hibaelőjeles FxLMS algoritmus esetén is érvényes az a megállapítás, hogy amennyiben ismert a visszacsatolásban található rendszer késleltetése, érdemes azt az impulzusválasz többi részétől külön kezelni, mert így általában szűkebb korlát adható E_{ss}^{a} -re. Ez speciális esetben bizonyítható is, lásd az E. Függelékben.

4.3. Javított konvergenciájú hibaelőjeles algoritmusok

A hibaelőjeles algoritmusok hátrányos tulajdonsága az, hogy állandósult állapotban a hiba abszolút középértéke nem csökkenthető egy, a konvergenciaparaméter által meghatározott konstans szint alá. Megfelelően alacsony értékű állandósult állapotbeli hiba általában lassú beállást eredményez.

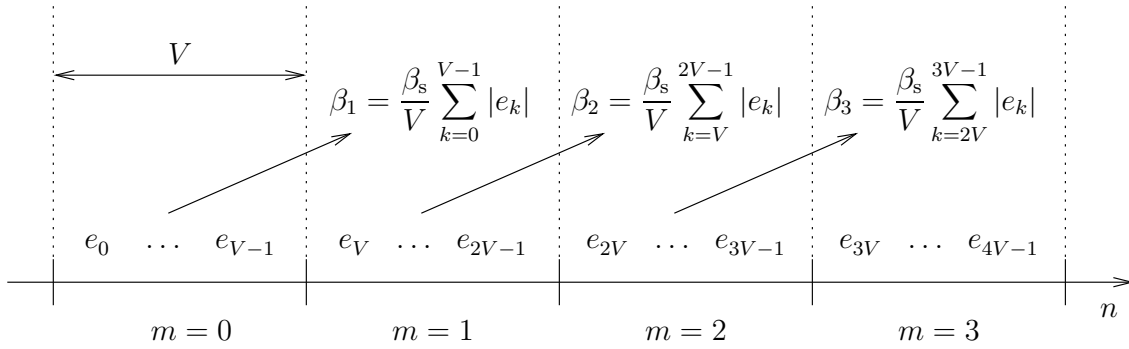
Ebben az alfejezetben a hibaelőjeles algoritmusok egy új, javított konvergencia-tulajdonságokkal rendelkező változatát mutatom be. Az új algoritmus esetén exponenciális jelleggel nullába tartó hiba érhető el az algoritmus számára szükséges adatmennyiség jelentős növekedése nélkül. A javasolt algoritmusban található innováció a konvergenciaparaméter folytonos hangolása a hibaszint alapján. Az alapelv általános, mind a hibaelőjeles dinamikus visszacsatolt rezonátoros struktúra, mind a hibaelőjeles FxLMS algoritmus esetén alkalmazható, emiatt a két algoritmus vizsgálatát egységesen kezelem. A következő szakaszokban bemutatom az új algoritmust, és megadom a konvergencia elégséges feltételét.

4.3.1. Algoritmus bemutatása

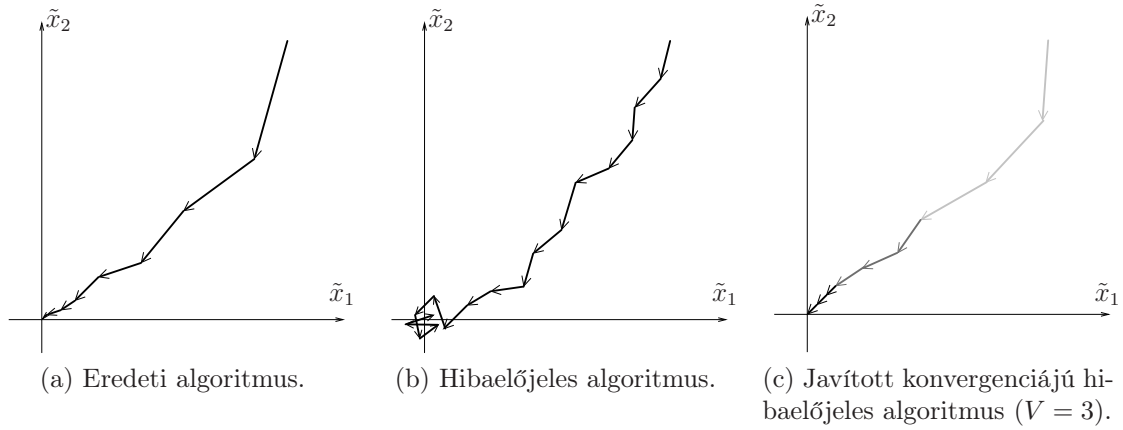
Az ajánlott algoritmus a működése V mintavételi ütem hosszúságú intervallumokra osztható. A konvergenciaparaméter értékét minden intervallumot követően az abban az intervallumban elért átlagos abszolút hiba alapján módosítjuk. Jelölje β_m a konvergenciaparaméter értékét az m -edik intervallumban, ekkor:

$$\beta_m = \beta_s \frac{1}{V} \sum_{k=(m-1)V}^{mV-1} |e_k|, \quad (4.63)$$

ahol β_s egy skálatényező, a megválasztására vonatkozó feltételt később tárgyalom. A 4.3. ábra a konvergenciaparaméter számításának módját ábrázolja.



4.3. ábra. A konvergenciaparaméter számításának módja.



4.4. ábra. Különböző algoritmusok konvergenciatulajdonságainak illusztrációja.

A hibaelőjeles rezonátoros és az FxLMS algoritmust az adaptívan hangolt konvergenciaparamétert felhasználva, a következő egyenletek írják le:

hibaelőjeles rezonátoros algoritmus	hibaelőjeles FxLMS
$mV \leq n < (m + 1)V$	
$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \hat{\mathbf{x}}_n + \beta_m \mathbf{W} \mathbf{c}_n^* \text{sign}(e_n) \quad (4.64)$	$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n + \beta_m \mathbf{r}_n \text{sign}(e_n) \quad (4.66)$
$u_n = \mathbf{c}_n^T \hat{\mathbf{x}}_n \quad (4.65)$	$u_n = \mathbf{x}_n^T \mathbf{w}_n \quad (4.67)$

A konvergenciatulajdonságok javulása azzal magyarázható, hogy az optimumtól távol a hiba abszolút középértéke magas, ami nagy értékű konvergenciaparamétert, tehát nagy lépésközt eredményez, így az optimum felé gyorsan közeledik az algoritmus. Az optimum közelében a hibajel abszolút középértéke csökken, tehát a konvergenciaparaméter kis értéke miatt az optimumot egyre finomabb lépések sorozatával közelíti meg. A 4.4(c). ábrán ezen tulajdonság illusztrációja látható, összehasonlítva a normál, illetve a hibaelőjeles algoritmus tulajdonságaival.

A konvergenciaparaméter hangolására a hibajel egyéb integrális jellemzője, például effektív értéke is használható lehetne. Az abszolút középérték azért kézenfekvő választás, mert az optimumtól való távolság egy természetes jellemzője, mivel a hibaelőjeles algoritmus az abszolút középértéket minimalizálja [80]. A választás azért is előnyös, mert csupán összeadás és abszolút érték műveleteket igényel, így implementálása egyszerű.

Az elérhető adatredukció ebben az esetben a (4.3) egyenletnél használt feltételezésekkel, továbbá b_e bitet allokálva egy csomagban az abszolút középérték küldésére:

$$\eta = \frac{D + b_e + o}{Db + o} = \frac{1 + (o + b_e)/D}{b + o/D}. \quad (4.68)$$

Példaként feltételezzük újra, hogy az overhead 15 byte ($o = 120$ bit), csomagonként $D = 24$ darab $b = 8$ bites adat található, valamint $b_e = 16$ bit. Ebben az esetben $\eta = 0.5128$, tehát majdnem kétszeres csökkenés így is elérhető az elküldött adatmennyiségben.

4.3.2. Algoritmus konvergenciájának elégséges feltétele

Ebben a szakaszban megmutatom, hogy az algoritmus stabilitása milyen β_s választás mellett biztosítható. A stabilitást a továbbiakban úgy értelmezem, hogy az e_n hibajel mint kimeneti jel értéke milyen β_s esetén marad korlátos véges értékű gerjesztés esetén (Bounded-Input Bounded-Output Stability [115]).

4.5. Tétel. *A javított konvergenciatulajdonságú hibaelőjeles algoritmusok konvergenciájának elégséges feltétele:*

<i>hibaelőjeles rezonátoros algoritmus</i>	<i>hibaelőjeles FxLMS algoritmus</i>
$\beta_s < \frac{1}{N \left(\frac{1}{2} + d + \xi \right)} \quad (4.69)$	$\beta_s < \frac{1}{N \left(\frac{1}{2} \rho_w + \rho_d + \rho_p \right)} \quad (4.70)$

Bizonyítás:

A továbbiakban az \mathcal{E}_m jelölést alkalmazom az m -edik intervallumban mérhető hiba abszolút középértékére:

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{V} \sum_{k=mV}^{(m+1)V-1} |e_k|. \quad (4.71)$$

Először feltételezzük, hogy $V \gg 1$, tehát az intervallumok hossza elég nagy ahhoz, hogy az algoritmus elérje az állandósult állapotot, és így a hiba jellemezhető a (4.15) és (4.44) egyenletekkel. A hiba mindkét esetben felírható egy, a konvergenciaparaméterrel arányos és egy attól független tag összegeként. Általánosságban:

$$\mathcal{E}_m \leq \beta_m Q + R_m \leq \beta_m Q + R, \quad (4.72)$$

ahol hibaelőjeles rezonátoros algoritmus esetén $Q = N \left(\frac{1}{2} + d + \xi \right)$, hibaelőjeles FxLMS algoritmus esetén $Q = N \left(\frac{1}{2} \rho_w + \rho_d + \rho_p \right)$, és $R_m = \left[\frac{1}{V} \sum_{k=mV}^{(m+1)V-1} |n_k| \right]$. Az R konstans az R_m felső korlátja. Elvileg nem minden zaj esetén lehetséges ilyen felső korlátot találni (például Gauss-zaj), de a gyakorlati esetek többségében ez nem okoz problémát.

(4.71) és (4.63) alapján: $\beta_m = \beta_s \mathcal{E}_{m-1}$, amelyet (4.72) egyenletben felhasználva:

$$\mathcal{E}_m \leq \beta_s \mathcal{E}_{m-1} Q + R = \mathcal{E}_{m-1} (\beta_s Q) + R. \quad (4.73)$$

A (4.73) egyenletet rekurzívan kifejtve a kezdő állapotig:

$$\mathcal{E}_m \leq \mathcal{E}_0 (\beta_s Q)^m + R \sum_{k=0}^{m-1} (\beta_s Q)^k, \quad (4.74)$$

ahol \mathcal{E}_0 a hiba első intervallumban vett abszolút középértéke. $\mathcal{E}_m \rightarrow 0$ akkor teljesül, ha $(\beta_s Q) < 1$. Mivel $\sum_{k=0}^{m-1} (\beta_s Q)^k$ egy mértani sor összege, így ekkor:

$$\mathcal{E}_m \leq \mathcal{E}_0 (\beta_s Q)^m + R \frac{(\beta_s Q)^m - 1}{(\beta_s Q) - 1}. \quad (4.75)$$

A stabilitás elégséges feltétele tehát:

$$\beta_s Q < 1 \longrightarrow \beta_s < \frac{1}{Q}. \quad (4.76)$$

A Q megfelelő definícióit behelyettesítve adódik (4.69) és (4.70). ■

A bizonyításban kihasználtam, hogy V elég nagy ahhoz, hogy az algoritmus minden intervallum végére eléri az állandósult állapotot. Általában a tranziens a hibajel szempontjából tekinthető egy véges abszolút középértékű additív tagnak, így az R konstansba az is befoglalható. Ez azt jelenti, hogy a konvergencia bizonyítása abban az esetben is megalapozottnak tekinthető, amennyiben V nem elég nagy ahhoz, hogy a tranziens lecsengjen.

4.4. Szimulációs és mérési eredmények

4.4.1. Hibaelőjeles algoritmusok szimulációs eredményei

A közölt eredményekben E_{ss}^a , illetve \bar{E}_{ss}^a rendre a szimulációkban elért hiba abszolút középértékét, illetve a (4.15) és (4.44) által az abszolút középérték állandósult állapotbeli értékére adott felső korlátot jelölik. Ezen túl \bar{E}_{ss}^{a+} azon felső korlátot jelöli, aminek számításakor a késleltetést nem választjuk külön az impulzusválasz többi részétől. A beállási idő (τ) alsó korlátját ($\underline{\tau}$) a (4.29) és (4.56) egyenletek adják.

Az alapértelmezett paraméterbeállítások a 4.1. táblázatban vannak összefoglalva. Amennyiben más nincs megadva, ezeket az értékeket alkalmazom.

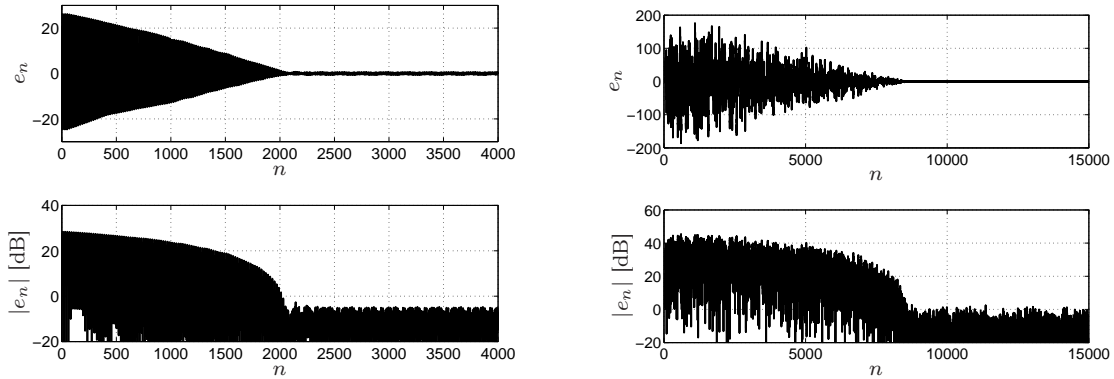
Gyakorlatban a rezonátoros algoritmusok esetén általában a harmonikusok számával (P) dolgozunk, így a táblázatban is az van megadva. A rezonátorok száma (2.14) képlettel kapható, általában $N = 2P + 1$.

hibaelőjeles rezonátoros	hibaelőjeles FxLMS
$\alpha = 0.01, P = 5, d = 0, \nu = 0,$ $f_1 = 0.05^*$	$\mu = 0.01, N = 10, d = 0, \nu_n = 0,$ az x_n referenciajel fehér, Gauss-eloszlású, nulla várható értékű jel $R_{xx}(0) = 1$ szó- rással.
$ x_{\pm i,n} = i; i = 0 \dots P; x_{\pm i,n}$ fázisa vé- letlen	$\mathbf{w}_o = [20 \dots 20] \in \mathbb{R}^{10 \times 1}$

4.1. táblázat. Szimulációs paraméterek.

*az alapharmonikus frekvencia $f_1 = 0.02$ a mintavételi tétel betartása érdekében, amennyiben a harmonikusok számát (P) változtatom.

Általános konvergenciatulajdonságok vizsgálata



(a) Hibaelőjeles dinamikusan visszacsatolt rezonátoros struktúra.

(b) Hibaelőjeles FxLMS algoritmus.

4.5. ábra. Hibaelőjeles algoritmusok beállása. Visszacsatolás késleltetésen keresztül. $S(z) = z^{-50}$.

Az első szimulációban (4.5. ábra) a visszacsatolás egy 50 mintányi késleltetés, tehát $S(z) = z^{-50}$. A visszacsatolás már jelentősen eltér az egységnyitől, viszont elég egyszerű ahhoz, hogy összehasonlíthatók legyenek az eredmények a szakirodalomban található, egységnyi visszacsatolásra vonatkozó adatokkal.

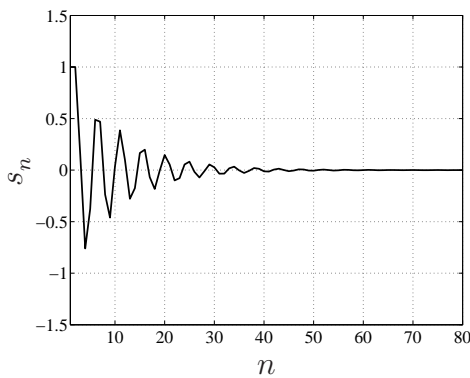
A szimulációkon, főként a rezonátor alapú algoritmus esetén, jól látszik a hibaelőjeles algoritmusok hibajelének jellegzetes viselkedése: a tranziens szakaszban nagyjából lineáris burkoló szerint csökken, mígnem egy adott átlagos szinten allandósul az értéke.

A hibaelőjeles rezonátoros algoritmus esetén állandósult állapotban, $\tau = 2000$ mintát követően, a hiba abszolút középértéke: $E_{ss}^a = 0.27$, míg a (4.15) képlet alapján adható felső korlát $\bar{E}_{ss}^a = 10^{-2}(2 \cdot 5 + 1) \left(\frac{1}{2} + 50\right) = 5.555$. Habár a felső korlát pesszimista, de mutatja, hogy a visszacsatolásban található nem egységnyi átvitelű rendszer módosítja a hiba értékét, ugyanis a késleltetést figyelmen kívül hagyva $\bar{E}_{ss}^a = 10^{-2} \cdot 11 \cdot \frac{1}{2} = 0.055$ adódna, ami viszont már nem érvényes felső korlát. A

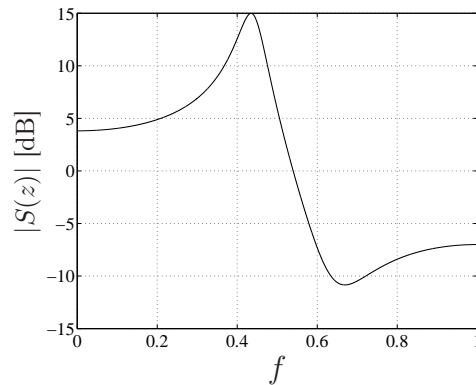
beállási időre adható alsó korlát (4.29) alapján $\underline{\tau} = \frac{\|\tilde{\mathbf{x}}_0^s\|}{\alpha\sqrt{N}} = \frac{10.5}{0.01\sqrt{11}} = 317$. Ezen képlet alkalmazásának nehézsége, hogy szükséges a kezdeti paraméterhiba normájának ismerete, ami gyakorlatban nehezen teljesíthető.

A szimuláció alapján a hibaelőjeles FxLMS esetén $E_{ss}^a = 0.24$. Az eddig ismert, egységnyi visszacsatolásra vonatkozó eredmények alapján adható felső korlát [80]: $\mu NR_{xx}(0)/2 = 0.01 \cdot 10 \cdot 1/2 = 0.05$, a dinamikus visszacsatolás esetén alkalmazható (4.44) képlet alapján pedig $\bar{E}_{ss}^a = 3.2$. Amennyiben tehát nem vesszük figyelembe a visszacsatolásban található dinamikus rendszert, a hiba abszolút középértékére adott felső korlát nem ad helyes eredményt. A beállási idő alsó korlátja (4.56) alapján $\underline{\tau} = \frac{\mathbb{E}\{\|\tilde{\mathbf{w}}_0\|\}}{\mu\sqrt{N\rho_w}} = \frac{63.2}{0.01\sqrt{10 \cdot 1}} = 2000$. A beállási idő számítását a gyakorlatban itt is korlátozza, hogy ismerni kell a kezdeti paraméterhiba normáját.

Állandósult állapotbeli viselkedés



(a) Impulzusválasz.



(b) Átviteli függvény.

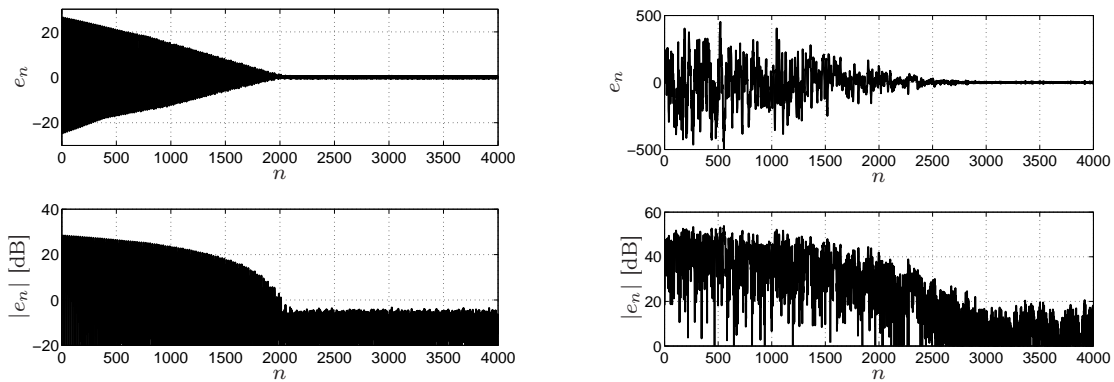
4.6. ábra. A szimulációhoz használt másodfokú szakasz rendszerjellemező függvényei.

A szimulációkhoz a [14] értekezésben is alkalmazott másodfokú rendszert használtam, amelynek rendszerjellemező függvényei a 4.6. ábrán láthatóak:

$$S(z) = \frac{z^2 + 0.6627z + 0.6414}{z^2 - 0.3373z + 0.8100} z^{-d}. \quad (4.77)$$

A szimulációkban a 4.1. táblázatban adott alapértelmezett paraméterbeállításból indultam ki. Az egyes paraméterek változása mentén vizsgáltam azok hatását, és összevettem az elméleti eredményekkel. Az algoritmusok viselkedése a paraméterek alapértelmezett értékei mellett a 4.7. ábrán látható, a szimulációs eredményeket pedig a 4.2. táblázat tartalmazza.

A szimulációkban az állandósult állapotban elért hiba abszolút középértékét és a beállási időt határoztam meg, valamint kiszámítottam az ezekhez tartozó elvi felső és alsó korlátokat. A beállási idő pontos értéke többnyire nem egyértelműen meghatározható (lásd például a 4.7(b). ábrát), így százas nagyságrendű kerekítést



(a) Hibaelőjeles, dinamikusan visszacsatolt rezonátoros struktúra.

(b) Hibaelőjeles FxLMS algoritmus.

4.7. ábra. Szimulációs eredmény a (4.77) egyenletben adott rendszer esetén alapértelmezett paraméterekkel.

alkalmaztam. Néhány esetben az állandósult állapotban elért hibaszint akkora, hogy a beállítás nem értelmezhető. Ezeket a táblázatban \times jelöli.

A szimulációk során kapott értékek nem lépik túl az elvi korlátokat, és az elméleti eredmények tendenciájukban általában jól jósolják az egyes paraméterek hatását. Mindazonáltal a felső és alsó korlátok pesszimiztikusak abban a tekintetben, hogy nagyjából egy nagyságrenddel magasabb/alacsonyabb felső/alsó korlátot szolgáltatnak, mint a valódi értékek. Ez a jelenség a levezetések során alkalmazott worst-case összegzések miatt tapasztalható.

Látható, hogy amennyiben a visszacsatolásban található dinamikus rendszer késleltetést is tartalmaz, érdemes a késleltetés hatását külön kezelni, mert így szűkebb korlát adható az abszolút középértékre, tehát $\bar{E}_{ss}^{a+} \geq \bar{E}_{ss}^a$ a B. és E. Függelékben bizonyítottaknak megfelelően.

Rezonátoros algoritmus esetén a harmonikus komponensek száma, hibaelőjeles FxLMS esetén pedig az adaptív szűrő hosszának változtatása a paraméterhibavektort is változtatja. Emiatt a beállási idő esetén a változtatás mértéke bizonyos esetekben nem feltétlenül arányos az adott paraméter megváltozásának mértékével.

Érdekes tulajdonság, hogy a késleltetés kisebb mértékben befolyásolja a beállási időt, mint a hiba abszolút középértékét. Az a jelenség, hogy a beállási idő bizonyos esetekben kis mértékben csökken a késleltetés növekedésével, annak köszönhető, hogy a késleltetés növekedtével az állandósult állapotban mérhető hiba abszolút középértéke nő, így a hibajel adott csökkenési tendenciával hamarabb eléri ezt a szintet.

4.4.2. Javított konvergenciájú hibaelőjeles algoritmusok szimulációs eredményei

A következő szimulációkban a javított konvergenciatulajdonságú hibaelőjeles algoritmusok stabilitására vonatkozó feltétel érvényességét vizsgálom. A stabilitásáért

α	0.001	0.01	0.1	1.0
E_{ss}^a	0.034	0.338	3.37	33.6
\bar{E}_{ss}^a	0.201	2.01	20.1	201
τ	20000	2000	150	×
$\underline{\tau}$	3873	388	39	4
P	1	5	10	20
E_{ss}^a	0.073	0.274	0.537	1.21
\bar{E}_{ss}^a	0.841	2.43	3.74	17.3
τ	300	1800	4400	13900
$\underline{\tau}$	141	388	678	1255
d	1	10	50	100
E_{ss}^a	0.272	0.135	0.293	0.693
\bar{E}_{ss}^a	2.12	3.11	7.51	13.0
\bar{E}_{ss}^{a+}	2.24	4.32	13.5	25.1
τ	2000	2000	2000	2000
$\underline{\tau}$	388	388	388	388
ν	0.01	0.1	1.0	10.0
E_{ss}^a	0.338	0.345	1.08	10.8
\bar{E}_{ss}^a	2.02	2.11	3.01	12.0
τ	2000	2000	2000	×
$\underline{\tau}$	388	388	388	388

(a) Hibaelőjeles dinamikusan visszacsatolt rezonátoros struktúra.

μ	0.001	0.01	0.1	1.00
E_{ss}^a	0.283	2.58	26.6	272
\bar{E}_{ss}^a	3.44	34.8	348	3420
τ	31100	3000	500	×
$\underline{\tau}$	5495	547	55	6
N	5	10	20	50
E_{ss}^a	1.19	2.63	5.72	15.9
\bar{E}_{ss}^a	17.1	34.2	68.5	172
τ	2000	3000	3000	2700
$\underline{\tau}$	547	547	387	250
d	1	10	50	100
E_{ss}^a	2.63	4.41	10.7	20.0
\bar{E}_{ss}^a	35.2	44.3	83.8	131
\bar{E}_{ss}^{a+}	38.0	72.3	223	407
τ	3000	3000	2700	2700
$\underline{\tau}$	547	547	547	547
ν	0.1	1.0	10	100
E_{ss}^a	2.57	2.61	10.6	101
\bar{E}_{ss}^a	34.3	35.2	44.2	134
τ	3000	3000	2900	×
$\underline{\tau}$	547	547	547	547

(b) Hibaelőjeles FxLMS algoritmus.

4.2. táblázat. A hiba abszolút középértéke és a beállási idő, valamint azok felső és alsó korlátai különböző paraméterbeállítás mellett. × jelöli a nem mérhető adatokat.

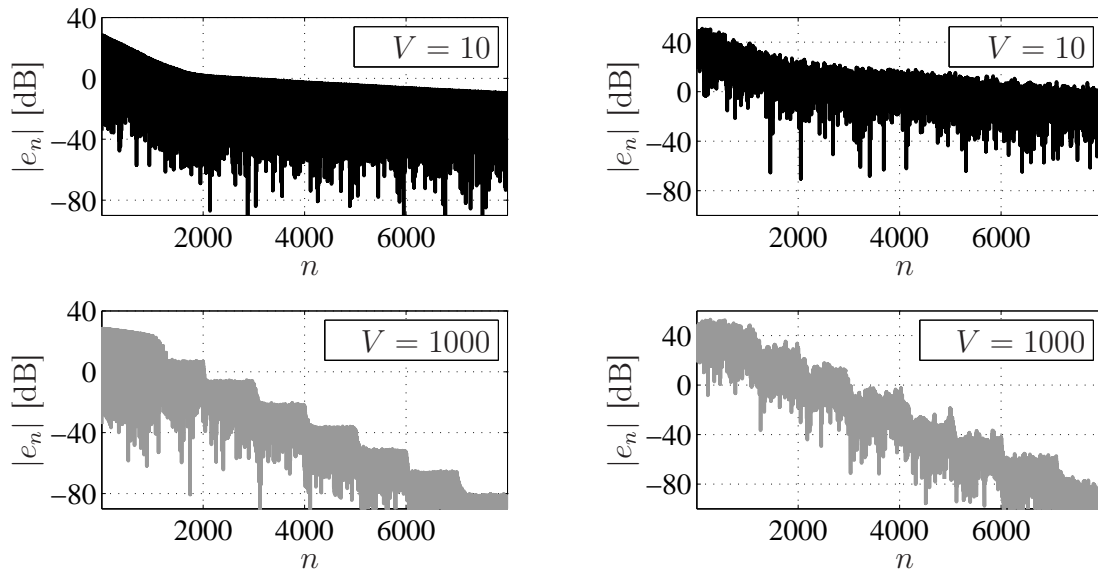
a β_s skálatényező felelős. A szimulációkban a (4.77) egyenletben adott rendszert alkalmaztam.

A β_s értékét (4.69) és (4.70) alapján állítottam be; rezonátoros és FxLMS alapú algoritmusok esetén rendre $\beta_s = 5.0 \cdot 10^{-3}$ és $\beta_s = 2.93 \cdot 10^{-4}$ értékűek. A β_m konvergenciaparaméter frissítése periódusidejeként két értéket teszteltem: $V = [10, 1000]$. A szimulációs eredmények a 4.8. ábrán láthatók. Megállapíthatjuk, hogy az algoritmusok által elért hibajel a nullába tart. Jól látható módon $V = 1000$ esetén az algoritmus minden frissítési periódus során eléri az állandósult állapotot, és látszik az egyes periódusok között (4.74) által előrejelzett exponenciális jellegű lecsengés. Az algoritmus $V = 10$ esetén is stabil. Megalapozott tehát az a feltevés, hogy a stabilitási feltétel akkor is érvényes, amennyiben a tranziens nem cseng le egy V hosszúságú szakaszon belül.

A (4.69) és (4.70) által adott elégséges stabilitási korlátoknál rezonátoros struktúra esetén körülbelül hatszoros, FxLMS esetén pedig tizenháromszoros β_s esetén érjük el a stabilitási határhelyzetet. Ez körülbelül megegyezik az állandósult állapotban mérhető hiba abszolút középértékének és annak felső korlátjának hányadosával; lásd az \bar{E}_{ss}^a/E_{ss}^a értékeket a 4.2. táblázatban az alapértelmezett beállításokra. Ennek oka, hogy a stabilitás bizonyítása \bar{E}_{ss}^a értékét is felhasználja.

Az ábrák csupán a stabilitásra vonatkozó feltétel helyességét támasztják alá. Tapasztalatok szerint a leggyorsabb beállítás különböző V esetén különböző β_s értéket igényel. Kiseb V alkalmazásával általában gyorsabb beállítás érhető el.

A 4.7. ábrán a hibaelőjeles algoritmusok időfüggvényeit tekintve látható, hogy mind a beállási idő, mind a hibajel csökkenésének a mértéke javult a 4.8. ábrán látható javított konvergenciájú algoritmusok esetén.



(a) Javított konvergenciájú hibaelőjeles dinamikus visszacsatolt rezonátoros struktúra.

(b) Javított konvergenciájú hibaelőjeles FxLMS algoritmus.

4.8. ábra. Stabilitás tesztelése $V = 10$ és $V = 1000$ értékek esetén.

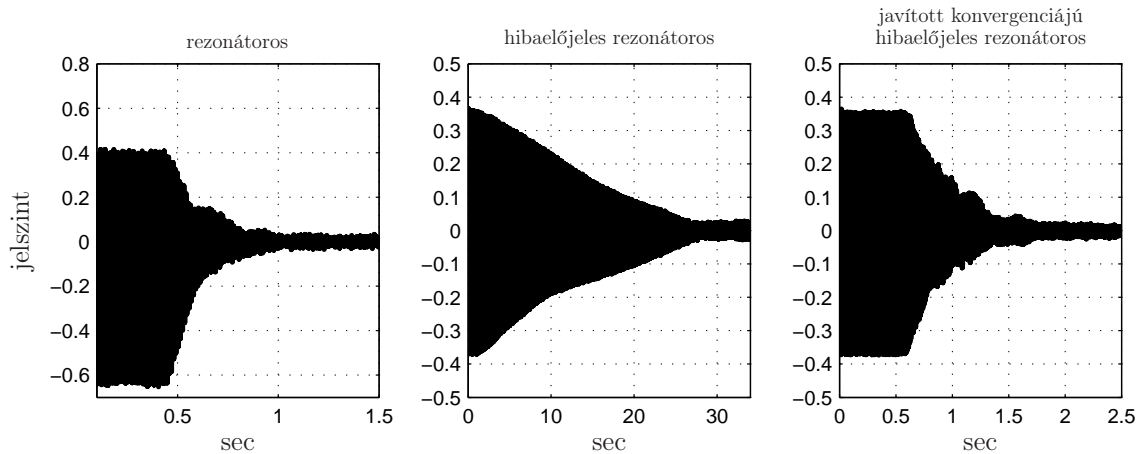
4.4.3. Mérési eredmények

A 4.9. ábrán látható mérési eredmények az 1.3. alfejezetben bemutatott zajcsökkentő rendszerben végzett kísérletek során születtek. A kísérletben egy szenzort és egy hangszórót alkalmaztam. A szenzor és a beavatkozó távolsága körülbelül 60 cm volt. A zajelnyomáshoz rezonátoros struktúrákat használtam, mesterségesen generált, öt komponensből álló multiszinuszos zavarjelet alkalmazva.

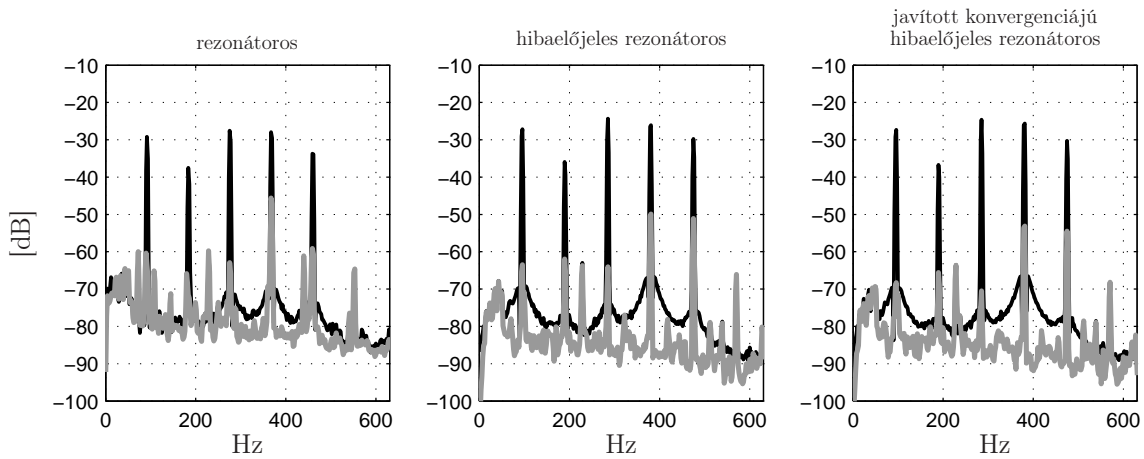
Az algoritmusok paramétereit úgy állítottam be kísérletileg, hogy hasonló elnyomást biztosítsanak állandósult állapotban. A dinamikus visszacsatolt alapstruktúra, annak hibaelőjeles és javított konvergenciájú hibaelőjeles változata esetén mért zajcsökkentési értékek¹ rendre 22 dB, 25 dB és 27 dB.

A 4.9(a). ábra alapján megállapítható, hogy a leglassabb beállást (26 sec) az egyszerű hibaelőjeles algoritmus produkálta. A leggyorsabb beállást (0.4 sec) a hibajel módosítás nélkül használó algoritmus érte el, és ettől kissé maradt el a javított konvergenciájú hibaelőjeles algoritmus 0.8 sec beállási idővel.

¹a zaj effektív értékének aránya ki- és bekapcsolt zajcsökkentő rendszer esetén



(a) Beállítás időfüggvényei.



(b) Zaj spektruma kikapcsolt (fekete) és bekapcsolt (szürke) zajscsökkentő rendszer esetén.

4.9. ábra. Zajscsökkentési teszteredmények szenzorhálózaton keresztül visszacsatolt rezonátoros struktúrák esetén.

Hibaelőjeles algoritmus esetén egy csomagban 32 adat előjelét továbbította egy szenzor, és $V = 32$ minta hosszúságú periódusonként számolta a hiba abszolút középértékét, amelyet $b_e=8$ biten tárolt. A hiba értékét előjel nélkül továbbító szenzor 25 darab 8 bites mintát küldött egy csomagban. Az overhead 21 byte ($o=168$ bit) csomagonként. A sávszélességigény ennek megfelelően hibaelőjeles algoritmus esetén 42%-ra, míg a javított konvergenciájú algoritmus esetén az eredeti 44%-ára csökkent.

4.5. Eredmények összegzése

Ebben a fejezetben a szenzorhálózaton keresztül dinamikusan visszacsatolt rezonátor és FxLMS alapú adaptív algoritmusok visszacsatoló ágában továbbítandó adatok mennyiségének csökkentésére ajánlottam egyszerű módszereket. A bemutatott, úgynevezett hibaelőjeles algoritmusok megvalósítása a szenzorok részéről kis számítási kapacitást igényelnek, csupán előjelképzést kell elvégezni.

A hibaelőjeles algoritmusok hátrányos tulajdonsága a hosszú beállási idő, és ideális esetben sem képesek nulla hibajelet elérni. A hibaelőjeles algoritmusok szakirodalmából ismert eredményeit a kiterjesztettem dinamikus visszacsatolt rendszerekre is. Megmutattam, hogy felső korlát adható a hibajel abszolút középértékére, és alsó korlát adható a beállási időre. Habár a szimulációs eredmények alapján ezen korlátok általában tág becslést adnak az algoritmus jellemző tulajdonságaira, de lehetővé teszik néhány fontos következtetés levonását:

- A hibaelőjeles algoritmusok dinamikus visszacsatolás esetén is korlátos hibát biztosítanak.
- A hibajel abszolút középértéke a konvergenciaparaméter bármely pozitív, korlátos értéke esetén korlátos marad.
- Az elméleti eredmények tendenciájukban megfelelően jósolják az egyes paramétereknek az algoritmus viselkedésére gyakorolt hatását.

A hibaelőjeles algoritmusok hátrányos tulajdonságainak enyhítésére kidolgoztam egy új módszert, amely a konvergenciaparaméter periodikus hangolásával gyorsabb beállást és ideális esetben akár nulla értékű hibát képes elérni a sáv szélességigény jelentős növekedése nélkül. A módosított algoritmus analízise során elégséges feltételt adtam a stabilitásra.

Az algoritmusokat gyakorlatban is teszteltem egy rezonátor alapú, szenzorhálózaton keresztül visszacsatolt zajcsökkentő rendszerben. A tapasztalatok alapján a javított konvergenciájú hibaelőjeles algoritmus körülbelül 50%-os sáv szélességnyereség mellett azonos állandósult állapotbeli zajjelnyomást körülbelül kétszeres beállási idővel képes elérni.

A hibaelőjel elvének alkalmazását a rezonátoros struktúrára a [3] cikkben javasoltam. A cikkben az alapelv ismertetésén túl rezonátoros megfigyelő esetén felső korlátot adtam a hibajel abszolút középértékére, és alsó korlátot adtam beállási időre. Itt tettem közzé a konvergenciatulajdonságok javítására kifejlesztett algoritmust, amelynek stabilitására vonatkozó elégséges feltételét ezen fejezet tartalmazza. A hibaelőjel elvének kiterjesztését az FxLMS algoritmusra [4] tartalmazza, amelyben közlöm a hiba abszolút középérték felső korlátjának számításának módszerét dinamikus visszacsatolás esetén. Ezt az elvet alkalmazom a dinamikus visszacsatolt rezonátoros struktúra esetén is.

5. fejezet

Adatvesztés hatása rezonátor alapú struktúrák működésére

Ebben a fejezetben az adatvesztésnek a rezonátor alapú algoritmusokra gyakorolt hatásával foglalkozom. Tapasztalatok alapján a rezonátoros algoritmusok tolerálnak bizonyos mértékű adatvesztést, de arra vonatkozóan nem ismertek eredmények, hogy az adatvesztés milyen körülmények között befolyásolja lényegesen a paraméterek konvergenciáját, és milyen jellegű adatvesztés tolerálható.

Első lépésként bemutatom az adatvesztés modellezésének módszerét, amelynek segítségével szükséges, illetve elégséges feltételeket fogalmazok meg arra nézve, hogy a rezonátor alapú megfigyelő állapotváltozói milyen feltételek mellett konvergálnak az adatvesztés nélkül elérhető optimális paramétervektorhoz. Az alaptételek általános adatvesztési mintázatra vonatkoznak, ezek segítségével néhány speciális esetet is tárgyalok. Az analízist először zajmentes rezonátor alapú megfigyelőre végzem el, majd az eredményeket kiterjesztem zajos mérések esetére, illetve dinamikusan visszacsatolt rezonátoros struktúrára.

5.1. Adatvesztési folyamat modellezési módszerei

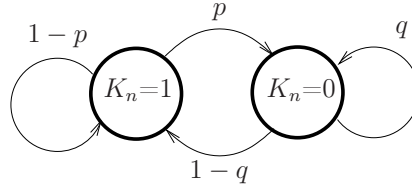
Az adatvesztés hatásának analitikus vizsgálatához meg kell teremteni a megfelelő formalizmust és a modellezési hátteret.

A következőkben azon adatokat, amelyek valamilyen ok miatt egy adott mintavételi időpontban nem ismertek, *hiányzó* vagy *elvesztett* adatnak nevezem, ha pedig a minta megfelelő időben az algoritmus rendelkezésére áll az adott mintavételi időpontban, akkor *feldolgozott* adatként hivatkozom rá. Az adatvesztés leírásához általánosan használt módszer egy indikátorfüggvény bevezetése [36, 37, 112, 113], amely a következő módon definiálható:

$$K_n = \begin{cases} 1, & \text{a minta feldolgozásra került az } n\text{-edik mintavételi pontban} \\ 0, & \text{a minta hiányzik az } n\text{-edik időpontban} \end{cases} \quad (5.1)$$

Feltételezem, hogy az adatvesztés ténye, tehát K_n ismert.

Az adatvesztést vezérlő folyamatot illetően alapvetően két esettel foglalkozom:



5.1. ábra. Markov-lánc alapú adatvesztési modell.

- determinisztikus,
- véletlenszerű.

Determinisztikus adatvesztés alatt az értendő, hogy a K_n indikátor előre jósolható értékeket vesz fel. Erre jellegzetes példa a dolgozat későbbi részeiben is vizsgált periodikusan ismétlődő adatvesztési mintázat, ahol az indikátorfüggvény értékei L hosszúságú periódusonként ismétlődnek: $K_n = K_{n+L}$.

Véletlenszerű adatvesztés esetén a K_n függvény egy valószínűségi változó. Valós idejű jelfeldolgozó rendszerek esetén használt leggyakoribb modellek például a Bernoulli-modell és a Markov-modell [112, 114].

Bernoulli-adatvesztés esetén $K_n = 1$ valamilyen q_0 valószínűséggel, és $K_n = 0$ $(1-q_0)$ valószínűséggel. Fontos tulajdonsága, hogy az adatvesztés minden időpontban egymástól független esemény.

Ennél kifinomultabb leírást tesz lehetővé az 5.1. ábrán látható Markov-lánc alapú modellezés [112, 114]. Ez a modell egymással korreláló, börsztös adatvesztést is képes leírni, amely hosszabb-rövidebb ideig tartó, de véletlenszerű zavar miatt keletkező kommunikációs hibákat jellemez.

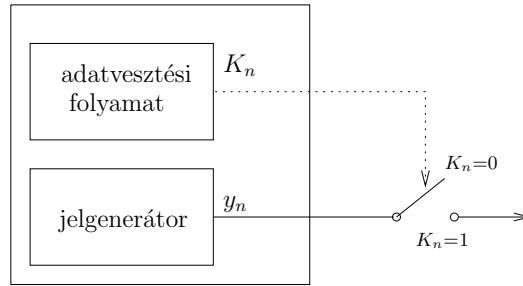
A Markov-lánc egy valószínűségi állapotgép, amelynek állapotátmeneti valószínűségeit az állapotokat összekötő nyilakra írt értékek adják. Az állapotgép állapota minden mintavételi időpontban változik vagy nem változik az adott állapothoz tartozó állapotátmeneti valószínűségeknek megfelelően. Stacioner állapotban annak a valószínűsége, hogy az állapotgép $K_n = 1$ állapotban van egy adott pillanatban [112]: $\mathbb{P}\text{rob}\{K_n = 1\} = \frac{1-q}{1-q+p}$, valamint $\mathbb{P}\text{rob}\{K_n = 0\} = \frac{p}{1-q+p}$.

A K_n függvény segítségével definiálható a Γ adatvesztési arány (valószínűség):

$$\Gamma = \mathbb{P}\text{rob}\{K_n = 0\} = 1 - \mathbb{P}\text{rob}\{K_n = 1\}. \quad (5.2)$$

Determinisztikus folyamatok esetén az adatvesztési arány kissé más felírással, de hasonló jelentéssel:

$$\Gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\sum_{j=0}^{n-1} K_j}{n} \right). \quad (5.3)$$



5.2. ábra. Jelmodell adatvesztés esetén.

5.2. Adatvesztés modelljének bemutatása a megfigyelőben

Adatvesztés esetén a jelmodellhez az adatvesztés modelljét is társítani kell. Ebben az esetben az 5.2. ábrán látható jelmodell érvényes, tehát $K_n = 1$ esetén az y_n jel értéke ismert, $K_n = 0$ esetén viszont az y_n értéke ismeretlen. Az ábrán a jelgenerátor a 2.2. ábrán látható bármelyik jelmodell lehet.

A hiányzó adatok kezelésére valós idejű rendszerekben alapvetően kétfajta stratégiával találkozunk:

- hiányzó minták pótlása (pl. nulladrendű tartó, interpoláció) [35, 37, 112],
- hiányzó minták figyelmen kívül hagyása [34, 36, 37].

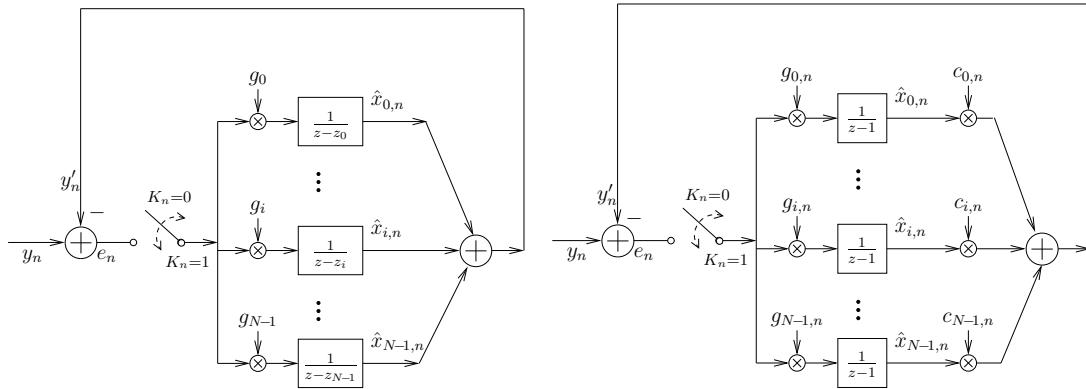
A dolgozatban a hiányzó adatok pótlásának kérdésével nem foglalkozom. Az állapotmegfigyelő működésének szintjén ez azt jelenti, hogy a megfigyelő hiányzó adat esetén az állapotbecslőt csupán a jelmodell alapján frissíti, a bemenetről nem csatol be új információt. Ezt az alapelvet a következő egyenletekkel leírható megfigyelő valósítja meg, amelyet a K_n indikátorfüggvény felhasználásával a megfigyelőt adatvesztés nélkül leíró (2.32) és (2.37) képletekből származtatunk:

időinvariáns modell	idővariáns modell
$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \langle z_i \rangle \hat{\mathbf{x}}_n + \mathbf{g}K_n(y_n - y'_n) \quad (5.4)$	$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \hat{\mathbf{x}}_n + \mathbf{g}_n K_n (y_n - y'_n) \quad (5.5)$

A (2.40)–(2.43) alapján a paraméterhibára és a hibajelre vonatkoztatott egyenletek is felírhatók a K_n indikátorfüggvényt felhasználva:

időinvariáns modell	idővariáns modell
$\tilde{\mathbf{x}}_{n+1} = (\langle z_i \rangle - \mathbf{g}K_n \mathbf{c}^T) \tilde{\mathbf{x}}_n \quad (5.6)$	$\tilde{\mathbf{x}}_{n+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{g}_n K_n \mathbf{c}_n^T) \tilde{\mathbf{x}}_n \quad (5.8)$
$e_n = \mathbf{c}^T \tilde{\mathbf{x}}_n \quad (5.7)$	$e_n = \mathbf{c}_n^T \tilde{\mathbf{x}}_n \quad (5.9)$

A megfigyelő adatvesztést is figyelembe vevő blokkdiagramjait az 5.3. ábra mutatja.



(a) Időinvariáns megfigyelő adatvesztés esetén. (b) Idővariáns megfigyelő adatvesztés esetén.

5.3. ábra. Spektrális megfigyelő adatvesztés esetén.

Az egyenletek és az ábrák alapján is látható, hogy feldolgozott adat esetén ($K_n = 1$) a megfigyelő és a jelmodell is az adatvesztés nélkül érvényes alakot ölti. Hiányzó adat esetén ($K_n = 0$) azonban a megfigyelő belső visszacsatolása megszűnik, és az állapotbecslő frissítése csupán a jelmodell alapján történik, új információt nem csatol be az algoritmus. Ez úgy is interpretálható, hogy mind a becsült jel, mind a jelmodell kimenetét K_n értékével súlyozzuk.

A következő alfejezetekben az algoritmus konvergenciájára adok szükséges, valamint elégséges feltételeket. Azt vizsgálom, hogy mikor érhető el aszimptotikusan torzítatlan becslő, tehát a megfigyelő állapotváltozói mikor konvergálnak az állapotmodell paramétereihöz. Ez akkor teljesül, amennyiben az $\tilde{\mathbf{x}}_n$ paraméterhiba a nullába tart $n \rightarrow \infty$ esetén. Amennyiben zajjal terhelt a megfigyelés, abban az esetben a konvergenciát várható értékben vizsgálom. A zajos esetet a zajmentes megfigyelésekre vonatkozó eredményekből származtatom az 5.5. alfejezetben.

5.3. Torzítatlan spektrumbecslés szükséges feltétele

5.3.1. Szükséges feltétel általános esetben

A torzítatlan becslő létezésének szükséges feltételét a jelmodell megfigyelhetőségi feltétele alapján vizsgálom: amennyiben az adatvesztéssel kiegészített jelmodell nem megfigyelhető, abban az esetben a torzítatlan becslő létezése sem biztosított. A megfigyelhetőség szükséges feltételét a következő tétel tartalmazza.

5.1. Tétel. *Egy periodikus jel jelparamétereinek torzítatlan becslője akkor létezik, amennyiben a $\{\mathbf{c}_j K_j\}$ vektorok kifeszítenek egy N dimenziós teret.*

Bizonyítás:

Ahhoz, hogy a jelparamétereiket becsülni tudjuk, az adatvesztéssel kiegészített jelmodellhez tartozó rendszernek megfigyelhetőnek kell lennie, tehát megfigyelhetőségi mártixának teljes rangúnak kell lennie. Mivel a (2.18) és (2.19) egyenletek

alapján $y_n = \mathbf{c}^T \langle z_i \rangle^n \mathbf{x}_0$, az adatvesztéssel kiegészített jelmodell megfigyelhetőségi mátrixa [115] az alábbi módon írható fel:

$$\mathcal{O}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \langle z_i \rangle^0 K_0 \\ \mathbf{c}^T \langle z_i \rangle^1 K_1 \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \langle z_i \rangle^n K_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_0^T K_0 \\ \mathbf{c}_1^T K_1 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_n^T K_n \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

ahol kihasználtuk, hogy (2.45) alapján $\mathbf{c}_n^T = \mathbf{c}^T \langle z_i \rangle^n$, az adatvesztést pedig a K_n szorzóval vettük figyelembe, aminek következtében a rangszámítás szempontjából az elveszített adathoz ($K_n = 0$) tartozó sorokat figyelmen kívül hagyjuk.

Egy rendszer akkor megfigyelhető, ha az \mathcal{O}_n megfigyelhetőségi mátrix teljes rangú, tehát $\text{rank}(\mathcal{O}_n) = N$ [115]. Ennek teljesítéséhez az \mathcal{O}_n mátrixnak legalább N darab lineárisan független sorral kell rendelkeznie, tehát a soroknak ki kell feszíteni egy N dimenziós teret. ■

5.3.2. Szükséges és elégséges feltétel egyenletes rezonátorel-helyezkedés és véges beállású megfigyelő esetén

Ebben a szakaszban azt mutatom meg, hogy az 5.1. Tételben adott feltétel a torzítatlan becslő előállításának elégséges feltétele is véges beállású megfigyelő esetén.

5.2. Tétel. *Egyenletes rezonátorelhelyezkedés és $\alpha = 1$ esetén a rezonátor alapú spektrális megfigyelő torzítatlan becslőt ad a jelparaméterekre, amennyiben a $\{\mathbf{c}_j K_j\}$ vektorok kifeszítenek egy N dimenziós teret.*

Bizonyítás: A bizonyításhoz a megfigyelő (2.42) egyenletben adott idővariáns alakját használom, kiegészítve a K_n indikátorfüggvénnyel:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{n+1}^{\text{LTV}} = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{N} \mathbf{c}_n^* K_n \mathbf{c}_n^T \right) \tilde{\mathbf{x}}_n^{\text{LTV}} \quad (5.11)$$

$$= \prod_{j=0}^n \left(\mathbf{I} - \frac{1}{N} \mathbf{c}_j^* K_j \mathbf{c}_j^T \right) \hat{\mathbf{x}}_0^{\text{LTV}} \quad (5.12)$$

Az idővariáns forma előnye, hogy adatvesztés esetén ($K_j = 0$) az állapotátmeneti mátrix az egységmátrix, tehát csupán azokat az állapotátmeneti mátrixokat kell figyelembe venni, amelyekhez tartozó adatot feldolgoztuk.

A (2.53) egyenletben adott ortogonalitási tulajdonságot kihasználva a mátrixszorzások elvégzésével igazolható, hogy az állapotátmeneti mátrixok ebben a speciális esetben kommutatívak:

$$\left(\mathbf{I} - \frac{1}{N} \mathbf{c}_n^* \mathbf{c}_n^T \right) \left(\mathbf{I} - \frac{1}{N} \mathbf{c}_k^* \mathbf{c}_k^T \right) = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{N} \mathbf{c}_k^* \mathbf{c}_k^T \right) \left(\mathbf{I} - \frac{1}{N} \mathbf{c}_n^* \mathbf{c}_n^T \right), \quad (5.13)$$

és projektorok [106], tehát:

$$\left(\mathbf{I} - \frac{1}{N} \mathbf{c}_k^* \mathbf{c}_k^T \right) \left(\mathbf{I} - \frac{1}{N} \mathbf{c}_k^* \mathbf{c}_k^T \right) = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{N} \mathbf{c}_k^* \mathbf{c}_k^T \right). \quad (5.14)$$

Mivel a \mathbf{c}_n vektorok N szerint periodikusak:

$$\mathbf{c}_n = \mathbf{c}_{n+N}, \quad (5.15)$$

így legfeljebb N különböző $(\mathbf{I} - \frac{1}{N}\mathbf{c}_n^*\mathbf{c}_n^T)$ állapotátmeneti mátrix létezik. Ezen állapotátmeneti mátrixok mindegyikének jelen kell lennie az (5.12) szorzatban, egyébként a $\mathbf{c}_j K_j$ vektorok nem feszítenék ki az N dimenziós teret, tehát nem teljesülne az 5.1. Tételben megadott szükséges feltétel.

Az (5.13) és (5.14) egyenletek azt mutatják, hogy az (5.12) képletben az állapotátmeneti mátrixok sorrendje tetszőlegesen felcserélhető, illetve az azonos alakú mátrixok összevonhatóak anélkül, hogy a végső állapot megváltozna. Amennyiben úgy rendezzük át a szorzatokat, hogy az indexek növekvő, tehát $n = [0 \dots N - 1]$ sorrendbe kerüljenek, akkor a megfigyelő adatvesztés nélkül az első N ütemre érvényes állapotátmeneti egyenletét kapjuk. A megfigyelőnek ezen alakja esetén pedig ismert, hogy legfeljebb N ütem alatt beáll [13], tehát $\{\tilde{\mathbf{x}}_n = 0 \ n \geq N\}$. Ennek megfelelően adatvesztés esetén is nullára csökken a paraméterhiba, amennyiben a megfigyelhetőség feltétele teljesül. Tehát a szükséges feltétel egyben elégséges is. ■

A tétel bizonyításából az is kiderül, hogy a megfigyelő továbbra is véges beállítású marad, de a beállítás ideje az adatvesztés mintázatától is függ. A paraméterhiba akkor csökken nullára, amikor a megfigyelt y_n jel egy periódusához tartozó összes mintát feldolgozta a megfigyelő; az adatvesztés miatt ezek nem feltétlenül ugyanabból a periódusból származó minták. Ekkor teljesül ugyanis, hogy az összes N különböző \mathbf{c}_j vektorhoz tartozó adat feldolgozásra került, tehát a $\{\mathbf{c}_j K_j\}$ vektorok kifeszítenek egy N dimenziós teret.

5.4. Torzítatlan spektrumbecslés elégséges feltételei

5.4.1. Elégséges feltétel általános esetben

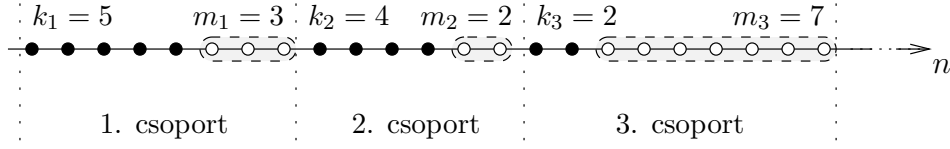
A megfigyelő konvergenciája elégséges feltételének bizonyítása során megmutatom, hogy $\|\tilde{\mathbf{x}}_n\|$, tehát a paraméterhiba normája milyen feltételek esetén konvergál nullához. Mivel a vektornormára vonatkozó axiómák alapján [106]: $\|\tilde{\mathbf{x}}_n\| = 0 \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{x}}_n = 0$, így ezáltal nulla paraméterhibát, tehát torzítatlan becslőt kapunk. A következőkben a szükséges feltétel kimondásához felhasznált változókat definiálom, aztán bemutatom a feltételt és annak bizonyítását. A feltételt a megfigyelő időinvariáns formáját használva bizonyítom, mert kihasználom, hogy az állapotátmeneti mátrix konstans értékű.

Feltételezzük, hogy a megfigyelő feldolgozott adatokhoz tartozó állapotátmeneti mátrixának egyszeres multiplicitású sajátértékei vannak, és létezik a következő spektrál-felbontás:

$$(\langle z_i \rangle - \mathbf{g}\mathbf{c}^T) = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{-1}, \quad (5.16)$$

ahol a $\mathbf{\Lambda}$ a λ_i sajátértékeket tartalmazó diagonálmátrix, az \mathbf{U} mátrix pedig a sajátvektorokat tartalmazó mátrixot jelöli. Azt az esetet, amikor a sajátértékek többszörös multiplicitásúak, később vizsgálom.

- : feldolgozott minták ○ : hiányzó minták
- (---) : hiányzó intervallumok



5.4. ábra. Jelölések magyarázata. Hiányzó intervallumok száma: $\mathcal{P} = 3$, feldolgozott adatok száma: $k = k_1 + k_2 + k_3 = 11$.

Definiáljuk a következő változókat:

- ζ valós, pozitív skalár érték, amely:

$$\zeta = \|\mathbf{U}\| \|\mathbf{U}^{-1}\|. \quad (5.17)$$

- $\bar{\lambda}$ valós, pozitív szám jelöli a $(\langle z_i \rangle - \mathbf{g}\mathbf{c}^T)$ mátrix sajátértékeinek abszolút értékei közül a legnagyobbat. Ez megegyezik $\mathbf{\Lambda}$ normájával:

$$\bar{\lambda} = \max_i |\lambda_i| = \|\mathbf{\Lambda}\|. \quad (5.18)$$

- k a megfigyelő által feldolgozott összes adat számát jelöli.
- \mathcal{P} az összes olyan *intervallum* száma, amelyek *egymás utáni* hiányzó adatokat tartalmaznak.

A k és \mathcal{P} változók jelentését az 5.4. ábra illusztrálja. Látható, hogy míg k minták, addig \mathcal{P} intervallumok számát jelöli.

$\bar{\lambda}$ és ζ értékei a megfigyelő megtervezését követően offline módon számíthatók. Speciális esetekben analitikus kiértékelésük is lehetséges, például egyenletes rezonátorelhelyezkedés esetén $\bar{\lambda} = (1 - \alpha)^{1/N}$ [67].

5.3. Tétel. *Feltételezzük, hogy a rezonátor alapú megfigyelő paraméterhibára vonatkoztatott állapotátmeneti mátrixának sajátértékei egyszeres multiplicitásúak. Amennyiben a hiányzó mintákból álló intervallumok és a feldolgozott adatok számának aránya kisebb, mint az (5.20) egyenletben adott kritikus korlát, akkor a megfigyelő a jelparaméterek aszimptotikusan torzítatlan becselőjét szolgáltatja:*

$$\text{ha } \frac{\mathcal{P}}{k} < \pi_{\text{cr}} \Rightarrow \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ k \rightarrow \infty}} \tilde{\mathbf{x}}_n = 0, \quad (5.19)$$

$$\pi_{\text{cr}} = -\frac{\log \bar{\lambda}}{\log \zeta}. \quad (5.20)$$

Bizonyítás: A kezdeti állapotból $\tilde{\mathbf{x}}_{n+1}$ állapotba történő eredő állapotátmeneti mátrix megkapható (5.6) rekurzív kifejtésével:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{n+1} = \prod_{j=0}^n (\langle z_i \rangle - \mathbf{g}K_j\mathbf{c}^T) \cdot \tilde{\mathbf{x}}_0. \quad (5.21)$$

Amennyiben az (5.16) felbontás létezik, akkor az adott mátrix k -adik hatványa a következő módon számítható:

$$(\langle z_i \rangle - \mathbf{g}\mathbf{c}^T)^k = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{U}^{-1}, \quad (5.22)$$

mivel $f(\mathbf{X}) = \mathbf{U}f(\mathbf{\Lambda}_\mathbf{X})\mathbf{U}^{-1}$ bármely \mathbf{X} mátrixra, amelynek sajátértékei egyszeres multiplicitásúak [106].

Csoportosítsuk az (5.21) egyenletben található szorzatokat az 5.4. ábrán látható módon! Minden j -edik csoport elején $k_j > 0$ darab feldolgozott minta található, amelyet $m_j > 0$ hiányzó minta követ. A csoportosítást elvégezve (5.21) átalakítható a megfelelő $K_j = \{0 \text{ vagy } 1\}$ értékeket behelyettesítve és (5.22)-ot felhasználva:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{n+1} = \prod_{j=1}^{\mathcal{P}} \langle z_i \rangle^{m_j} (\langle z_i \rangle - \mathbf{g}\mathbf{c}^T)^{k_j} \cdot \tilde{\mathbf{x}}_0 \quad (5.23)$$

$$= \prod_{j=1}^{\mathcal{P}} \langle z_i \rangle^{m_j} \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{k_j}\mathbf{U}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{x}}_0, \quad (5.24)$$

ahol \mathcal{P} a mintacsoportok számát jelöli az n -edik időpontig. Vegyük észre, hogy \mathcal{P} egyben a pusztán hiányzó adatokat tartalmazó intervallumok számával is megegyezik, mivel minden csoport egyetlen ilyen intervallumot tartalmaz definíció szerint. A minták csoportosítása megszorítás nélkül megtehető, ha megengedjük a $k_1 = 0$ értéket, amennyiben a jelsorozat hiányzó mintával/mintákkal kezdődik, illetve megengedjük az $m_{\mathcal{P}} = 0$ értéket, amennyiben a jelsorozat feldolgozott adatokkal záródik.

Az $\tilde{\mathbf{x}}_{n+1}$ normájára felső korlát adható, amennyiben az (5.24) normáját vesszük, és az $\|\mathbf{A}\mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|$ egyenlőtlenséget alkalmazzuk [106]:

$$\|\tilde{\mathbf{x}}_{n+1}\| \leq \prod_{j=1}^{\mathcal{P}} \|\langle z_i \rangle^{m_j}\| \|\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{k_j}\mathbf{U}^{-1}\| \cdot \|\tilde{\mathbf{x}}_0\|. \quad (5.25)$$

A $\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{k_j}\mathbf{U}^{-1}$ tag normája a következő módon számítható:

$$\|\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{k_j}\mathbf{U}^{-1}\| \leq \|\mathbf{U}\| \|\mathbf{\Lambda}\|^{k_j} \|\mathbf{U}^{-1}\| = \zeta \cdot \bar{\lambda}^{k_j}, \quad (5.26)$$

ahol az (5.17) és (5.18) definíciókat helyettesítettem be. Továbbá a következő egyenlőtlenség érvényes:

$$\|\langle z_i \rangle^{m_j}\| \leq \|\langle z_i \rangle\| \|\langle z_i \rangle\| \dots \|\langle z_i \rangle\| \|\langle z_i \rangle\| = 1^{m_j} = 1, \quad (5.27)$$

ahol azt használtam ki, hogy a rezonátor alapú megfigyelő hibavektorra vonatkoztatott állapotátmeneti mátrixának normája egységnyi, mind feldolgozott, mind hiányzó adatok esetén; lásd: (F-1) egyenletet az F. Függelékben $K_n = 0$ esetben.

Vegyük észre, hogy azon intervallumokban, ahol az összes adat hiányzik, az eredő állapotátmeneti mátrix normája egységnyi az intervallum m_j hosszától függetlenül. Emiatt tartalmazza az elégséges feltétel a hiányzó intervallumok és nem a hiányzó adatok számát. Az (5.26) és (5.27) egyenlőtlenségeket behelyettesítve az (5.25) kép-
letbe:

$$\|\tilde{\mathbf{x}}_{n+1}\| \leq \prod_{j=1}^{\mathcal{P}} \zeta \bar{\lambda}^{k_j} \cdot \|\tilde{\mathbf{x}}_0\| = \zeta^{\mathcal{P}} \bar{\lambda}^{\sum k_j} \cdot \|\tilde{\mathbf{x}}_0\| = \zeta^{\mathcal{P}} \bar{\lambda}^k \cdot \|\tilde{\mathbf{x}}_0\| = \left(\zeta^{\frac{\mathcal{P}}{k}} \bar{\lambda}\right)^k \cdot \|\tilde{\mathbf{x}}_0\|, \quad (5.28)$$

ahol $k = \sum_{j=1}^{\mathcal{P}} k_j$ az összes feldolgozott minta számát szolgáltatja. Keressük azon ν konstans értékét, amelyre $(\zeta^{\nu} \bar{\lambda}) < 1$:

$$\begin{aligned} \zeta^{\nu} \bar{\lambda} &< 1 \\ \nu \log \zeta + \log \bar{\lambda} &< 0 \\ \nu &< -\frac{\log \bar{\lambda}}{\log \zeta} = \pi_{\text{cr}}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Amennyiben ζ kitevője az (5.28) képletben kisebb, mint ν , abban az esetben $(\zeta^{\nu} \bar{\lambda})^k$ nullához tart, tehát (5.28) alapján a paraméterhiba normája is nullához tart.

Az (5.19) feltétel alapján teljesül, hogy $\frac{\mathcal{P}}{k} = \nu < \pi_{\text{cr}}$, tehát a tételben megadott elégséges feltétel biztosítja, hogy $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\tilde{\mathbf{x}}_n\| = 0$, ezért a paraméterhiba normája, így a paraméterhiba is aszimptotikusan tart nullába. ■

Megjegyzések:

- 1) A $(\langle z_i \rangle - \mathbf{g}\mathbf{c}^T)$ sajátértékei általában egyszeres multiplicitásúak. Gyakorlati szempontból fontos kivétel a véges beállású megfigyelő, amely N -szeres zérus sajátértékkel rendelkezik. Erre az esetre viszont az 5.2. Tétel tartalmazza a konvergencia elégséges feltételét.
- 2) Az (5.19) képlet az $n \rightarrow \infty$ mellett a $k \rightarrow \infty$ feltételt is tartalmazza. Ez azért szükséges, mert $\frac{\mathcal{P}}{k} < \pi_{\text{cr}}$ például akkor is teljesülhet, ha a működés kezdetén megfelelően sok, de véges számú adatot dolgoz fel a megfigyelő, és ezt követően minden adat elvész, így $\mathcal{P} = 1$. Az aszimptotikus torzítatlansághoz viszont (5.28) alapján szükséges, hogy végtelen számú adatot dolgozzon fel a megfigyelő ($k \rightarrow \infty$), ellenkező esetben a $\left(\zeta^{\frac{\mathcal{P}}{k}} \bar{\lambda}\right)^k$ tag nem tart nullába.
- 3) Elképzelhető, hogy a $\frac{\mathcal{P}}{k}$ arány időben változik, amint $n \rightarrow \infty$ és $k \rightarrow \infty$ (például az adatvesztés nem egy stacioner folyamat). Amennyiben az (5.19) feltétel nem minden n -re teljesül, de találtunk olyan $\{\frac{\mathcal{P}}{k}; k \rightarrow \infty\}$ részsorozatot, amelyre teljesül az (5.19) feltétel, abban az esetben is a torzítatlan becslőt állítja elő a megfigyelő. Ennek oka, hogy az F. Függelék alapján a hibavektorra vonatkoztatott állapotátmeneti mátrix normája egységnyi, tehát ha belátjuk, hogy a paraméterhiba egyszer nullára csökkent, akkor az már nem nőhet nulla fölé.

A tétel következményeként az adatvesztési arányra is megfogalmazható elégséges feltétel.

5.1. Korollárium. *Ha a Γ adatvesztési arány kisebb, mint az (5.31) által meghatározott kritikus érték, abban az esetben a rezonátor alapú megfigyelő a jelparaméterek aszimptotikusan torzítatlan becslőjét állítja elő:*

$$\text{ha } \Gamma < \Gamma_{\text{cr}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{x}}_n = 0, \quad (5.30)$$

$$\Gamma_{\text{cr}} = \frac{1}{1 + 1/\pi_{\text{cr}}}. \quad (5.31)$$

Bizonyítás: Az adatvesztési arány felírható a hiányzó és az összes minta (hiányzó + feldolgozott) hányadosaként:

$$\Gamma = \frac{\sum_{j=1}^{\mathcal{P}} m_j}{\sum_{j=1}^{\mathcal{P}} k_j + \sum_{j=1}^{\mathcal{P}} m_j} \longrightarrow \frac{\sum_{j=1}^{\mathcal{P}} m_j}{\sum_{j=1}^{\mathcal{P}} k_j} = \frac{1}{\frac{1}{\Gamma} - 1} \quad (5.32)$$

Az 5.4. ábra alapján megállapítható, hogy az összes feldolgozott adat: $k = \sum_{j=1}^{\mathcal{P}} k_j$, és a hiányzó intervallumok száma nem lehet több a hiányzó adatok számánál, tehát $\mathcal{P} \leq \sum_{j=1}^{\mathcal{P}} m_j$. Ezt az egyenlőtlenséget és az (5.31) által adott kritikus értéket behelyettesítve az (5.32) egyenletbe, a $\Gamma < \Gamma_{\text{cr}}$ feltétellel élve a következőt kapjuk:

$$\frac{\mathcal{P}}{k} \leq \frac{\sum_{j=1}^{\mathcal{P}} m_j}{\sum_{j=1}^{\mathcal{P}} k_j} = \frac{1}{\frac{1}{\Gamma} - 1} < \frac{1}{\frac{1}{\Gamma_{\text{cr}}} - 1} = \frac{1}{\frac{1}{1/(1+1/\pi_{\text{cr}})} - 1} = \pi_{\text{cr}}, \quad (5.33)$$

tehát $\Gamma < \Gamma_{\text{cr}}$ esetén az (5.19) képletben megfogalmazott elégséges feltétel teljesül. ■

A fenti feltétel az 5.3. Tételben megadott elégséges feltétel egy alternatív megfogalmazása azzal a módosítással, hogy nem kezeljük az egymás után található hiányzó adatokat egyetlen egységként, hanem a hiányzó minták számát adjuk meg a hiányzó intervallumok egy maximális, legrosszabb esetben bekövetkező értékeként. A két állítás abban az esetben ekvivalens, amennyiben egymástól elszigetelt hiányzó adatok találhatóak a jelben. Ellenkező esetben az adatvesztési arány pesszimisztikusabb felső korlátot enged meg az adatvesztésre vonatkozóan.

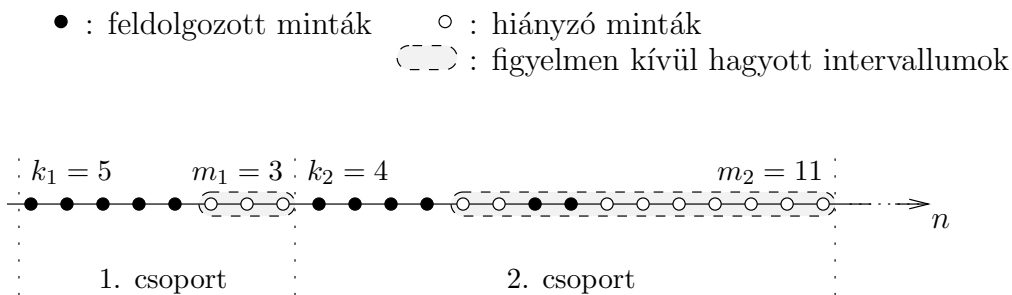
5.4.2. Elégséges feltétel blokkorientált vizsgálattal

Ebben a szakaszban az 5.3. Tétel alapján egy alternatív elégséges feltételt fogalmazok meg a rezonátor alapú megfigyelő konvergenciájára vonatkozóan.

5.4. Tétel. *Amennyiben a feldolgozott jelsorozatban végtelen számú, legalább L_{cr} egymást követő feldolgozott adatokat tartalmazó intervallum található, akkor a rezonátor alapú megfigyelő a jelparaméterek aszimptotikusan torzítatlan becslőjét szolgáltatja.*

$$L_{\text{cr}} = \left\lfloor \frac{1}{\pi_{\text{cr}}} + 1 \right\rfloor, \quad (5.34)$$

ahol $\lfloor \cdot \rfloor$ az alsó egészrész függvényt jelöli.



5.5. ábra. Jelölések magyarázata. Amennyiben a kritikus blokkméret: $L_{cr} = 4$, akkor a figyelmen kívül hagyott intervallumok száma: $\mathcal{P} = 2$, valamint: $k = k_1 + k_2 = 9$.

Bizonyítás: Csoportosítsuk a mintákat úgy, hogy csupán azokat a feldolgozott adatokat számítjuk be k értékébe, amelyek legalább L_{cr} közvetlenül egymás után feldolgozott adatot tartalmazó intervallumokban találhatóak. A többi feldolgozott mintát figyelmen kívül hagyjuk, és azokhoz az intervallumokhoz soroljuk, amelyek hiányzó adatokat tartalmaznak. A csoportosítási módszert az 5.5. ábra illusztrálja. Az 5.3. Tétel a minták ily módon történő csoportosítása esetén is érvényes marad. Ennek oka, hogy az (5.27) egyenlet alapján a tételben a hiányzó adatokat tartalmazó intervallumokra vonatkozó egyetlen megkötés az, hogy az ezekben az intervallumokban található minták esetén a megfigyelő állapothibára vonatkozó állapotátmeneti mátrixának normája egységnyi legyen. Ez a feltétel viszont mind feldolgozott, mind hiányzó adatok esetén érvényes, lásd: (F-1) egyenlet az F. Függelékben.

Tételezzük fel, hogy végtelen számú olyan intervallum létezik, amelyek legalább L_{cr} egymást követő feldolgozott adatot tartalmaznak. Az 5.5. ábra alapján nyilvánvaló, hogy minden, legalább L_{cr} darab feldolgozott mintából álló intervallumot hiányzó adatokat is tartalmazó intervallumok követnek, tehát a feldolgozott adatok száma legalább $k \geq \mathcal{P}L_{cr}$. Ennek köszönhetően a $\frac{\mathcal{P}}{k}$ arány:

$$\frac{\mathcal{P}}{k} \leq \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}L_{cr}} = \frac{1}{L_{cr}} = \frac{1}{[1 + 1/\pi_{cr}]} < \pi_{cr}, \quad (5.35)$$

tehát az 5.3. Tételben megfogalmazott feltétel teljesül, így a torzítatlan paraméterbecslés feltételét biztosítottuk. A végtelen számú intervallum a $k \rightarrow \infty$ teljesítéséhez szükséges. ■

A tétel gyakorlatban alkalmazható például csomag alapú kommunikáció vagy börsztes adatfeldolgozás esetén. Amennyiben a csomagméretet, illetve az adatbörzsök hosszát legalább L_{cr} értékűre választjuk, akkor biztosítható a megfigyelő konvergenciája.

Az eddigi elégséges feltételek az adatvesztés általános integrális jellemzőire vonatkoztak. Ez a tétel azonban rávilágít arra, hogy a torzítatlan paraméterbecslés vizsgálatakor lényeges szempont, hogy a feldolgozott adatok milyen pozícióban vannak egymáshoz képest. Fontos, hogy ne vesszen el lényeges információ a jelből, amely a tétel állítása szerint biztosan teljesül, ha legalább L_{cr} számú, egymást folytonosan követő mintát feldolgoz a megfigyelő.

5.4.3. Véletlenszerű adatvesztés

Az eddigi eredmények következményeként véletlenszerű adatvesztés esetén is bizonyítható a konvergencia.

5.2. Korollárium. *Legyen az adatvesztés Bernoulli- vagy Markov-modell alapján működő folyamat. Ebben az esetben a rezonátor alapú megfigyelő a jelparaméterek aszimptotikusan torzítatlan becslőjét szolgáltatja egy valószínűséggel.*

Bizonyítás: Osszuk a megfigyelő működését L_{cr} hosszúságú intervallumokra! Az n időpontig $\frac{n}{L_{\text{cr}}}$ intervallum alakítható ki. Legyen Υ annak a valószínűsége, hogy egy adott intervallumban minden adat feldolgozásra kerül.

Az 5.1. alfejezetben leírtaknak megfelelően Bernoulli adatvesztés esetén egy minta q_0 valószínűséggel dolgozható fel, tehát L_{cr} minta esetén: $\Upsilon = q_0^{L_{\text{cr}}}$, mivel az adatvesztés mintánként független esemény.

Markov-modell esetén annak a valószínűsége, hogy egy tetszőleges minta (így például egy intervallum első mintája) feldolgozásra kerül $\mathbb{P}\text{rob}\{K_n = 1\} = \frac{1-q}{1-q+p}$, és az 5.1. ábra alapján ebben az állapotban $(1-p)^{L_{\text{cr}}-1}$ valószínűséggel marad az intervallum végéig, tehát még $(L_{\text{cr}} - 1)$ ütemet. Ennek megfelelően $\Upsilon = \frac{1-q}{1-q+p}(1-p)^{L_{\text{cr}}-1}$.

A nagy számok törvénye alapján az L_{cr} hosszúságú, pusztán feldolgozott adatot tartalmazó intervallumok száma $\Upsilon \frac{n}{L_{\text{cr}}}$ egy valószínűséggel [116]. Az $\Upsilon \frac{n}{L_{\text{cr}}}$ kifejezés viszont $n \rightarrow \infty$ esetén végtelenbe tart, ha $\Upsilon > 0$, tehát teljesül az 5.4. Tételben adott feltétel. Mivel $\Upsilon > 0$ minden nem elfajult esetben teljesül ($q_0 > 0$, $q < 1$, $p < 1$), így a konvergencia biztosított. ■

A bizonyítás két gyakori, véletlenszerű adatvesztést leíró modellre épít, de általánosságban minden olyan véletlenszerű adatvesztés esetén érvényes, amelyben nem nulla valószínűséggel alakulnak ki L_{cr} hosszúságú intervallumok.

5.5. Eredmények kiterjesztése zajos esetre

Ebben az alfejezetben azt mutatom meg, hogy a rezonátor alapú megfigyelő konvergenciájának szükséges, illetve elégséges feltételei zajos esetben is érvényesek.

A zajos mérések esetén érvényes (2.62) és (2.64) egyenletek adatvesztés esetén a következő alakot öltik:

időinvariáns modell	idővariáns modell
$\tilde{\mathbf{x}}_{n+1} = (\langle z_i \rangle - \mathbf{g}K_n \mathbf{c}^T) \tilde{\mathbf{x}}_n + \mathbf{g}K_n n_n$ <p style="text-align: right;">(5.36)</p>	$\tilde{\mathbf{x}}_{n+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{g}_n K_n \mathbf{c}_n^T) \tilde{\mathbf{x}}_n + \mathbf{g}_n K_n n_n$ <p style="text-align: right;">(5.37)</p>

A szükséges feltétel kiterjesztése irodalmi hivatkozások alapján egyszerűen megtehető, ugyanis megmutatható, hogy a lineáris rendszerek megfigyelhetőségi feltétele

akkor is érvényes, amennyiben a méréseket zaj terheli [117, 118]. Tehát az 5.1. Tétel érvényes zajos mérések esetén is.

Az elégséges feltételek a paraméterbecslés várható értékére fogalmazhatók meg zajos mérések esetén. Megmutatható, hogy a megfigyelési zaj a becslés várható értékére nincsen hatással. Mivel a rendszer lineáris a zajra nézve, így a szuperpozíció elve alapján nem okozhat torzítást a mérésben.

A várható érték konvergenciájának vizsgálatához vegyük az (5.36) állapotegyenlet várható értékét [15, 16]:

$$\mathbb{E}_K\{\tilde{\mathbf{x}}_{n+1}\} = \mathbb{E}_K\{(\langle z_i \rangle - \mathbf{g}K_n\mathbf{c}^T)\tilde{\mathbf{x}}_n + \mathbf{g}K_n n_n\}, \quad (5.38)$$

ahol \mathbb{E}_K az adatvesztést jellemző $\{K_0, K_1, \dots\}$ sorozatra vonatkoztatott feltételes várható értéket jelöli. A feltételes várható érték alkalmazásával megvizsgáljuk a zaj hatását az állapotváltozók várható értékére az adatvesztési mintázatot paraméterként tekintve, aztán eldönthető, hogy az ismert adatvesztési mintázat hogyan befolyásolja a várható érték konvergenciáját. A következő lépések alapján látható, hogy a várható értékre vonatkozó állapotegyenlet a zajmentes esettel megegyező formára redukálódik, amelynek tulajdonságai ismertek.

A $\langle z_i \rangle$, \mathbf{g} , \mathbf{c}^T és K_n tagok konstansok \mathbb{E}_K -ra nézve, így (5.38) átalakítható:

$$\mathbb{E}_K\{\tilde{\mathbf{x}}_{n+1}\} = (\langle z_i \rangle - \mathbf{g}K_n\mathbf{c}^T)\mathbb{E}_K\{\tilde{\mathbf{x}}_n\} \quad (5.39)$$

$$= \prod_{j=0}^n (\langle z_i \rangle - \mathbf{g}K_j\mathbf{c}^T)\mathbb{E}_K\{\tilde{\mathbf{x}}_0\}. \quad (5.40)$$

Az (5.38) egyenletből azért tűnik el a zajt tartalmazó tag az (5.39) egyenletben, mert (5.38) a zaj lineáris függvénye, n_n és K_n függetlennek tekinthetők, továbbá $\mathbb{E}_K\{n_n\}=0$.

Az 5.3. Tételben megmutattam, hogy a $\prod_{j=0}^n (\langle z_i \rangle - \mathbf{g}K_j\mathbf{c}^T)$ mátrixszorzat normája az (5.40) egyenletben nullához konvergál, amennyiben bármely elégséges feltétel teljesül, így $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_K\{\tilde{\mathbf{x}}_n\}=0$. A többi elégséges feltétel az 5.3. Tételre épít, így azok is érvényesek maradnak.

Abban a speciális esetben, amikor a megfigyelő véges beállású, az 5.2. Tétel érvényes. Ekkor is belátható, hogy a $\prod_{j=0}^n (\langle z_i \rangle - \mathbf{g}K_j\mathbf{c}^T)$ nulla értéket szolgáltat, amennyiben a jel egy periódusának mind az N különböző értékét feldolgozta a megfigyelő. Ennek megfelelően $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_K\{\tilde{\mathbf{x}}_n\}=0$ szintén igaz.

Megállapíthatjuk, hogy a rezonátor alapú megfigyelő aszimptotikusan torzítatlan paraméterbecslést tesz lehetővé zajos mérések esetén is, amennyiben az 5.2., 5.3., 5.4. Tételekben vagy 5.1., 5.2. Korolláriumokban adott feltételek bármelyike igaz.

5.6. Eredmények kiterjesztése dinamikusan visszacsatolt rezonátoros struktúrára

Adatvesztés esetén a dinamikusan visszacsatolt rezonátoros algoritmust leíró egyenletek (2.85)–(2.90) egyenletekből kiindulva a következők:

időinvariáns modell	idővariáns modell
$u_n = \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}_n, \quad (5.41)$	$u_n = \mathbf{c}_n^T \hat{\mathbf{x}}_n, \quad (5.43)$
$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \langle z_i \rangle \hat{\mathbf{x}}_n + \alpha \mathbf{W} \mathbf{z} K_n e_n \quad (5.42)$	$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \hat{\mathbf{x}}_n + \alpha \mathbf{W} \mathbf{c}_n^* K_n e_n \quad (5.44)$

Hasonlóan a rezonátoros megfigyelőhöz, hiányzó adat esetén az állapotváltozókat pusztán a jelmodell alapján frissíti az algoritmus, és nem csatol be információt a környezetből.

A következőkben megmutatom, hogy a rezonátoros megfigyelő esetén kimondott tételek érvényesek a dinamikusan visszacsatolt rendszer esetén is. Ez alól *kivételt jelent* az 5.2. Tétel, mivel dinamikus visszacsatolás esetén véges beálláshoz több, a gyakorlatban ritkán teljesülő speciális feltételnek is fenn kell állnia. Emiatt ezt a tételt nem tárgyalom.

Az állításokat ebben az esetben nem a torzítatlan becslőre fogalmazom meg, hanem arra nézve, hogy az állapotváltozók elérik-e az optimális értéküket. A két megfogalmazás ekvivalens, de ez utóbbi jobban kifejezi azt, hogy az alkalmazások döntő többségében az állapotváltozók konkrét értéke dinamikusan visszacsatolt rendszer esetén mellékes, lényeg, hogy elérjék az optimális értéküket.

5.6.1. Szükséges feltétel kiterjesztése

A szükséges feltételt az idővariáns forma segítségével bizonyítom.

5.5. Tétel. *A dinamikusan visszacsatolt rezonátoros algoritmus állapotváltozói általánosságban nem konvergálnak az adatvesztés nélkül elérhető optimumhoz, amennyiben $\{\mathbf{c}_j K_j\}$ vektorok nem feszítenek ki egy N dimenziós teret.*

Bizonyítás: Szorozzuk be az (5.44) egyenlet mindkét oldalát az \mathbf{S} mátrixszal:

$$\mathbf{S} \hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \mathbf{S} \hat{\mathbf{x}}_n + \alpha \mathbf{c}_n^* K_n e_n \quad (5.45)$$

ahol kihasználtuk, hogy $\mathbf{W} = \mathbf{S}^{-1}$.

Határozzuk meg $\mathbf{S} \hat{\mathbf{x}}_n$ értékét a kezdőállapotból (5.45) kifejtésével:

$$\mathbf{S} \hat{\mathbf{x}}_n = \mathbf{S} \hat{\mathbf{x}}_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \alpha \mathbf{c}_j^* K_j e_j = \mathbf{S} \hat{\mathbf{x}}_0 + \alpha \sum_{j=0}^{n-1} (\mathbf{c}_j^* K_j) e_j. \quad (5.46)$$

Tegyük fel, hogy a $\{\mathbf{c}_j^* K_j\}$ vektorsorozat nem tartalmaz komponenszt a \mathcal{T} altérben. Legyen \mathbf{T} egy ortonormált bázis \mathcal{T} altérben. Ez azt jelenti, hogy az erre az altérre vett projekcióra fennáll, hogy:

$$\mathbf{T}^H (\mathbf{c}_j^* K_j) = 0, \quad \forall j. \quad (5.47)$$

(5.46) mindkét oldalát beszorozva \mathbf{T}^H -val:

$$\mathbf{T}^H \mathbf{S} \hat{\mathbf{x}}_n = \mathbf{T}^H \mathbf{S} \hat{\mathbf{x}}_0 + \alpha \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{T}^H (\mathbf{c}_j^* K_j) e_j = \mathbf{T}^H \mathbf{S} \hat{\mathbf{x}}_0. \quad (5.48)$$

Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{S}\hat{\mathbf{x}}_n$ nem változik a \mathcal{T} altérben. $\mathbf{S}\hat{\mathbf{x}}_n$ tehát nem érheti el az optimális értékét a \mathcal{T} altérben, hacsak nem eleve az optimális érték volt a kezdeti állapot. Általánosságban, tetszőleges kezdeti feltételek mellett ez nem teljesül. ■

A tétel zajos esetben is érvényes, ugyanis e_n -re nem tettünk megkötést, akár a zajt is tartalmazhatja.

5.6.2. Elégséges feltételek kiterjesztése

A dinamikusan visszacsatolt rezonátoros algoritmus konvergenciájára vonatkozó elégséges feltételt az időinvariáns forma segítségével bizonyítom $\alpha \ll 1$ esetére. A bizonyításban a rezonátor alapú megfigyelő esetén elért eredményekre alapozok. Az algoritmus konvergenciáját az $\mathbf{S}\tilde{\mathbf{x}}_n$ transzformált állapotváltozóra mutatom meg. Ez ekvivalens az $\tilde{\mathbf{x}}_n$ -re vonatkozó konvergenciával, mert feltételezve, hogy \mathbf{S} nemszinguláris:

$$\tilde{\mathbf{x}}_n = 0 \Leftrightarrow \mathbf{S}\tilde{\mathbf{x}}_n = 0. \quad (5.49)$$

$\tilde{\mathbf{x}}_n$ a (2.82) egyenletben bemutatott $\hat{\mathbf{x}}_n^{\text{opt}}$ optimumtól való eltérést adja meg:

$$\tilde{\mathbf{x}}_n = \hat{\mathbf{x}}_n - \hat{\mathbf{x}}_n^{\text{opt}}. \quad (5.50)$$

A következőkben megmutatom, hogy a dinamikusan visszacsatolt struktúra hasonló egyenletekkel írható le $\alpha \ll 1$ esetén, mint az egységnyi visszacsatolású megfigyelő.

5.6.1. Lemma. *A dinamikusan visszacsatolt rezonátoros algoritmus $\alpha \ll 1$ esetén a következő egyenlettel írható le:*

$$\mathbf{S}\tilde{\mathbf{x}}_{n+1} \approx (\langle z_i \rangle - \alpha \mathbf{z} K_n \mathbf{c}^T) \mathbf{S}\tilde{\mathbf{x}}_n \quad (5.51)$$

Bizonyítás:

Az A. Függelékben bemutatott A.1. Lemmához hasonló módon időinvariáns esetre is megmutatható, hogy az $S(z)$ rendszer kimenete a következő alakban írható:

$$y'_n = \mathbf{c}^T \mathbf{S}\hat{\mathbf{x}}_n - \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{q=1}^k s_k \mathbf{c}_{n-k}^T \mathbf{W} \mathbf{c}_{n-q}^* K_{n-q} e_{n-q}. \quad (5.52)$$

Vegyük észre, hogy a fenti kifejezés utolsó tagja az A. Függelék (A-2) egyenletében adott h_n^r -hez hasonló. Eltérést jelent, hogy $d = 0$ választással élünk, így $\gamma_k = s_k$ és $n' = n$, ezentúl lényeges különbség, hogy $\text{sign}(e_n)$ helyett e_n -et tartalmazza. Az A.2. Lemma analógiájára belátható, hogy amennyiben a hibajel korlátos, tehát létezik olyan c konstans, amelyre $|e_n| < c$ igaz, akkor:

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{q=1}^k s_k \mathbf{c}_{n-k}^T \mathbf{W} \mathbf{c}_{n-q}^* K_{n-q} e_{n-q} \right| \leq cN \|\mathbf{W}\| \sum_{k=1}^{\infty} k |s_k|. \quad (5.53)$$

Az (A-11) képletben ugyanis e_n -re vonatkozóan csupán azt használtuk ki, hogy $|\text{sign}(e_n)|$ korlátos, amit az (5.53) egyenletben az $|e_n| < c$ feltétel biztosít; ennek megfelelően jelenik meg a felső korlát kifejezésében a c szorzó. Gyakorlati alkalmazások esetén a hibajelre általában adható egy ésszerű felső korlát¹, tehát az (5.53) korlátossága biztosított. Az (5.53) egyenletben található végtelen összeg korlátos, amennyiben $S(z)$ exponenciálisan stabil; ez a feltétel a 2.2.1. alfejezetnek megfelelően teljesül.

Az (5.53) egyenletben megfogalmazott egyenlőtlenség miatt (5.52) utolsó tagja korlátos, tehát megfelelően kis α megválasztásával ($\alpha \ll 1$) elhanyagolható, tehát:

$$y'_n \approx \mathbf{c}^T \mathbf{S} \hat{\mathbf{x}}_n, \text{ ha } \alpha \ll 1. \quad (5.54)$$

A hibajel, tehát az $y_n = \mathbf{c}_n^T \mathbf{x}_n$ zavarójel és y'_n különbsége:

$$e_n = y_n - y'_n \approx \mathbf{c}_n^T \mathbf{x}_n - \mathbf{c}_n^T \mathbf{S} \hat{\mathbf{x}}_n = \mathbf{c}_n^T \mathbf{S} (\mathbf{S}^{-1} \mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n) \quad (5.55)$$

Kihasználva, hogy az optimum (2.82) alapján: $\hat{\mathbf{x}}_n^{\text{opt}} = \mathbf{W} \mathbf{x}_n = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{x}_n$, így az (5.50) képletet alkalmazva $\tilde{\mathbf{x}}_n$ behelyettesíthető a hibajel kifejezésébe:

$$e_n \approx -\mathbf{c}^T \mathbf{S} \tilde{\mathbf{x}}_n. \quad (5.56)$$

A fenti becslés a bizonyítás fő eredménye, a helyességére vonatkozó szimulációs eredményeket később mutatom be (lásd 5.11. ábra). A hibajel értékét (5.42) egyenletbe behelyettesítve:

$$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} \approx \langle z_i \rangle \hat{\mathbf{x}}_n - \alpha \mathbf{W} \mathbf{z} K_n \mathbf{c}^T \mathbf{S} \tilde{\mathbf{x}}_n. \quad (5.57)$$

Vonjuk ki (5.57)-ből az optimális megoldásra felírható $\hat{\mathbf{x}}_{n+1}^{\text{opt}} = \langle z_i \rangle \hat{\mathbf{x}}_n^{\text{opt}}$ állapotegyenletet, így megkapjuk az állapothibára vonatkoztatott állapotegyenletet:

$$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} - \hat{\mathbf{x}}_{n+1}^{\text{opt}} \approx \langle z_i \rangle \hat{\mathbf{x}}_n - \langle z_i \rangle \hat{\mathbf{x}}_n^{\text{opt}} - \alpha \mathbf{W} \mathbf{z} K_n \mathbf{c}^T \mathbf{S} \tilde{\mathbf{x}}_n \quad (5.58)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_{n+1} \approx \langle z_i \rangle \tilde{\mathbf{x}}_n - \alpha \mathbf{W} \mathbf{z} K_n \mathbf{c}^T \mathbf{S} \tilde{\mathbf{x}}_n. \quad (5.59)$$

Szorozzuk be mindkét oldalt az \mathbf{S} mátrixszal. Kihasználva, hogy mind \mathbf{S} , mind $\langle z_i \rangle$ diagonálmátrixok, így kommutatívok a szorzásra nézve:

$$\mathbf{S} \tilde{\mathbf{x}}_{n+1} \approx \langle z_i \rangle \mathbf{S} \tilde{\mathbf{x}}_n - \alpha \mathbf{z} K_n \mathbf{c}^T \mathbf{S} \tilde{\mathbf{x}}_n. \quad (5.60)$$

$\mathbf{S} \tilde{\mathbf{x}}_n$ -et kiemelve a jobb oldalon (5.51) adódik. ■

A bemutatott közelítési módszer egy kvázistacioner állapotot feltételez. Az átviteli függvény értékeit tartalmazó \mathbf{S} mátrixszal történő szorzás az (5.56) egyenletben a rezonátorok állapotváltozóit az $S(z)$ rendszer kimenetére transzformálja. A mátrixszorzás által végrehajtott fázistolás és erősítés állandósult állapotban érvényes, a tranzienszt nem tartalmazza. Mivel az állapotváltozók folyamatosan változnak, így abban az esetben érvényes a közelítés, amennyiben az állapotváltozók elég lassan változnak ahhoz, hogy a tranziens mértéke elhanyagolható legyen. Ez $\alpha \ll 1$ esetén

¹pl. a zajszint nem haladja meg a $c=120$ dB értéket

megalapozott feltételezés. Az alacsony értékű konvergenciaparaméter feltételezése az adaptív algoritmusok analízisének egy elterjedt módszere, lásd például az FxLMS algoritmus levezetését [89].

Mivel a véges beállást nem tárgyalom, így feltételezhető, hogy az algoritmus feldolgozott adatokhoz tartozó állapotátmeneti mátrixának egyszeres multiplicitású sajátértékei vannak, és létezik a következő sajátérték-felbontás:

$$(\langle z_i \rangle - \alpha \mathbf{z} \mathbf{c}^T) = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^{-1}. \quad (5.61)$$

A $\mathbf{\Lambda}$ sajátértékekből és \mathbf{U} sajátvektorokból számítandó ζ és $\bar{\lambda}$ értékeket a megfigyelőhöz hasonlóan rendre az (5.17) és (5.18) egyenletek definiálják.

Az (5.51) és (5.6) egyenleteket összehasonlítva, az $\alpha \mathbf{z} \leftrightarrow \mathbf{g}$ megfeleltetéssel a két forma ekvivalens, tehát a megfigyelő konvergenciájára vonatkoztatott feltételek átvehetőek, amelyeket a következő tétel foglal össze.

5.6. Tétel. *Legyenek π_{cr} , Γ_{cr} és L_{cr} változók rendre (5.20), (5.31) és (5.34) által adott mennyiségek. A dinamikusan visszacsatolt rezonátoros struktúra állapotváltozói az optimális értékükhöz konvergálnak, tehát*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{x}}_n = 0, \quad (5.62)$$

amennyiben a következő feltételek közül valamelyik teljesül:

- *A hiányzó mintákból álló intervallumok és a feldolgozott adatok számának aránya kisebb, mint az (5.20) egyenletben adott kritikus korlát:*

$$\frac{\mathcal{P}}{k} < \pi_{\text{cr}} \quad \text{és} \quad k \rightarrow \infty. \quad (5.63)$$

- *A Γ adatvesztési arány kisebb, mint az (5.31) által meghatározott kritikus érték:*

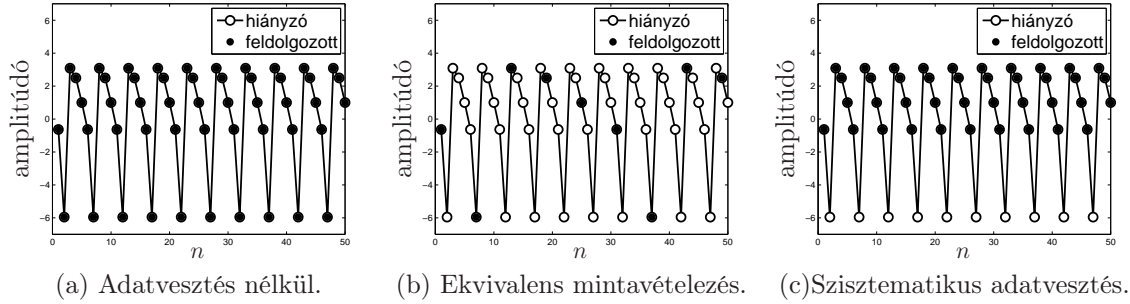
$$\Gamma < \Gamma_{\text{cr}}. \quad (5.64)$$

- *Amennyiben a feldolgozott jelsorozatban végtelen számú, legalább L_{cr} egymást követő feldolgozott adatot tartalmazó intervallum található.*

- *Amennyiben az adatvesztés Bernoulli- vagy Markov-modell alapján működő folyamat.*

A fenti feltételek zajos megfigyelések esetén is érvényesek. Ekkor az állapotváltozók hibájának várható értéke konvergál a nullához.

Érdemes megjegyezni, hogy mivel az állapotátmeneti mátrix normája egységnyi, így az adatvesztés nem okozza a rendszer instabilitását, mert a paraméterhiba nem nőhet.



5.6. ábra. Néhány fontos speciális adatvesztési mintázat.

5.7. Eredmények értelmezése

A rezonátor alapú algoritmusok konvergenciájára vonatkozó szükséges feltételeket vizsgálva az adatvesztés szempontjából legveszélyesebb szituáció az úgynevezett koherens mintavételezés², amely alatt az értendő, hogy az alapharmonikus frekvencia racionális számként felírható:

$$f_1 = \frac{Q}{M}, \quad (5.65)$$

ahol Q és M pozitív egész számok. Ebben az esetben y_n és \mathbf{c}_n periodikusan ismétlődnek:

$$y_n = y_{n+M} \quad \text{és} \quad \mathbf{c}_n = \mathbf{c}_{n+M}. \quad (5.66)$$

A koherens mintavételezés egy speciális esete az egyenletes rezonátorelhelyezkedés, ahol $Q = 1$ és $M = N$.

Ahogy (5.66) mutatja, M darab különböző \mathbf{c}_n vektor létezik, amelyek közül legalább N darab lineárisan független vektornak szerepelnie kell a megfigyelhetőségi mátrixban ahhoz, hogy a Fourier-felbontás szükséges feltétele teljesüljön. Egy adott \mathbf{c}_m vektor akkor szerepel a megfigyelhetőségi mátrixban, amennyiben bármely periódusban a hozzá tartozó $\{y_{m+lM}; l = 0, 1, 2, \dots\}$ minta feldolgozásra kerül, tehát $K_{m+lM}=1$ az l változó egy vagy több értéke esetén teljesül.

Jól ismert példa arra, hogy az adatvesztés mikor nem befolyásolja a megfigyelő megfelelő működését, az az ekvivalens mintavételezés, amelynek során a jel látszólag egymást követő mintáit különböző periódusokból mintavételezzük (lásd: 5.6(b). ábra). Ebben az esetben biztosítjuk a megfigyelhetőség szükséges feltételét, illetve véges beállítás megfigyelő esetén az elégséges feltételt is.

Egy jellegzetes példa arra, hogy az adatvesztés mikor akadályozza meg, hogy a megfigyelő a jelmodellnek megfelelő paraméterekhez konvergáljon, az a jellel korreláló szisztematikus adatvesztés. Ebben az esetben a jel periódusának mindig ugyanaz a mintája hiányzik (lásd 5.6(c). ábra). Gyakorlatban ilyen szituáció akkor fordulhat

²A koherens mintavételezés blokkos eljárások esetén szokásos definíciójával szemben a folytonos adatfeldolgozás miatt esetünkben nem beszélhetünk arról, hogy egész számú periódust dolgozunk fel a jeltől. Ennek megfelelően csupán a frekvenciára vonatkozó (5.65) megkötést alkalmazom.

elő, amikor például egy jelátalakító telítődik, és a torzult mintákat az algoritmus figyelmen kívül hagyja. Ebben az esetben mindig ugyanahhoz a \mathbf{c}_n vektorhoz tartozó minta hiányzik, ami miatt a megfigyelhetőségi mátrix nem tartalmaz elegendő lineárisan független sort, így a megfigyelhetőségi feltétel nem teljesül. Általánosságban is elmondható, hogy a jellel szinkronban bekövetkező szisztematikus adatvesztés a legveszélyesebb a rezonátoros algoritmus konvergenciája szempontjából.

A torzítatlan becslő szükséges feltételének ellenőrzése általában megkívánja a jel és az adatvesztési mintázat viszonyának ismeretét, illetve a körülmények részletes elemzését. A vizsgálatok elvégzése bizonyos szakértelmet is igényelhet. A feltételek elsődleges szerepe, hogy rávilágítsanak a potenciálisan veszélyes esetekre.

Ezzel szemben a torzítatlan becslő előállítására vonatkozó elégséges feltételek nem igényelik az adatvesztési mintázat és a jel mélyebb elemzését. Általában szakértelem nélkül is egyszerűen számítható mennyiségek (például adatvesztési arány) vizsgálata elegendő a feltételek ellenőrzéséhez.

Az elégséges feltételek implicit módon biztosítják, hogy a konvergenciához szükséges információtartalommal rendelkezzenek a jel mintái. Erre a legszemléletesebb példát az 5.4. Tétel mutatja. Egyenletes rezonátorelhelyezkedés esetén analitikusan belátható (lásd: G. Függelék), egyéb esetekben tapasztalatok szerint igaz, hogy $L_{cr} \geq N$. Ez azt jelenti, hogy minden egyes borszthöz rendelhető legalább annyi \mathbf{c}_n vektor, amelyek biztosítják a megfigyelhetőséget. Az egyes állítások a közös alaptétel miatt természetesen összefüggnek: amennyiben az adatvesztési arány elegendően alacsony, úgy törvényszerűen kialakulnak megfelelő hosszúságú folytonosan feldolgozható adatblokkok.

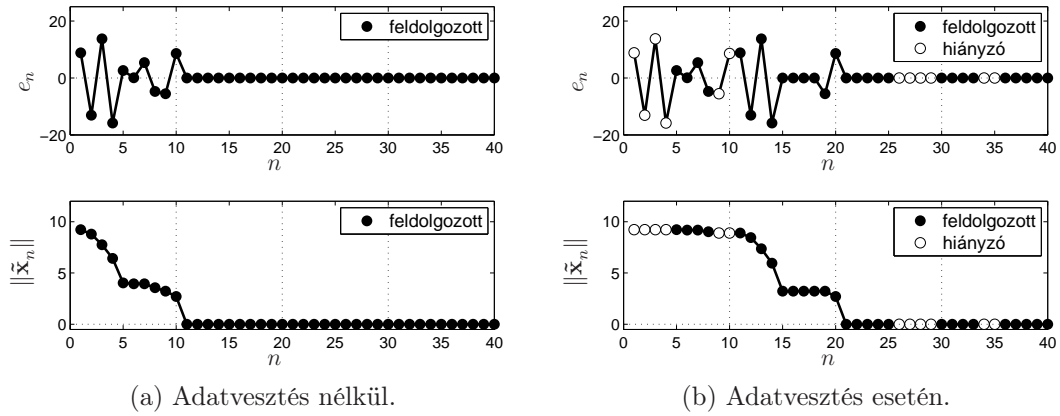
5.8. Adatvesztéshez kapcsolódó szimulációk

5.8.1. Rezonátor alapú megfigyelő szimulációs eredményei

5.1. Példa. Tanulás és követés véges beállítású megfigyelő esetén adatvesztés mellett

Az 5.7. ábra a rezonátor alapú megfigyelő beállítását hasonlítja össze adatvesztés nélküli esetben és adatvesztés jelenlétében. Az adatvesztési mintázatot (5.67) írja le. A megfigyelő beállításai: egyenletes rezonátorelhelyezkedés, $N = 10$ (így $y_{n+10} = y_n$) és $\alpha = 1$. A véges beállítású megfigyelő az adatvesztés nélküli esetben az 5.7(a). ábra alapján, a vártnak megfelelően $N = 10$ minta feldolgozását követően beáll, ez után az e_n hiba és az $\tilde{\mathbf{x}}_n$ paraméterhiba is nullává válik.

Adatvesztés esetén a megfigyelő akkor áll be, amennyiben teljesül az 5.2. Tételben megadott szükséges és elégséges feltétel, tehát az összes \mathbf{c}_n vektor megtalálható a megfigyelhetőségi mátrixban. Ennek ekvivalens megfogalmazása, hogy a jel egy periódusának minden mintáját feldolgozta a megfigyelő tetszőleges sorrendben. A példában (5.7(b). ábra) az első periódusból az 1-4 és 9-10 minták hiányoznak, ennek megfelelően a következő periódusban, a 11-14 és 19-20-as pozíciókban a megfigyelő még nem képes a jelrekonstrukcióra, az e_n hibajel nem válik nullává csupán a 15-18-as pozíciókban. A tanulási fázis a 20-adik mintát követően zajlik le, amikor az



5.7. ábra. Egyenletes rezonátorelhelyezkedés és $\alpha = 1$ (véges beállítású) megfigyelő beállási idődiagramjai adatvesztés esetén. $N = 10$. Adatvesztési mintázat: (5.67).

előző periódusból hiányzó minták pozíciójában található mintákat is feldolgozta a megfigyelő. Ekkor a paraméterhiba nullába csökken, és a megfigyelő teljes jelrekonstrukcióra képes, kimenete követni tudja a bejövő jelet, így $\{e_n = 0; n > 20\}$.

$$K_{1\dots 25} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]; \quad K_{n+25} = K_n. \quad (5.67)$$

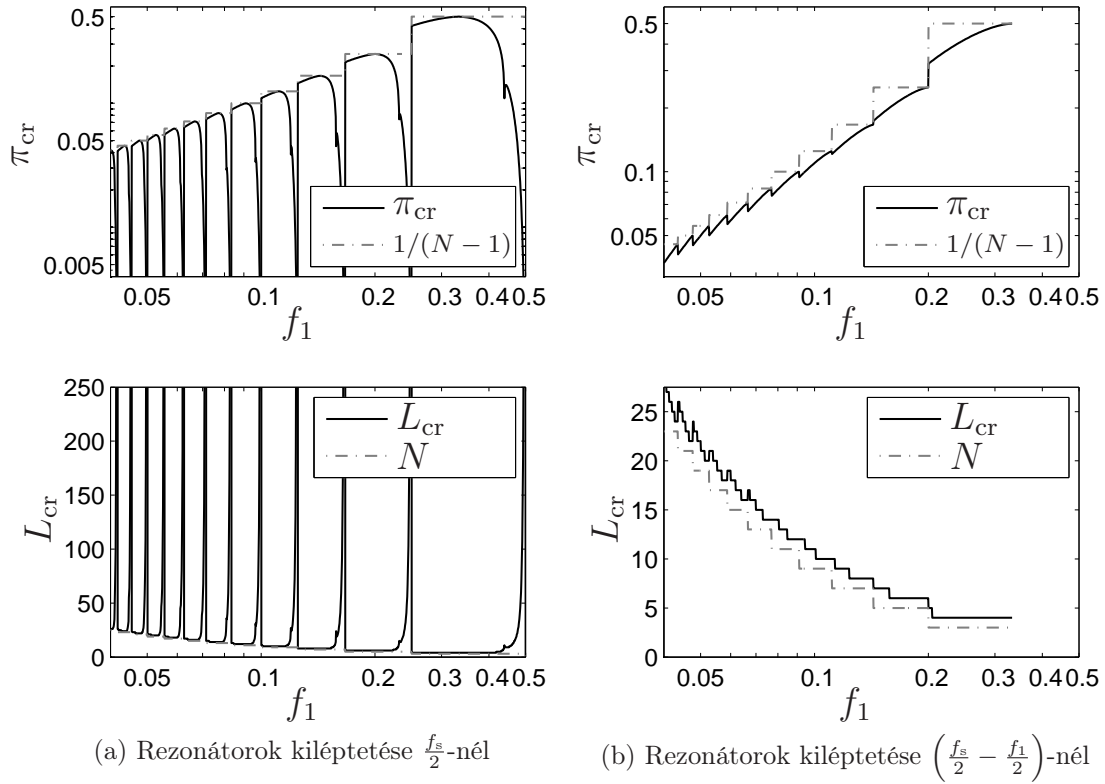
5.2. Példa. Kritikus határértékek vizsgálata

Az 5.8. ábra az elégséges feltételekhez szükséges mennyiségek nagyságrendi értékeiről ad képet az f_1 alapharmonikus frekvencia függvényében. Irányadó közelítésként az ábrákon szaggatott vonallal megjelenítettem a π_{cr} és L_{cr} egyenletes rezonátorelhelyezkedés esetén számítható felső és alsó korlátait, lásd: G. Függelék, (G-1) és (G-3) egyenletek. Két esetet vizsgáltam: amikor a rezonátorok a mintavételi frekvencia feléig helyezkedhetnek el (2.13) alapján, valamint azt az esetet, amikor a rezonátorok a mintavételi frekvencia alatt $\frac{f_1}{2}$ -vel lépnek ki, így megakadályozzuk, hogy a rezonátorpólusok közelebb kerüljenek egymáshoz a mintavételi frekvencia felénél, mint az alacsonyabb frekvenciákon. Numerikus okok miatt a közeli pólusok kialakulását általában is érdemes elkerülni, és látható, hogy így a konvergencia elégséges feltételének teljesítésére is kedvezőbb korlátok adhatóak.

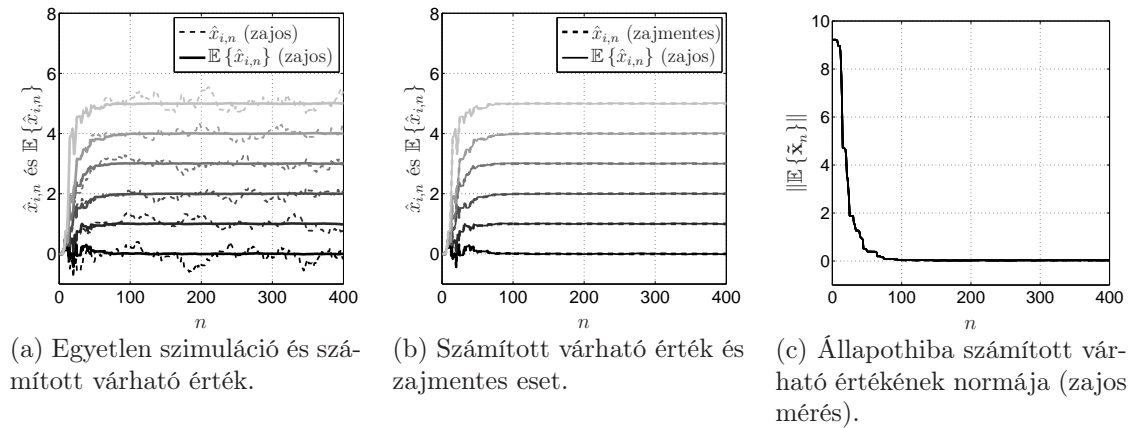
5.3. Példa. Zaj hatásának vizsgálata

Az 5.9. ábrán az 5.5. alfejezetben bemutatott, a konvergencia elégséges feltételeinek zajos esetre történő kiterjesztését megalapozó feltételezések helyességét illusztrálok. A rezonátorelhelyezkedés egyenletes, $N = 10$ és $\alpha = 0.6$. Az adatvesztési mintázatot (5.67) írja le. A jel/zaj viszony: SNR=20 dB.

A megfigyelő beállításából következően: $\pi_{cr} = \frac{1}{9} = \frac{2}{18}$, és az (5.67) egyenlet alapján határértékben $\frac{P}{k} = \frac{2}{19}$. Mivel $\frac{P}{k} < \pi_{cr}$, így az 5.3. Tétel alapján az állapothiba várható értéke nullába kell, hogy tartson.



5.8. ábra. π_{cr} és L_{cr} az alapharmonikus frekvenciájának függvényében. $\alpha = 0.6$.



5.9. ábra. Állapotváltozók jellemző függvényei zaj hatására. A különböző árnyalatú grafikonok különböző $\{\hat{x}_{i,n}; i = 0 \dots 5\}$ állapotváltozókhoz tartoznak.

Az 5.9(a). ábrán a megfigyelő állapotváltozói láthatóak zajos esetben. Szaggatott vonallal az állapotváltozók egyetlen szimuláció esetén mérhető időfüggvényei, folytonos vonallal pedig 500 független szimuláció alapján számított átlagértéküknek

(várható érték) az időfüggvénye látható. Megállapíthatjuk, hogy várható értékben az állapotváltozók az elvárásnak megfelelően a jelmodellben beállított $|\hat{x}_{i,n}| = i$ értékekhez konvergálnak.

Az 5.9(b). ábrán összehasonlítom az állapotváltozók konvergenciáját zajmentes, illetve az állapotváltozók várható értékének konvergenciáját zajos esetben. Látható, hogy az időfüggvények nagy pontossággal fedik egymást, ami megerősíti azt, hogy a várható érték konvergenciája megegyezik a paraméterek zajmentes esetben tapasztalható konvergenciájával.

Az 5.9(c). ábrán a paraméterhiba-vektor várható értékének normája látható az idő függvényében. Megállapíthatjuk, hogy a hibavektor várható értéke nullába konvergál, tehát a paramétervektor torzítatlan becslőt szolgáltat zajos esetben is.

5.4. Példa. Elméleti eredmények alkalmazási példái

Ebben a példában három esetet tárgyalok, amelyek során gyakorlathoz közel álló szimulációkon keresztül mutatom be a tételek alkalmazási lehetőségeit, és néhány tapasztalati következtetést. A példában egy 50 Hz-es jelet figyelünk meg $f_s=10$ kHz-es mintavételi frekvenciával. A jel Fourier-együtthatói fordítottan arányosak a harmonikus komponens sorszámával: $\{|x_{i,n}| = \frac{1}{i}: i = 1 \dots P, n = 0 \dots\}$, fázisuk véletlenszerűen megválasztott a $[0 \dots 2\pi)$ tartományban.

A szimulációk során a paraméterhiba normáját, tehát az $\|\tilde{\mathbf{x}}_n\|$ értéket jelenítem meg. Amennyiben $\|\tilde{\mathbf{x}}_n\|$ nullába konvergál, azt jelenti, hogy a megfigyelő a jelparaméterek torzítatlan becslőjét szolgáltatja.

Az első két példában az alapharmonikus frekvencia $f_1=50$ Hz. Két különböző megfigyelőbeállítást és adatvesztési mintázatot teszteltem. Az adatvesztési mintázatok periodikusak 200 és 199 mintányi periódusidővel, és mindkét mintázat esetén a periódus utolsó mintája hiányzik. Az 1. *mintázat* a következő alakú:

$$K_1 = 1, \dots, K_{199} = 1, K_{200} = 0; \quad K_n = K_{n+200}, \quad (5.68)$$

míg a 2. *mintázat*:

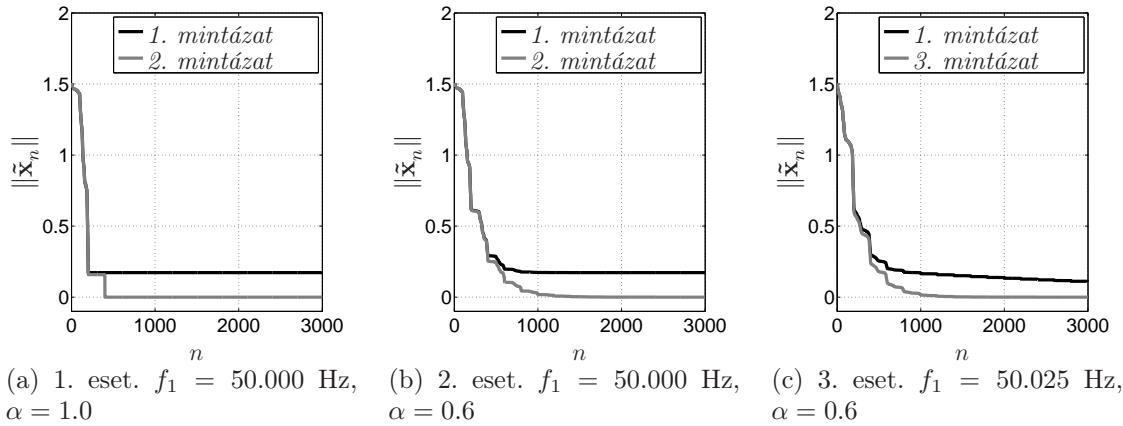
$$K_1 = 1, \dots, K_{198} = 1, K_{199} = 0; \quad K_n = K_{n+199}. \quad (5.69)$$

1. eset: $f_1=50$ Hz és $\alpha=1$. Ez a paraméterbeállítás véges beállítású megfigyelőt eredményez, amelynek konvergenciájára vonatkozó szükséges és elégséges feltételt az 5.2. Tétel tartalmazza, a hozzá kapcsolódó gyakorlati megfontolások pedig az 5.7. alfejezetben találhatóak. A beállításhoz tartozó szimulációs eredmény az 5.10(a). ábrán látható.

Vegyük észre, hogy $f_1 = \frac{50 \text{ Hz}}{f_s} = \frac{1}{200}$, így a jel periódusideje $N = 200$, ezért:

$$\mathbf{c}_n = \mathbf{c}_{n+200}. \quad (5.70)$$

Az 1. *mintázat* esetén az adatvesztési mintázat periodicitása megegyezik a jel periódusidejével (lásd: (5.68) és (5.70)), így mindig ugyanaz a minta hiányzik minden periódusból (lásd az 5.6(c). ábra illusztrációját). Az 5.7. alfejezetben leírtak alapján,



5.10. ábra. Szimulációs eredmények.

amennyiben a jel periódusain belül mindig ugyanaz a minta hiányzik, a megfigyelő állapotváltozói nem konvergálnak az adatvesztés nélküli optimális értékükhöz. Ebben az esetben összesen 199 különböző $K_j \mathbf{c}_j$ vektor létezik, amelyek nem tudnak kifeszíteni egy $N = 200$ dimenziós teret.

A *2. mintázat* esetén K_n periódusideje 199 minta, míg a \mathbf{c}_n függvényé 200 minta, tehát egyetlen mintával tér el a két periódusidő. Ez azt jelenti, hogy a hiányzó adat az y_n jelen belül periódusról periódusra egy mintával csúszik el, tehát y_n mind az N különböző mintája feldolgozásra kerül. Az 5.7. alfejezetben leírtak alapján ebben az esetben a \mathbf{c}_n vektorok kifeszítik a teret, tehát az 5.2. Tételnek megfelelően $\tilde{\mathbf{x}}_n \rightarrow 0$ összhangban a szimulációval.

2. eset: $f_1 = 50$ Hz és $\alpha = 0.6$. A rezonátor-elhelyezkedés egyenletes, a beállítás pedig exponenciális. A megfigyelő konvergenciájának szükséges feltételét az 5.1. Tétel, míg az elégséges feltételeket az 5.3. és 5.4. Tételek tartalmazzák. Mivel a jelsorozat egyenlő hosszúságú összefüggő adatblokkokat tartalmaz, az 5.4. Tételt kézenfekvő alkalmazni. A szimulációs eredmények az 5.10(b). ábrán láthatóak.

Az *1. mintázat* esetén nem konvergál a paraméterhiba a nullába. Az ok az 1. esetbenél ismertett magyarázat: a jel periódusain belül mindig ugyanaz a minta hiányzik, így a megfigyelhetőség szükséges feltétele nem teljesül.

Habár a *2. mintázat* esetén a paraméterhiba a nullába konvergál, ez az eddig ismertett elégséges feltételek alapján nem bizonyítható. Az 5.4. Tétel alapján az egy blokkban egymás után feldolgozandó minták minimális száma $L_{cr} = 200$, amelyet egyik adatvesztési mintázat sem ér el. Ez a példa az elégséges feltételek egy fontos tulajdonságát illusztrálja. A feltételeknek ki kell ugyanis zárniuk, hogy létezik olyan adatvesztési mintázat, ami megakadályozza, hogy a paraméterhiba nullához konvergáljon. Látható, hogy az *1. mintázat* esetén 199 egymást követő mintát dolgoz fel a megfigyelő folytonosan. Habár ez csupán eggyel kevesebb, mint az $L_{cr} = 200$ -as kritikus érték, ennek ellenére a megfigyelő nem megfelelő paraméterbecslést produkál. Ebben az esetben tehát az L_{cr} egy reális és szűk korlátot ad arra nézve, hogy milyen L_{cr} érték mellett nem létezik olyan adatvesztési mintázat, amely a megfigyelhetőség

szükséges feltételének megsértését okozhatja.

3. eset: $f_1=50.025$ Hz és $\alpha=0.6$. A megfigyelő beállása exponenciális, de a rezonátorelhelyezkedés nem egyenletes. A frekvencia csupán kis mértékben tér el az 50 Hz-től, ezzel szimulálva a hálózati feszültség frekvenciájának kismértékű ingadozását. A torzítatlan paraméterbecslés szükséges, illetve elégséges feltételeit az 5.1. Tétel és az 5.4. Tétel tartalmazza a 2. esetnél leírtaknak megfelelően. Az 5.4. Tétel alapján $L_{cr}=207$. A szimulációs eredményeket az 5.10(c). ábra tartalmazza.

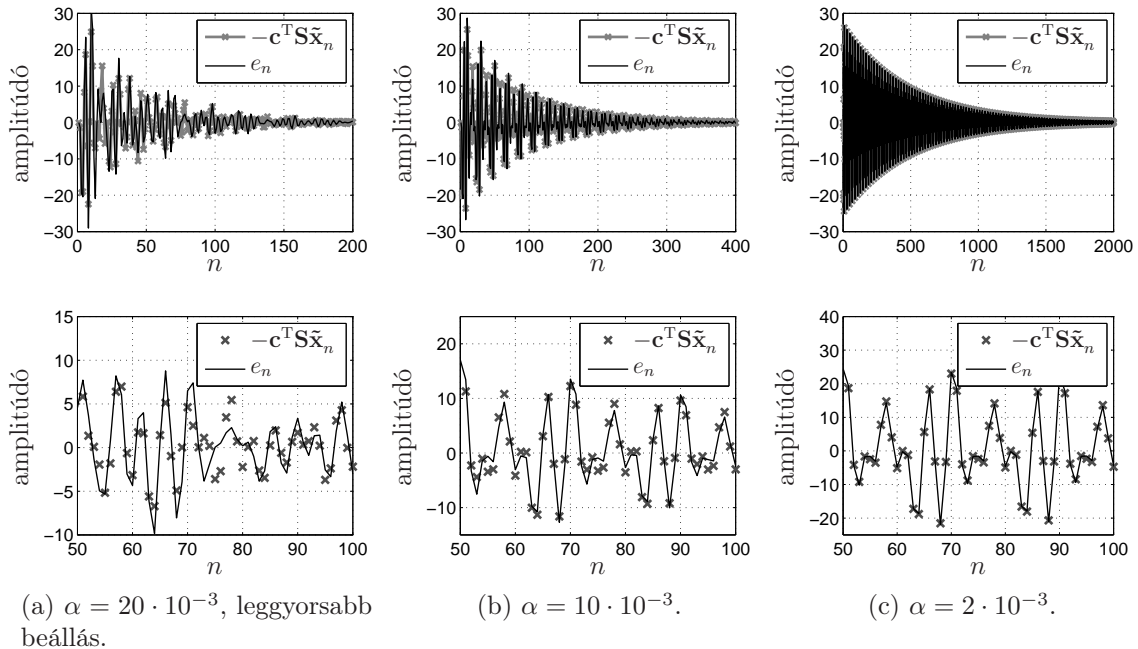
Habár a becslési hiba normája nullába tart az 1. mintázat esetén, a konvergencia láthatóan lassú. A gyakorlatban, amennyiben a jelparaméterek gyorsan változnak, ez a rendszer nem alkalmazható. Látható, hogy a konvergenciatulajdonságok jelentősen romolhatnak, amennyiben a körülmények közel állnak ahhoz az esethez, amelyben a megfigyelő torzított becslőt szolgáltat.

Ebben a példában egy új adatvesztési mintázatot alkalmaztam, amelyben bizonyítható a paraméterhiba nullához tartó konvergenciája. Mivel ebben az esetben $L_{cr}=207$, ennek megfelelően a 3. mintázat a következő alakú:

$$K_1 = 1, \dots, K_{207} = 1, K_{208} = 0; \quad K_n = K_{n+208}. \quad (5.71)$$

Az 5.10(c). ábrán a 3. mintázathoz tartozó esetben a megfigyelő konvergenciája tehát bizonyítható, és a paraméterhiba gyorsabban tart a nullához, mint a kritikushoz közeli 1. mintázat esetén.

Az adatvesztési mintázat a gyakorlatban is alakítható tetszőlegesen, például borsztös adatfeldolgozás esetén.



5.11. ábra. Kvázistacioner állapotot feltételező becslés pontossága különböző konvergenciaparaméter mellett.

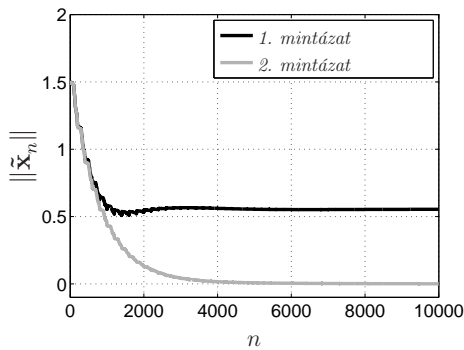
5.8.2. Dinamikusan visszacsatolt rezonátoros struktúra szimulációs eredményei

A szimulációkhoz a (4.77) egyenletben adott másodrendű szakaszt használtam.

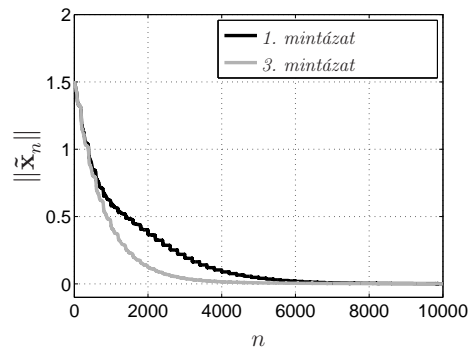
5.5. Példa. Kvázistacioner közelítés ellenőrzése

Az (5.56) egyenletben alkalmazott közelítés a dinamikusan visszacsatolt rezonátoros struktúra konvergenciájának bizonyítása során használt kulcselem. A közelítés pontosságára vonatkozó szimulációt az 5.11. ábra tartalmazza. A szimulációhoz $P = 5$ beállítást használtam. A leggyorsabb beálláshoz tartozó időfüggvények esetén a közelítés jól látható módon nem érvényes, de α értékét tovább csökkentve, a leggyorsabb beálláshoz tartozó konvergenciaparaméter tizede esetén az $e_n \approx -\mathbf{c}^T \mathbf{S} \tilde{\mathbf{x}}_n$ becslés már megalapozott.

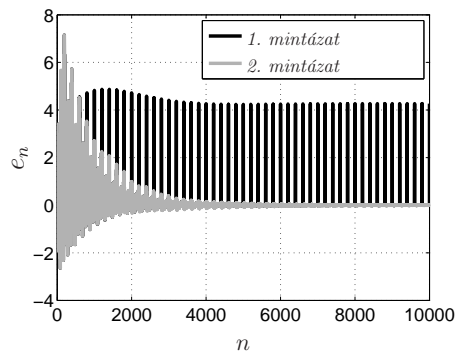
5.6. Példa. Elméleti eredmények alkalmazási példái



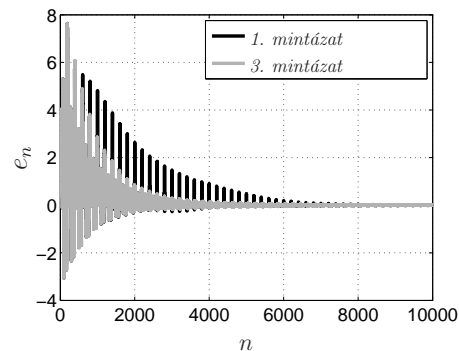
(a) 1. eset. $f_1 = 50.000$ Hz, $\alpha = 0.001$.



(b) 2. eset. $f_1 = 50.025$ Hz, $\alpha = 0.001$.



(c) 1. eset. $f_1 = 50.000$ Hz, $\alpha = 0.001$.



(d) 2. eset. $f_1 = 50.025$ Hz, $\alpha = 0.001$.

5.12. ábra. Szimulációs eredmények dinamikusan visszacsatolt rezonátoros algoritmus esetén.

Az 5.12. ábra a dinamikusan visszacsatolt rezonátoros struktúrát jellemző időfüggvényeket mutatja a rezonátor alapú megfigyelő esetén az 5.4. példában bemuta-

tott körülményeknek megfelelő esetekben. Az ábrákon e_n értékét is megjelenítettem, mert a dinamikusan visszacsatolt algoritmusok esetén általában az e_n teljesítményének minimálisra csökkentése az elsődleges cél.

A dinamikusan visszacsatolt algoritmus esetén a paraméterhiba nullához történő konvergenciájának szükséges, illetve elégséges feltételeit az 5.5. és 5.6. Tételek tartalmazzák, amelyek lényegileg megegyeznek a megfigyelő esetén megadott feltételekkel. Ennek megfelelően a megfigyelő esetén az algoritmus konvergenciájára vonatkozó magyarázatok érvényesek maradnak.

Eltérés a megfigyelő esetén bemutatott példákhoz képest, hogy dinamikusan visszacsatolt rendszer esetén véges beállítás elérése általában nem lehetséges, így nem közlök erre vonatkozó eredményeket.

1. eset: $f_1=50$ Hz és $\alpha=0.001$. Az adott α a leggyorsabb beállást eredményező érték. A szimulációs eredményeket az 5.12(a). és 5.12(c). ábrák tartalmazzák. Az *1. és 2. adatvesztési mintázatot* rendre az (5.68) és (5.69) képletek írják le. A megfigyelőnél bemutatott *2. eset* magyarázata alapján az *1. mintázat* esetén a $\{c_j K_j\}$ vektorok nem feszítik ki az N dimenziós teret, így az 5.5. Tétel alapján az állapotváltozók nem konvergálnak az optimális értékeikhez, így az e_n hiba sem csökken nullára. A *2. mintázat* esetén mind a paraméterhiba, mind a hibajel nullához konvergál a megfigyelő működéséhez hasonlóan.

2. eset: $f_1=50.025$ Hz és $\alpha=0.001$. A szimulációs eredményeket az 5.12(b). és 5.12(d). ábrák tartalmazzák. Habár az 5.4. példa *3. eseténél* kevésbé szembetűnő módon, de az *1. mintázat* esetén ebben az esetben is lassabb a konvergencia, mert a konvergencia szempontjából kritikus körülményekhez közeli beállítással működik az algoritmus. Az (5.71) egyenletben adott *3. mintázat* esetén a konvergencia ebben is bizonyítható és gyorsabb, mint a kritikushoz közeli esetben.

A példák alapján látható, hogy az adatvesztés a rezonátor alapú struktúra konvergenciáját egységnyi és dinamikus visszacsatolás esetén is hasonló módon befolyásolja.

5.9. Eredmények összegzése

Ez a fejezet áttekintő képet ad arról, hogy az adatvesztés hogyan befolyásolja a rezonátor alapú algoritmusok konvergenciáját. Szükséges, illetve elégséges feltételeket adtam arra vonatkozóan, hogy az algoritmusok milyen feltételek mellett konvergálnak az adatvesztés nélkül elérhető optimális értékükhöz. A konvergenciára adott feltételek kidolgozása során kiemelten vizsgáltam az egyenletes rezonátorelhelyezkedéshez tartozó véges beállású megfigyelőt, de a feltételek túlnyomó része általános paraméterbeállítással rendelkező megfigyelőre is érvényes. Beláttam, hogy véges beállású megfigyelő esetén a szükséges feltétel egyben elégséges is. Az eredményeket általánosítottam zajos megfigyelések esetére, illetve dinamikusan visszacsatolt rezonátoros struktúrára. Ez utóbbi esetben a konvergencia elégséges feltételeit a konvergenciaparaméter kis értéke mellett bizonyítottam.

A konvergenciára adott szükséges feltétel az adatvesztési mintázat és a jel paraméterei közötti kapcsolat elemzését igényli. A feltétel elsődleges szerepe, hogy rávi-

lágít az adatvesztés szempontjából potenciálisan veszélyes esetekre. Hátrányos tulajdonsága, hogy az ellenőrzéséhez némi szakértelem és intuíció is szükséges. A feltételek elemzése alapján megállapítható, hogy a konvergencia szempontjából az az eset kritikus, amely során az adatvesztési mintázat és a jel nem független, hanem egymással szinkron módon ismétlődnek, így az adatvesztés szisztematikus módon mindig ugyanazon mintákat távolítja el a jelből, és ezáltal lényeges információvesztést okoz.

A konvergenciára vonatkozó elégséges feltételek egyszerű tesztelési lehetőséget biztosítanak. A feltételek nem igénylik az adatvesztési mintázat alapos vizsgálatát és ismeretét, hanem csak néhány, általában egyszerűen számítható paraméterre fogalmazznak meg feltételt (például adatvesztési arány). A feltételeket összefoglalva elmondható, hogy az algoritmusok biztosan konvergálnak az optimális paraméterekhez, amennyiben a következők közül valamely feltétel teljesül:

- Az adatvesztési arány elegendően alacsony értékű (lásd: 5.3. Tétel és 5.1. Korollárium).
- Végtelen sok, pusztán feldolgozott adatokból álló intervallum található, amelyeknek hossza elér egy minimális értéket (lásd: 5.4. Tétel).
- Az adatvesztés véletlenszerű, például Bernoulli vagy az 5.1. ábrán bemutatott Markov-lánccal leírható folyamat (lásd: 5.2. Korollárium).

A fenti elégséges feltételek dinamikusan visszacsatolt rezonátoros struktúra esetén is érvényesek (lásd: 5.6. Tétel).

Az 5.1.–5.4. Tételeket és következményeit az [5] cikkben publikáltam, és dinamikusan visszacsatolt struktúrára is kiegészítettem az 5.5. és 5.6. Tételekben.

Összefoglalás, kitekintés

Dolgozatomban szenzorhálózatok rezonátor alapú jelfeldolgozó rendszerekben történő felhasználásának három nagy kérdéskörével foglalkoztam:

- jelátvitel és szinkronizáció,
- véges sávszélességű kommunikációs csatorna kezelése,
- adatvesztés hatásának vizsgálata.

Habár a fenti problémakörökkel bármely hálózati jelátvitel alkalmazása esetén szembesülünk, szenzorhálózatok esetében a szűkös erőforrások miatt fokozottan számolni kell velük.

A hálózati adatátvitel a rendszer flexibilitását, skálázhatóságát segíti elő. A vizsgált algoritmusok azonban különösen érzékenyek a hálózati adatátvitel miatt fellépő problémákra a bennük található visszacsatolás miatt, amely a hálózaton keresztül valósul meg.

A jelérzékelés és a jelátvitel a jelfeldolgozási lánc első szintjeként fontos szerepet játszik a rendszertervezésben. Megmutattam, hogy az elosztott működés miatt akár stabilitási problémát is okozhat a nem megfelelő adatátvitel. A jelátvitellel kapcsolatos fő eredmények az elosztott jelérzékelés és jelfeldolgozás szinkronizációjához köthetők. Kétféle szinkronizációs eljárást mutattam be: egyik általánosnak mondható mintagyűjtő és -továbbító rendszer szinkronizálására, a másik pedig elosztottan működő rezonátorok szinkronizálására szolgál.

A kommunikációs csatorna korlátozott sávszélessége által okozott problémák enyhítésére az úgynevezett hibaelőjeles algoritmusok alkalmazását javasoltam, amelyek a hibajel egy bitre történő csonkolásával hajtanak végre adatredukciót. Mivel az elv egyszerű, így kifejezetten alkalmas kis számítási kapacitással rendelkező szenzorokon történő implementációra. Az algoritmusok analízise során megmutattam, hogy felső korlát adható az elérhető hiba abszolút középértékére, és alsó korlát adható a beállási időre. Ezen túl javaslatot tettem a hibaelőjeles algoritmusok konvergenciatalajdonságainak javítására. Az új algoritmus a konvergenciaparaméter hibajel alapján történő adaptív hangolásával csökkenti a beállási időt, és akár zérus értékű hibát is képes elérni zajmentes esetben.

Az adatvesztés kapcsán azt a kérdést vizsgáltam, hogy a rezonátor alapú algoritmusok állapotváltozói hiányzó minták esetében milyen feltételek mellett konvergálnak az adatvesztés nélkül elérhető optimális értékükhöz. A témához kapcsolódó fő eredmény a konvergenciára vonatkozó szükséges, illetve elégséges feltételek megfogalmazása. A feltételek mind a rezonátor alapú megfigyelő, mind a dinamikus visszacsatolt rezonátor alapú struktúra esetén érvényesek.

Munkám során igyekeztem az elsődlegesen felmerülő legfőbb problémák mind-egyikével foglalkozni, így az egyes területeken még számos új kutatási témakör elképzelhető:

- A 3.3.1. alfejezetben bemutatott, elosztott jelérzékelést megvalósító rendszer mintájára teljesen elosztott architektúra kiépítése, amelyben a beavatkozó jelek számítása is lokálisan, „intelligens beavatkozók” segítségével történik.
- A dolgozatban közölt eredmények többsége egycsatornás, tehát egybemenetű-egykimenetű rendszerekre vonatkozik. Habár szimulációs és gyakorlati tapasztalatok alapján a bemutatott elvek többcsatornás rendszerek esetén is érvényesek, egzakt analitikus eredmények még nem ismertek.
- Adatvesztés esetén a vizsgálatok arra vonatkoztak, hogy az algoritmus állapotváltozói képesek-e egyáltalán az optimumhoz konvergálni, és ha igen, akkor milyen feltételek mellett. Zajos esetben az eddigi eredmények várható értékre vonatkoznak, de még nyitott nyitott kérdés, hogy az adatvesztés hogyan befolyásolja az állapotváltozók varianciáját.

A dolgozatban bemutatott új tudományos eredmények a következők:

1. Tézis

Szenzorhálózaton keresztül dinamikusan visszacsatolt, rezonátor alapú rendszerekben olyan jelérzékelési és jelátviteli eljárásokat dolgoztam ki, amelyek biztosítják a rendszer stabilitását. Kialakítottam egy olyan tesztrendszert, amely alkalmas a szenzorhálózat segítségével visszacsatolt valós idejű, adaptív algoritmusok gyakorlati vizsgálatára.

- 1.1. Egyszerű mintavételező és mintatovábbító szenzorok esetén megoldást adtam a mintavételezés szinkronizálására, és meghatároztam, hogy a dinamikusan visszacsatolt rezonátoros struktúra esetén a szinkronizált állapothoz képest mekkora maximális időbeni elcsúszás engedhető meg a mintavételi és jelfeldolgozási időpontok között a stabilitás biztosításához.
- 1.2. Bemutattam az elosztott, rezonátor alapú jelérzékelés szinkronizációs mechanizmusát, és meghatároztam, hogy szinkronizáció hiányában mennyi ideig marad stabil a visszacsatolt rendszer.

Kapcsolódó publikációk: [1, 2]



2. Tézis

Kifejlesztettem az úgynevezett hibaelőjeles dinamikusan visszacsatolt rezonátoros struktúrát. A hibaelőjeles algoritmus segítségével csökkenthető a rendszer visszacsatoló ágában továbbítandó adatok mennyisége.

- 2.1. A struktúra paramétereit és a visszacsatolásban lévő dinamikus rendszer impulzusválasza alapján felső korlátot adtam a visszacsatolt rendszer által állandósult állapotban elért hiba abszolút középértékére.
- 2.2. Bebizonyítottam, hogy az impulzusválaszban található késleltetést ismerve általában szűkebb felső korlát adható a hiba abszolút középértékére.
- 2.3. Alsó korlátot adtam a rendszer beállási idejére.
- 2.4. Kifejlesztettem a javított konvergenciatulajdonságokkal rendelkező hibaelőjeles rezonátoros struktúrát, és elégséges feltételt adtam a rendszer konvergenciájára. Az algoritmus a konvergenciaparaméter folyamatos hangolásával lehetővé teszi adott hibaszint elérését kisebb beállási idő mellett.

Kapcsolódó publikáció: [3]



3. Tézis

Kifejlesztettem az úgynevezett hibaelőjeles FxLMS algoritmust. A hibaelőjeles algoritmus segítségével csökkenthető a rendszer visszacsatoló ágában továbbítandó adatok mennyisége.

- 3.1. Az algoritmus paramétereit és a visszacsatolásban lévő dinamikus rendszer impulzusválasza alapján felső korlátot adtam a visszacsatolt rendszer által állandósult állapotban elért hiba abszolút középértékére.
- 3.2. Bebizonyítottam, hogy amennyiben a referenciajel Gauss-eloszlású, és az impulzusválasz késleltetést nem tartalmazó része monoton csökkenő, akkor az impulzusválaszban található késleltetést ismerve szűkebb felső korlát adható a hiba abszolút középértékére.
- 3.3. Alsó korlátot adtam a rendszer beállási idejére.
- 3.4. Kifejlesztettem a javított konvergenciatulajdonságokkal rendelkező hibaelőjeles FxLMS algoritmust, és elégséges feltételt adtam a rendszer konvergenciájára. Az algoritmus a konvergenciaparaméter folyamatos hangolásával lehetővé teszi adott hibaszint elérését kisebb beállási idő mellett.

Kapcsolódó publikáció: [4]



4. Tézis

Szükséges, illetve elégséges feltételeket adtam arra nézve, hogy adatvesztés esetén a rezonátor alapú struktúrák állapotváltozói konvergálnak-e az adatvesztés nélkül elérhető optimális értékekhez. A feltételek az adatvesztés paramétereit és a rezonátoros struktúrák beállítása alapján értékelhetők ki.

- 4.1. Szükséges feltételt adtam a rezonátor alapú megfigyelő konvergenciájára.
- 4.2. Bebizonyítottam, hogy a 4.1. feltétel egyenletes rezonátorelhelyezkedés és véges beállású megfigyelő esetében elégséges is.
- 4.3. Általános rezonátorelhelyezkedés esetén többfajta elégséges feltételt adtam a megfigyelő konvergenciájára.
- 4.4. A 4.1. és 4.3. altézisben megfogalmazott feltételeket kiterjesztettem a dinamikusan visszacsatolt rezonátor alapú struktúrára. A 4.3. altézisben adott feltételeket a konvergenciaparaméter kellően alacsony értéke mellett bizonyítottam be.

Kapcsolódó publikáció: [5]

Irodalomjegyzék

- [1] Gy. Orosz, L. Sujbert, G. Péceli, „Testbed for wireless adaptive signal processing systems,” *Proc. of the IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conf.*, Warsaw, Poland, 1-3 May 2007., pp. 123–128.
- [2] Gy. Orosz, L. Sujbert, G. Péceli, „Synchronization and sampling in wireless adaptive signal processing systems,” *Periodica Polytechnica-Electrical Engineering*, vol. 54, no. 1-2, pp. 59–70, 2010.
- [3] Gy. Orosz, L. Sujbert, G. Péceli, „Spectral observer with reduced information demand,” *Proc. of the IEEE International Instrumentation and Measurement Technology Conf.-I2MTC 2008*, Victoria, Canada, 12-15 May 2008., pp. 2155–2160.
- [4] Gy. Orosz, L. Sujbert, G. Péceli, „Adaptive filtering with bandwidth constraints in the feedback path,” *Signal Processing*, vol. 92, no. 1, pp. 130–138, Jan. 2012.
- [5] Gy. Orosz, L. Sujbert, G. Péceli, „Analysis of resonator-based harmonic estimation in case of data loss,” *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, közlésre elfogadva.
- [6] L. Sujbert, K. Molnár, Gy. Orosz, L. Lajkó, „Wireless sensing for active noise control,” *Proc. of the IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference*, Sorrento, Italy, April 24-27., 2006., pp. 123–128.
- [7] D. Hristu-Varsakelis, W. S. Levine, *Handbook of Networked and Embedded Control Systems*, Birkhäuser Boston, 2005.
- [8] G. C. Walsh, H. Ye, „Scheduling of networked control systems,” *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 21, No. 1, pp. 57–65, Feb. 2001.
- [9] M. Mathiesen, G. Thonet, N. Aakwaag, „Wireless ad-hoc networks for industrial automation: current trends and future prospects,” *Proceedings of the IFAC World Congress*, Prague, Czech Republic, July 4-8, 2005., pp. 89–100.
- [10] S. Zampieri, „Trends in networked control systems,” *Proceedings of the 17th World Congress, The International Federation of Automatic Control*, Seoul, Korea, July 6-11, 2008., pp. 2886–2894.

- [11] F. Mieleveille, W. Du, I. Daikh, D. Navarro, „Wireless sensor networks for active control noise reduction in automotive domain,” *The 14th International Symposium on Wireless Personal Multimedia Communications (WPMC'11)*, Brest, France, 3-7 Oct. 2011.
- [12] G. Péceli, „Valós idejű jelkiértékelés mérési eljárásokban,” Akadémiai doktori értekezés, BME, Budapest, 1987.
- [13] G. Péceli, „A common structure for recursive discrete transforms,” *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. CAS-33, no. 10, pp. 1035–1036, Oct. 1986.
- [14] L. Sujbert, „Periodikus zavarhatások csökkentésének aktív módszerei,” PhD értekezés, Budapesti Műszaki Egyetem, Magyarország, 95 p., 1997.
- [15] B. Widrow, S. D. Stearns, *Adaptive Signal Processing*, Prentice-Hall, Inc., Engle-wood Cliffs, 1985.
- [16] B. Widrow, *Adaptive Inverse Control*, Prentice-Hall, Inc., 1996.
- [17] B. Widrow, G. Plett, „Adaptive inverse control based on linear and nonlinear adaptive filtering,” *Proc. 1996 International Workshop on Neural Networks for Identification, Control, Robotics and Signal/Image Processing*, Venice, Italy, Aug. 1996, pp. 30–38.
- [18] I. F. Akyildiz, W. Su, Y. Sankarasubramaniam, E. Cayirci, „Wireless sensor networks: a survey,” *Comput. Netw.*, vol. 38, no. 4, pp. 393–422, 2002.
- [19] M. Tubaishat, S. Madria, „Sensor networks: an overview,” *IEEE Potentials*, vol. 22, no. 2, pp. 20–23, Apr./May 2003.
- [20] J. Yick, B. Mukherjee, D. Ghosal, „Wireless sensor network survey,” *Computer Networks*, vol. 52, no. 12, pp. 2292–2330, Aug. 2008.
- [21] C. Buratti, A. Conti, D. Dardari, R. Verdone, „An overview on wireless sensor networks technology and evolution,” *Sensors*, vol. 9, no. 9, pp. 6869–6896, Aug. 2009.
- [22] N. J. Ploplys, P. A. Kawka, A. G. Alleyne, „Closed-loop control over wireless networks,” *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 24, no. 3, pp. 58–71, Jun. 2004.
- [23] L.G. Bushnell, „Networks and control,” *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 21, no. 1, pp. 22–23, Feb. 2001.
- [24] P. Antsaklis, J. Baillieul, „Special issue on networked control systems,” *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-49, no. 9, Sep. 2004.
- [25] P. Antsaklis, J. Baillieul, „Special issue on technology of networked control systems,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 95, no. 1, pp. 5–8, Jan. 2007.

- [26] J. P. Hespanha, P. Naghshtabrizi, Y. Xu, „A survey of recent results in networked control systems,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 95, no. 1, pp. 138–162, Jan. 2007.
- [27] M. S. Hasan, H. Yu, A. Carrington, „Overview of wireless networked control systems over mobile ad-hoc network,” *Proceedings of the 14th International Conference on Automation and Computing*, Brunel University, West London, UK, 6 Sept. 2008., pp. 53–58.
- [28] J. Nilsson, „Real-Time Control Systems with Delays,” PhD thesis, Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology, 1998., 138 p.
- [29] K. Kömer, P. Blum, L. Meier, „Time synchronization and calibration in wireless sensor networks,” in *Handbook of Sensor Networks: Algorithms and Architectures*, Ivan Stojmenović, Ed., Wiley, 2005.
- [30] J. Baillieul, P. J. Antsaklis, „Control and communication challenges in networked real-time systems,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 95, no. 1, pp. 9–28, Jan. 2007.
- [31] G. N. Nair, F. Fagnani, S. Zampieri, R. J. Evans, „Feedback control under data rate constraints: an overview,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 95, no. 1, pp. 108–137, Jan. 2007.
- [32] M. Miskowicz, „Send-on-delta concept: an event-based data reporting strategy,” *Sensors* vol. 6, pp. 49–63, 2006.
- [33] J. K. Yook, D. M. Tilbury, N. R. Soparkar, „Trading computation for bandwidth: reducing communication in distributed control systems using state estimators,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 10, no. 4, pp. 503–518, July 2002.
- [34] E. Miklovičová, M. Mrosko, „PID control strategy for sensor random packet dropouts in networked control system,” *International Journal of Systems Applications, Engineering & Development*, vol. 6, no. 1, pp. 154–162, 2012.
- [35] J. Wu, T. Chen, „Design of networked control systems with packet dropouts,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 52, no. 7, pp. 1314–1319, July 2007.
- [36] B. S. Luca, L. Schenato, M. Franceschetti, K. Poolla, M. I. Jordan, S. S. Sastry, „Kalman filtering with intermittent observations,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 49., no. 9., pp. 1453–1464, Sept. 2004.
- [37] L. Schenato, B. Sinopoli, M. Franceschetti, K. Poolla, S. S. Sastry, „Foundations of control and estimation over lossy networks,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 95, no. 1, pp. 163–187, Jan. 2007.

- [38] X. Liu, A. Goldsmith, „Wireless communication tradeoffs in distributed control,” *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, Maui, Hawaii USA, Dec. 2003., pp. 688–694.
- [39] J.-S. Lee, Y.-W. Su, C.-C. Shen, „A comparative study of wireless protocols: Bluetooth, UWB, ZigBee, and Wi-Fi,” *The 33rd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society (IECON)*, Nov. 5-8, 2007, Taipei, Taiwan
- [40] E. Ferro, F. Potorti, „Bluetooth and Wi-Fi wireless protocols: A survey and a comparison,” *IEEE Wireless Commun.*, vol. 12, no. 1, pp. 12–16, Feb. 2005.
- [41] Y. A. Millán, F. Vargas, F. Molano, E. Mojica, „A wireless networked control systems review,” *Robotics Symposium, 2011 IEEE IX Latin American and IEEE Colombian Conference on Automatic Control and Industry Applications (LARC)*, Bogota, Colombia, 1-4 Oct. 2011.
- [42] N. Baker, „ZigBee and Bluetooth strengths and weaknesses for industrial applications,” *IEE Computing & Control Engineering Journal*, vol. 16, no. 2, pp. 20–25, April-May 2005.
- [43] MEMSIC, *Wireless Modules*, <http://www.memsic.com>
- [44] HART[®] Communication Foundation, *Wireless HART standard*, <http://www.hartcomm.org>
- [45] F. Chen, T. Talanis, R. German, F. Dressler, „Real-time enabled IEEE 802.15.4 sensor networks in industrial automation,” *IEEE International Symposium on Industrial Embedded Systems, 2009. SIES '09.*, 8-10 July 2009., pp. 136–139.
- [46] D.-H. Choi, D.-S. Kim, „Wireless fieldbus for networked control systems using LR-WPAN,” *International Journal of Control, Automation, and Systems*, vol. 6, no. 1, pp. 119–125, Feb. 2008.
- [47] D. Dzung, J. Endresen, C. Apneseth, J. Frey, „Design and implementation of a real-time wireless sensor/actuator communication system,” *ETFA 2005. 10th IEEE Conference on Emerging Technologies and Factory Automation*, vol. 2, 19-22. Sept. 2005, pp. 433–442.
- [48] T. C. Yang, „Networked control system: a brief survey,” *IEE Proc.-Control Theory Appl.* vol. 153, no. 4, pp. 403–412, July 2006.
- [49] H. Kopetz, G. Grünsteidl, „TTP – A protocol for fault-tolerant real-time systems,” *IEEE Computer*, vol. 27, no. 1, pp. 14–23, Jan. 1994.
- [50] M.O. Tokhi, S.M. Veres, *Active Sound and Vibration Control: Theory and Applications*, Bath, UK, The Institution of Electrical Engineers, 2002.
- [51] C. R. Fuller, S. J. Elliott, P. A. Nelson, *Active Control of Vibration*, London, UK, Academic Press, 1996.

- [52] S. M. Kuo, D. R. Morgan, „Active noise control: a tutorial review,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 87, no. 6, pp. 943–973, June 1999.
- [53] BME-MIT, *A BME MIT mitmót rendszere*, <http://bri.mit.bme.hu/>
- [54] TinyOS operációs rendszer hivatalos honlapja, <http://www.tinyos.net/>
- [55] Analog Devices, *EZ-KIT Lite for the ADSP-2136x SHARC® processor family*, <http://www.analog.com/en/embedded-processing-dsp/sharc/21364-HARDWARE/products/product.html>
- [56] X. Liu, A. Goldsmith, „Wireless medium access control in networked control systems,” *Proceedings of American Control Conference 2004.*, vol. 4, Atlantis, Paradise Island, Bahamas, 30 June-2 July 2004, pp. 3605–3610.
- [57] P. X. Liu, M. Meng, X. Ye, J. Gu, „An UDP-based protocol for Internet robots,” *2002. Proceedings of the 4th World Congress on Intelligent Control and Automation*, vol 1., Shanghai, P. R. China, 10-14 June, 2002., pp. 59–65.
- [58] IEEE Computer Society, *IEEE std. 802.15.4 - 2003: Wireless Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) Specifications for Low Rate Wireless Personal Area Networks (LR-WPANs)*, The Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc. 3 Park Avenue, New York, NY 10016-5997, USA, 1. Oct. 2003.
- [59] N.I. Dopico, C. Gil-Soriano, I. Arrazola, S. Zazo, „Analysis of IEEE 802.15.4 throughput in beaconless mode on micaZ under TinyOS 2,” *2010 IEEE 72nd Vehicular Technology Conference Fall (VTC 2010-Fall)*, 6-9 Sept. 2010., pp 1–5.
- [60] R. M. Murray, J. Doyle, M. Effros, J. Hickey, S. Low, „A multi-vehicle, wireless testbed for networked control, communications, and computing,” URL: <http://legend.me.uiuc.edu/hotdec/>
- [61] J. H. Taylor, J. Slipp, „An integrated testbed for advanced wireless networked control systems technology,” *IECON 2010 - 36th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society*, Fredericton, NB, Canada, 7-10 Nov. 2010., pp. 2101–2106.
- [62] Orosz Gy., Sujbert L., „Elosztott rendszerek és szenzorhálózatok 1-2.,” *Mérési útmutató a Beágyazott és ambiens rendszerek laboratórium (vimia350) című tantárgyhoz (BSc)*, BME-MIT, Budapest, 2008.
- [63] Orosz Gy., Sujbert L., „Elosztott rendszerek és szenzorhálózatok,” *Mérési útmutató az Információfeldolgozás laboratórium (vimim322) című tantárgyhoz (MSc)*, BME-MIT, Budapest, 2010.

- [64] R. R. Bitmead, „On recursive discrete Fourier transformation,” *IEEE Trans. on Acoustic, Speech, and Signal Processing*, vol. ASSP-30, no. 2, pp. 319–322, Apr. 1982.
- [65] G. H. Hostetter, „Recursive discrete Fourier transformation,” *IEEE Trans. on Acoustic, Speech, and Signal Processing*, vol. ASSP-28., no. 2., pp. 183–190, Apr. 1980.
- [66] G. Péceli, „Sensitivity properties of resonator-based digital filters,” *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. CAS-35., no. 9, pp. 1195–1197, Sep. 1988.
- [67] L. Sujbert, G. Péceli, Gy. Simon, „Resonator based non-parametric identification of linear systems,” *IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement*, vol. 54., no. 1., pp. 386–390, Feb. 2005.
- [68] F. Nagy, „Measurement of signal parameters using nonlinear observers,” *IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement*, vol. IM-41, no. 1., pp. 152–155, Feb. 1992.
- [69] D. G. Luenberger, „An introduction to observers,” *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. AC-16, no. 6., pp. 596–602, Dec. 1971.
- [70] R. E. Kalman, „A new approach to linear filtering and prediction problems,” *Trans. ASME-J. Basic Eng. Automat. Control*, vol. 82, no. D., pp. 35–45, Mar. 1960.
- [71] R. R. Bitmead, A. C. Tsoi, P. J. Parker, „A Kalman filtering approach to short-time fourier analysis,” *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 34., no. 6., pp. 1493–1501., Dec. 1986.
- [72] L. Ljung, T. Soderstorm, *Theory and practice of recursive identification*, Cambridge, MA: M.I.T. Press, 1983.
- [73] R. Hasting-James, M. W. Sage, „Recursive generalised-least-squares procedure for online identification of process parameters,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 116, no. 12, pp. 2057–2062, Dec. 1969.
- [74] F. K. Becker, L. N. Holzman, R. W. Lucky, E. Port, „Automatic equalization for digital communication,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 53, no. 1, pp. 96–97, Jan. 1965.
- [75] R. W. Lucky, „Techniques for adaptive equalization of digital communication systems,” *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 45, pp. 255–286, Feb. 1966.
- [76] C. W. Gritton C.W., D. W. Lin, „Echo cancellation algorithms,” *IEEE ASSP Magazine*, vol. 1, no. 2, pp. 30–38, Apr. 1984.
- [77] M. M. Sondhi, „An adaptive echo canceller,” *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 46, pp. 497–511, Mar. 1967.

- [78] B. Widrow, K. M. Duvall, R. P. Gooch, W. C. Newman, „Signal cancellation phenomena in adaptive antennas: causes and cures,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-30, no. 3, pp 469–478, May 1982.
- [79] L. J. Griffiths, C. W. Jim, „An alternative approach to linearly constrained adaptive beamforming,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-30, no. 1, pp. 27–34, Jan. 1982.
- [80] A. Gersho, „Adaptive filtering with binary reinforcement,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. IT-30, no. 2, pp. 191–199, Mar. 1984.
- [81] O. Macchi, „Advances in adaptive filtering,” in *Digital Communications*, Amsterdam, The Netherlands: North-Holland, pp. 41–57, 1986.
- [82] M. Chakraborty, R. Shaik, M. H. Lee, „An efficient implementation of the sign LMS algorithm using block floating point format,” *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, vol. 2007, Article ID 57086, 7 p., 2007.
- [83] L. Der, O. B. Razavi, „A 2-GHz CMOS image-reject receiver with sign-sign LMS calibration,” *Dig. International Solid-State Circuits Conference*, Feb. 2001., pp. 294–295.
- [84] S. C. Douglas, T.H.-Y. Meng, „Stochastic gradient adaptation under general error criteria,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 42, no. 6, pp. 1335–1351, Jun. 1994.
- [85] N. L. Freire, S.C. Douglas, „Adaptive cancellation of geomagnetic background noise using a sign-error normalized LMS algorithm,” *Proc. IEEE Int. Conf. on Acoustic, Speech, Signal Processing*, Minneapolis, MN, vol. 3, 27-30. Apr. 1993., pp. 523–526.
- [86] D. R. Morgan „An analysis of multiple correlation cancellation loops with a filter in the auxiliary path,” *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. ASSP-28, no. 4, pp. 454–467, Aug. 1980.
- [87] E. Bjarnason, „Analysis of the Filtered-x LMS Algorithm,” *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, vol. 3, no. 6, pp. 504–514, Nov. 1995.
- [88] I. Tabatabaei Ardekani, W.H. Abdulla, „Theoretical convergence analysis of FxLMS algorithm,” *Elsevier, Signal Processing*, vol. 90, no. 12, pp. 3046–3055, Dec. 2010.
- [89] S. J. Elliott, I. M. Stothers, P. A. Nelson, „A multiple error LMS algorithm and its application to the active control of sound and vibration,” *IEEE Transactions on Acoustic, Speech, and Signal Processing*, vol. ASSP-35, no. 10, pp. 1423–1434, Oct. 1987.

- [90] B. Widrow, P. Baudrenghien, M. Vetterli, P. Titchener, „Fundamental relations between the LMS algorithm and the DFT,” *IEEE Trans. on Circuits and Syst.*, vol. 34, pp. 814–820, Jul. 1987.
- [91] L. Sujbert, G. Péceli „Signal model based periodic noise controller design,” *Measurement*, vol. 20, no. 2, pp. 135–141, Feb. 1997.
- [92] L. Sujbert, „A new filtered LMS algorithm for active noise control,” *Active '99 - The International EAA Symposium on Active Control of Sound and Vibration*, Fort Lauderdale, United States of America, Dec. 02-04, 1999., pp. 1101–1110.
- [93] R. Noro, „Synchronization over packet-switching networks: theory and applications,” PhD thesis, Institute for Computer Communications and Applications, EPFL, Lausanne, 2000., 142 p.
- [94] M. S. Branicky, S. M. Phillips, W. Zhang, „Stability of networked control systems: explicit analysis of delay,” *Proceedings of the American Control Conference*, Chicago, Illinois, June 2000., pp. 2352–2357.
- [95] X. Dang, Q. Zhang, „Exponential stability for NCS with time-varying delay and dynamical state feedback,” *International Conference on Logistics Systems and Intelligent Management 2010*, Jan. 9-10, 2010., pp. 488-492.
- [96] D. L. Mills, „Internet time synchronization: the network time protocol,” *IEEE Transactions on Communications*, vol. COM 39, no. 10, pp. 1482–1493, Oct. 1991.
- [97] J. Elson, L. Girod, D. Estrin, „Fine-grained network time synchronization using reference broadcasts,” *Fifth Symposium on Operating Systems Design and Implementation (OSDI 2002)*, Boston, MA. Dec. 2002.
- [98] S. Ganeriwal, R. Kumar, M. B. Srivastava, „Timing-sync protocol for sensor networks,” *First ACM Conference on Embedded Networked Sensor Systems (SenSys)*, Los Angeles, California, USA, Nov. 2003.
- [99] M. Maroti, B. Kusy, Gy. Simon, A. Ledeczi, „The flooding time synchronization protocol,” *Conference On Embedded Networked Sensor Systems, SenSys'04*, Baltimore, Maryland, USA., Nov. 3-5, 2004.
- [100] K. Römer, „Time synchronization in Ad-Hoc networks,” *ACM Symposium on Mobile Ad-Hoc Networking and Computing (MobiHoc 01)*, Oct. 2001.
- [101] K. Molnár, L. Sujbert, G. Péceli, „Synchronisation of sampling in distributed signal processing systems,” *Int. Symp. on Intelligent Signal Processing, WISP 2003.*, Budapest, Hungary, Sept. 2003., pp. 21–26.
- [102] Atmel co., *ATmega128A datasheet*, <http://www.atmel.com>

- [103] E. Meijering, „A chronology of interpolation: from ancient astronomy to modern signal and image processing”, *Proceedings of the IEEE*, vol. 90, no. 3, pp. 319–342, March 2002.
- [104] R. W. Schafer, L. R. Rabiner, „A digital signal processing approach to interpolation”, *Proceedings of the IEEE*, vol. 61, no. 6, pp. 692–702, June 1973.
- [105] R. E. Crochiere, L. R. Rabiner, L. R., *Multirate Digital Signal Processing*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1983
- [106] Rózsa Pál, *Lineáris algebra és alkalmazásai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1991
- [107] Schnell L. (főszerk.), *Jelek és rendszerek mérés technikája*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1990
- [108] A. V. Oppenheim, R. W. Schafer, J. R. Buck, „Spectrum analysis of random signals using estimates of the autocorrelation sequence,” in *Discrete-Time Signal Processing*, (2nd Edition) Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, New Jersey 07458, 1998.
- [109] R. Price, „A useful theorem for nonlinear devices having Gaussian inputs,” *IRE Trans. on Inf. Theory*, vol. 4, no. 2, pp. 69–72, Jun. 1958.
- [110] J. J. Bussgang, „Crosscorrelation functions of amplitude-distorted Gaussian signals,” Res. Lab. of Electronics, M.I.T., Cambridge, Mass., Tech. Rep. 216, sec. 3, March 26, 1952., 7 p.
- [111] S. O. Rice, „Mathematical Analysis of Random Noise,” *Bell Sys. Tech. J.*, vol. 23, pp. 282–332., July, 1944., és vol. 24, pp. 24–156, Jan. 1945.
- [112] A. K. Fletcher, S. Rangan, V. K. Goyal „Estimation from lossy sensor data: jump linear modeling and Kalman filtering,” *Proc. of the 3rd International Symposium on Information Processing in Sensor Networks*, Berkeley, California, USA, April 26-27. 2004., pp. 251–258.
- [113] N. J. Horton, K. P. Kleinman, „Much ado about nothing: a comparison of missing data methods and software to fit incomplete data regression models,” *The American Statistician*, vol. 61, no. 1, pp. 79–90, ASA, 2007.
- [114] M. Mushkin and I. Bar-David. „Capacity and coding for the Gilbert-Elliott channels.” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 35, no. 6, pp. 1277–1290, 1989.
- [115] K. J. Åström, B. Wittenmark, *Computer Controlled Systems, Theory and Design*, 2nd ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1990.

- [116] I. I. Gihman, A. V. Szkorohod, *Bevezetés a sztochasztikus folyamatok elméletébe*, Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1975.
- [117] H. F. Chen, „Stochastic observability,” *Scientia Sinica*, vol. 20, no. 3, pp. 305–324, 1977.
- [118] A. R. Liu, R. R. Bitmead, „Stochastic observability in network state estimation and control,” *Automatica*, vol. 47, no. 1, pp. 65–78, 2011.

Függelékek

A. Dinamikusan visszacsatolt hibaelőjeles struktúra mellékszámításai

Ebben a függelékben a hibaelőjeles dinamikusan visszacsatolt rezonátoros struktúra analízisének részletszámításait közlöm.

A.1. Lemma. *A hibaelőjeles dinamikusan visszacsatolt rezonátoros struktúra esetén az $S(z)$ dinamikus rendszer kimenete a következő alakban írható fel:*

$$y'_n = \mathbf{c}_n^T \mathbf{S} \hat{\mathbf{x}}_{n'} - h_n^r, \quad (\text{A-1})$$

$$h_n^r = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{q=1}^k \gamma_k \mathbf{c}_{n'-k}^T \mathbf{W} \mathbf{c}_{n'-q}^* \text{sign}(e_{n'-q}), \quad (\text{A-2})$$

$$n' = n - d. \quad (\text{A-3})$$

Bizonyítás: Az $S(z)$ szakasz kimenete u_n és s_k konvolúciójaként felírható:

$$y'_n = \sum_{k=0}^{\infty} s_k u_{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k u_{n'-k}, \quad (\text{A-4})$$

ahol $n' = n - d$ a γ_k -ból hiányzó késleltetést helyettesíti (4.6) alapján. A beavatkozójel (4.1) definícióját használva:

$$y'_n = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \mathbf{c}_{n'-k}^T \hat{\mathbf{x}}_{n'-k}. \quad (\text{A-5})$$

(4.2) rekurzív kifejtésével a következő adódik:

$$\hat{\mathbf{x}}_n = \hat{\mathbf{x}}_{n-k} + \alpha \sum_{q=1}^k \mathbf{W} \mathbf{c}_{n-q}^* \text{sign}(e_{n-q}), \quad k \geq 1. \quad (\text{A-6})$$

Az (A-5) egyenletben $\hat{\mathbf{x}}_{n'-k}$ kifejezhető az (A-6) egyenletet felhasználva:

$$y'_n = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \mathbf{c}_{n'-k}^T \left[\hat{\mathbf{x}}_{n'} - \alpha \sum_{\substack{q=1 \\ k \geq 1}}^k \mathbf{W} \mathbf{c}_{n'-q}^* \text{sign}(e_{n'-q}) \right] = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \mathbf{c}_{n'-k}^T \right] \cdot \hat{\mathbf{x}}_{n'} - h_n^r, \quad (\text{A-7})$$

ahol h_n^r az (A-2) egyenletben adott.

A számítások során a \mathbf{c}_n vektorok következő tulajdonságát használom ki, amely a (2.11) és (2.25) egyenletekből belátható, az $e^{a-b} = e^a e^{-b}$ azonosságot használva:

$$\mathbf{c}_{n-k}^T = \mathbf{c}_n^T \text{diag}(c_{0,-k}, \dots, c_{N-1,-k}) = \mathbf{c}_n^T \langle c_{i,-k} \rangle. \quad (\text{A-8})$$

Térjünk vissza γ_k helyett a késleltetést is tartalmazó s_k impulzusválasz alkalmazásához, így (A-8) felhasználásával (A-7) átalakítható:

$$\hat{y}'_n = \left[\sum_{k=0}^{\infty} s_k \mathbf{c}_{n-k}^T \right] \cdot \hat{\mathbf{x}}_{n'} - h_n^r = \mathbf{c}_n^T \left[\sum_{k=0}^{\infty} s_k \langle c_{i,-k} \rangle \right] \cdot \hat{\mathbf{x}}_{n'} - h_n^r. \quad (\text{A-9})$$

Az (A-9) egyenlet a (2.75) definíciót felhasználva a bizonyítani kívánt (A-1) alakot ölti. ■

A.2. Lemma. *Az $|h_n^r|$ kifejezés felső korlátja:*

$$|h_n^r| \leq \alpha N \|\mathbf{W}\| \sum_{k=1}^{\infty} k |\gamma_k| = \alpha N \xi. \quad (\text{A-10})$$

Bizonyítás: A h_n^r (A-2) definíciója alapján az $|h_n^r|$ felső korlátja a $|\sum x| \leq \sum |x|$ egyenlőtlenség segítségével számítható:

$$|h_n^r| \leq \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{q=1}^k |\gamma_k| \cdot |\mathbf{c}_{n'-k}^T \mathbf{W} \mathbf{c}_{n'-q}^*| \cdot |\text{sign}(e_{n'-q})|. \quad (\text{A-11})$$

A Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség³ és az indukált mátrixnorma tulajdonságai⁴ alapján: $|\mathbf{c}_{n'-k}^T \mathbf{W} \mathbf{c}_{n'-q}^*| \leq \|\mathbf{c}_{n'-k}^T\| \|\mathbf{W}\| \|\mathbf{c}_{n'-q}^*\|$. (4.7) alapján $\|\mathbf{c}_n\| = \sqrt{N}$ időindextől függetlenül, valamint $|\text{sign}(e_{n'-q})| \leq 1$, mert az előjelfüggvény $\{-1, 0, 1\}$ értékeket vehet föl, így (A-11) a következő alakban írható:

$$|h_n^r| \leq \alpha \sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k| N \|\mathbf{W}\| \sum_{q=1}^k 1. \quad (\text{A-12})$$

Mivel $\sum_{q=1}^k 1 = k$, így (A-10) egyértelműen következik az (A-12) egyenletből. ■

A.3. Lemma. *Az $|\mathbf{c}_n^T (\hat{\mathbf{x}}_n^S - \hat{\mathbf{x}}_{n'}^S)|$ kifejezés felső korlátja:*

$$|\mathbf{c}_n^T (\hat{\mathbf{x}}_n^S - \hat{\mathbf{x}}_{n'}^S)| \leq \alpha N d. \quad (\text{A-13})$$

³ $|\mathbf{x}^H \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$, lásd: [106]

⁴ $\|\mathbf{A} \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}\|$, lásd: [106]

Bizonyítás: (A-6) mindkét oldalát megszorozva \mathbf{S} -sel, és felhasználva, hogy $\mathbf{W} = \mathbf{S}^{-1}$, a következő $\hat{\mathbf{x}}_n^{\mathbf{S}}$ -re vonatkozó rekurzióhoz jutunk:

$$\hat{\mathbf{x}}_n^{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{x}}_{n-k}^{\mathbf{S}} + \alpha \sum_{q=1}^k \mathbf{c}_{n-q}^* \text{sign}(e_{n-q}). \quad (\text{A-14})$$

$(\hat{\mathbf{x}}_n^{\mathbf{S}} - \hat{\mathbf{x}}_{n'}^{\mathbf{S}})$ kifejezhető az (A-14) egyenletből felhasználva, hogy $n' = n - d$, így:

$$\begin{aligned} |\mathbf{c}_n^{\text{T}} (\hat{\mathbf{x}}_n^{\mathbf{S}} - \hat{\mathbf{x}}_{n-d}^{\mathbf{S}})| &= \left| \alpha \sum_{q=1}^d \mathbf{c}_n^{\text{T}} \mathbf{c}_{n-q}^* \text{sign}(e_{n-q}) \right| \leq \alpha \sum_{q=1}^d |\mathbf{c}_n^{\text{T}} \mathbf{c}_{n-q}^*| |\text{sign}(e_{n-q})| \\ &\leq \alpha \sum_{q=1}^d \|\mathbf{c}_n^{\text{T}}\| \|\mathbf{c}_{n-q}^*\|. \end{aligned} \quad (\text{A-15})$$

Mivel (4.7) alapján $\|\mathbf{c}_n^{\text{T}}\| = \|\mathbf{c}_{n-q}^*\| = \sqrt{N}$, és $\sum_{q=1}^d \sqrt{N}\sqrt{N} = dN$, így (A-13) egyszerűen következik az (A-15) egyenletből. ■

B. Késleltetés hatása a hiba abszolút középérték becslésére hibaelőjeles rezonátoros struktúra esetén

Ebben a függelékben azt mutatom meg, hogy a hibaelőjeles dinamikusan visszatolt rezonátoros struktúra esetén, a késleltetést különválasztva az impulzusválasz többi részétől, szűkebb felső korlát adható az állandósult állapotban elérhető hiba abszolút középértékére. A (4.13) által adott felső korlátban csupán a $(d + \xi)$ értékét befolyásolja d megválasztása. Jelölje $\cdot|_{d=0}$ a késleltetés figyelembevétele nélkül számított értékeket! Elegendő tehát azt megmutatni, hogy $(\xi|_{d=0} + 0) \geq (\xi + d)$, tehát (4.10) alapján:

$$\|\mathbf{W}\| \sum_{k=0}^{\infty} k |s_k| + 0 \geq \|\mathbf{W}\| \sum_{k=0}^{\infty} k |\gamma_k| + d \quad (\text{B-1})$$

ahol a levezetés egyszerűsítése miatt az indexelést $k = 0$ -tól kezdtem, ami azonban nem változtatja meg az eredményt, hiszen a $k = 0$ -dik tag a k nulla értéke miatt kiesik.

Feltételezve, hogy (4.6) alapján s_k legalább d mintányi késleltetést tartalmaz, a (B-1) bal oldala a következő alakra hozható, kihagyva a zérus elemeket:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{W}\| \sum_{k=0}^{\infty} k |s_k| &= \|\mathbf{W}\| \sum_{k=0}^{\infty} (k + d) |\gamma_k| \\ &= \|\mathbf{W}\| \sum_{k=0}^{\infty} k |\gamma_k| + \|\mathbf{W}\| \sum_{k=0}^{\infty} d |\gamma_k|. \end{aligned} \quad (\text{B-2})$$

A (2.75) egyenlet az indexek átírásával felírható a késleltetést nem tartalmazó γ_k impulzusválaszt felhasználva:

$$\mathbf{S} = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \langle c_{i,-k-d} \rangle. \quad (\text{B-3})$$

Ezt az azonosságot felhasználva \mathbf{S} normája a következő alakot ölti:

$$\|\mathbf{S}\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\gamma_k| \|\langle \mathbf{c}_{-k-d} \rangle\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\gamma_k|, \quad (\text{B-4})$$

mivel $\langle \mathbf{c}_{-k-d} \rangle$ normája egységnyi. Ennek magyarázata, hogy a $\langle \mathbf{c}_{-k-d} \rangle$ diagonálmátrix főátlójában $e^{j2\pi f_i(-k-d)}$ elemek találhatóak, tehát $\langle \mathbf{c}_{-k} \rangle^H \langle \mathbf{c}_{-k} \rangle = \mathbf{I}$. A norma pedig ezen mátrix legnagyobb sajátértékének gyöke, amely az \mathbf{I} egységmátrix esetén 1.

Mivel egy mátrix normája annak legnagyobb szinguláris értéke ($\|\mathbf{W}\| = \sigma_{\text{Max}}$), így inverzének normája a legkisebb szinguláris értékének reciproka: $\{\|\mathbf{W}^{-1}\| = \sigma_{\text{min}}^{-1}; \sigma_{\text{min}} \leq \sigma_{\text{Max}}\}$ [106, 536. oldal]. Mivel (2.78) alapján $\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{S}$, így:

$$\|\mathbf{W}\| \geq 1/\|\mathbf{W}^{-1}\| = 1/\|\mathbf{S}\|. \quad (\text{B-5})$$

Ez a (B-4) egyenlettel együtt azt jelenti, hogy (B-2) utolsó tagjának alsó korlátja a következő módon fejezhető ki:

$$\|\mathbf{W}\| \sum_{k=0}^{\infty} d|\gamma_k| \geq \frac{1}{\|\mathbf{S}\|} d \sum_{k=0}^{\infty} |\gamma_k| \geq \frac{d \sum_{k=0}^{\infty} |\gamma_k|}{\sum_{k=0}^{\infty} |\gamma_k|} = d. \quad (\text{B-6})$$

A (B-6) egyenlőtlenséget (B-2) egyenlet utolsó tagjába behelyettesítve (B-1) bizonyítható.

C. Speciális korrelációs függvények számítása

Ebben a függelékben a (4.40) egyenletben adott ρ_w , ρ_d és ρ_p kifejezések számítási módszerét mutatom be. Ezen paraméterek számításának nehézsége az, hogy az $R_{|r||r|}(q)$ és $R_{|x||r|}(q)$ korrelációs függvények a referenciajel és szűrt referenciajel (x és r) nemlineáris függvényei.

A következőkben két módszert ajánlok. Az első módszer a (4.37) definíciós egyenlet numerikus számításán alapszik, és a következő lépésekből áll:

1. Generáljunk egy M hosszúságú x_k jelet az ismert eloszlásának megfelelően.
2. Állítsuk elő az r_k szűrt referenciajelet (2.115) alapján x_k és s_k konvolúciójaként.
3. Vegyük x_k és r_k abszolút értékét.

4. A korrelációs függvény a (4.37) definíciója alapján időbeni átlagolással számítható [108]:

$$\begin{aligned} R_{|r||r|}(q) &\approx \frac{1}{M-|q|} \sum_{i=0}^{M-1} |r_i| \cdot |r_{i+q}| \\ R_{|x||r|}(q) &\approx \frac{1}{M-|q|} \sum_{i=0}^{M-1} |x_i| \cdot |r_{i+q}|. \end{aligned} \quad (\text{C-7})$$

5. M értékét jóval nagyobbra kell választani, mint a korrelációs függvények szélessége: $M \gg q_{\max}$ [108].

A korrelációs függvény analitikusan is számítható speciális esetekben. Legyen z és w Gauss-eloszlású sztochasztikus jel. Amennyiben a két jel $R_{zw}(\tau)$ keresztkorrelációs függvénye ismert, akkor $R_{|z||w|}(\tau)$ a [109, 110, 111] irodalmakban közölt eredmények alapján számítható:

$$R_{|z||w|}(\tau) = \psi[R_{zw}(\tau), \sigma_{zw}], \quad (\text{C-8})$$

ahol

$$\sigma_{zw} = \sqrt{R_{z,z}(0)R_{w,w}(0)}, \quad (\text{C-9})$$

$$\psi[\rho(\tau), \sigma] = \frac{2\sigma}{\pi} \left[\frac{\rho(\tau)}{\sigma} \operatorname{asin} \left(\frac{\rho(\tau)}{\sigma} \right) + \sqrt{1 - \left(\frac{\rho(\tau)}{\sigma} \right)^2} \right]. \quad (\text{C-10})$$

Továbbá [107]:

$$R_{xr}(q) = R_{xx}(q) \star s_n, \quad (\text{C-11})$$

$$R_{rr}(q) = R_{xx}(q) \star s_n \star s_{-n}, \quad (\text{C-12})$$

ahol \star a konvolúció műveletet jelöli. Feltételezzük, hogy $R_{xx}(q)$, tehát az x_n referenciájel autokorrelációs függvénye ismert. Ekkor:

$$R_{|x||r|}(q) = \psi[R_{xr}(q), \sigma_{xr}], \quad (\text{C-13})$$

$$R_{|r||r|}(q) = \psi[R_{rr}(q), \sigma_{rr}]. \quad (\text{C-14})$$

D. Hibaelőjeles FxLMS algoritmus mellékszámításai

Ebben a függelékben a hibaelőjeles FxLMS algoritmus analízisének részletszámításait közlöm.

D.1. Lemma. *Hibaelőjeles FxLMS algoritmus esetén a visszacsatoló ágban található $S(z)$ dinamikus rendszer kimenete a következő alakban írható fel:*

$$y'_n = \mathbf{r}_n^T \mathbf{w}_{n'} - h_n^F, \quad (\text{D-1})$$

$$h_n^F = \mu \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{q=1}^k \gamma_k \mathbf{x}_{n'-k}^T \mathbf{r}_{n'-q} \text{sign}(e_{n'-q}). \quad (\text{D-2})$$

Bizonyítás: A hibaelőjeles FxLMS algoritmus esetén a 4.1. ábrán látható $S(z)$ dinamikus rendszer kimenete az impulzusválasz és a bemenő jel konvolúciójaként írható fel:

$$y'_n = \sum_{k=0}^{\infty} s_k u_{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k u_{n'-k}, \quad (\text{D-3})$$

ahol n' megegyezik az (A-3) definícióval. A beavatkozó jel (4.36) egyenletben adott leírását felhasználva (D-3) átalakítható:

$$y'_n = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \mathbf{x}_{n'-k}^T \mathbf{w}_{n'-k}. \quad (\text{D-4})$$

(4.34) kifejtésével:

$$\mathbf{w}_{n-k} = \mathbf{w}_n - \mu \sum_{q=1}^k \mathbf{r}_{n-q} \text{sign}(e_{n-q}), \quad k \geq 1. \quad (\text{D-5})$$

A (D-5) egyenletet behelyettesítve $\mathbf{w}_{n'-k}$ helyére a (D-4) egyenletbe, és felhasználva a (D-2) egyenletet, a következőt kapjuk:

$$y'_n = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \mathbf{x}_{n'-k}^T \left[\mathbf{w}_{n'} - \mu \sum_{\substack{q=1 \\ k \geq 1}}^k \mathbf{r}_{n'-q} \text{sign}(e_{n'-q}) \right] = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \mathbf{x}_{n'-k}^T \right) \mathbf{w}_{n'} - h_n^F, \quad (\text{D-6})$$

ahol a h_n^F változót (D-2) definiálja. A (2.115) és (4.6) egyenletek alapján: $\mathbf{r}_n = \sum_{k=0}^{\infty} s_k \mathbf{x}_{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \mathbf{x}_{n'-k}$, tehát (D-1) közvetlenül következik a (D-6) egyenletből. ■

D.2. Lemma. *A $\mathbb{E} \{ |\mathbf{r}_n^T \mathbf{r}_{n-q}| \}$ kifejezés felső korlátja:*

$$\mathbb{E} \{ |\mathbf{r}_n^T \mathbf{r}_{n-q}| \} \leq NR_{|r||r|}(q). \quad (\text{D-7})$$

Bizonyítás: Mivel $\mathbf{r}_n = [r_n \dots r_{n-N+1}]^T$, a (D-7) egyenletben található vektorszorzás a vektor elemei szorzatának összegzésévé kifejthető, így:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \{ |\mathbf{r}_n^T \mathbf{r}_{n-q}| \} &= \mathbb{E} \left\{ \left| \sum_{i=0}^{N-1} r_{n-i} r_{n-q-i} \right| \right\} \leq \mathbb{E} \left\{ \sum_{i=0}^{N-1} |r_{n-i}| \cdot |r_{n-q-i}| \right\} \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \mathbb{E} \{ |r_{n-q-i}| \cdot |r_{n-i}| \} = \sum_{i=0}^{N-1} R_{|r||r|}(q) = NR_{|r||r|}(q), \end{aligned} \quad (\text{D-8})$$

mivel $|\sum a_l b_l| \leq \sum |a_l| |b_l|$. $R_{|r||r|}(q) = \mathbb{E} \{ |r_{n-q-i}| \cdot |r_{n-i}| \}$ a (4.37) definíció alapján. (D-7) a (D-8) egyenlettel ekvivalens.

A (D-7) egyenlet közvetlen következménye, hogy $q = 0$ esetén:

$$\mathbb{E} \{ |\mathbf{r}_n^T \mathbf{r}_n| \} \leq NR_{|r||r|}(0) = N\rho_w. \quad (\text{D-9})$$

■

D.3. Lemma. *A $\mathbb{E} \{ |\mathbf{r}_n^T (\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_{n'})| \}$ kifejezés felső korlátja:*

$$\mathbb{E} \{ |\mathbf{r}_n^T (\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_{n'})| \} \leq \mu N \sum_{q=1}^d R_{|r||r|}(q) = \mu N \rho_d. \quad (\text{D-10})$$

Bizonyítás: $\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_{n'}$ kiszámítható (D-5) alapján, mivel $n' = n - d$:

$$\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_{n-d} = \mu \sum_{q=1}^d \mathbf{r}_{n-q} \text{sign}(e_{n-q}). \quad (\text{D-11})$$

Megszorozva (D-11) mindkét oldalát az \mathbf{r}_n^T vektorral, és a várható értékét véve:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \{ |\mathbf{r}_n^T (\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_{n-d})| \} &= \mu \mathbb{E} \left\{ \left| \mathbf{r}_n^T \sum_{q=1}^d \mathbf{r}_{n-q} \text{sign}(e_{n-q}) \right| \right\} \\ &\leq \mu \sum_{q=1}^d \mathbb{E} \{ |\mathbf{r}_n^T \mathbf{r}_{n-q}| \} \leq \mu N \sum_{q=1}^d R_{|r||r|}(q), \end{aligned} \quad (\text{D-12})$$

ahol a (D-7) egyenletet használtam. ■

D.4. Lemma. *A $\mathbb{E} \{ |h_n^F| \}$ kifejezés felső korlátja:*

$$\mathbb{E} \{ |h_n^F| \} \leq \mu N \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{q=1}^k |\gamma_k| R_{|x||r|}(k-q) = \mu N \rho_p. \quad (\text{D-13})$$

Bizonyítás: h_n^F értékét (D-2) definiálja. Vegyük mindkét oldal abszolút értékének várható értékét:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \{ |h_n^F| \} &= \mathbb{E} \left\{ \left| \mu \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{q=1}^k \gamma_k \mathbf{x}_{n'-k}^T \mathbf{r}_{n'-q} \operatorname{sign}(e_{n'-q}) \right| \right\} \\ &\leq \mu \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{q=1}^k |\gamma_k| \mathbb{E} \{ |\mathbf{x}_{n'-k}^T \mathbf{r}_{n'-q}| \}. \end{aligned} \quad (\text{D-14})$$

A (D-14) egyenletben található vektorszorzás kifejezhető az elemenkénti szorzatra:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \{ |\mathbf{x}_{n'-k}^T \mathbf{r}_{n'-q}| \} &= \mathbb{E} \left\{ \left| \sum_{i=0}^{N-1} x_{n'-k-i} r_{n'-q-i} \right| \right\} \\ &\leq \sum_{i=0}^{N-1} \mathbb{E} \{ |x_{n'-k-i}| \cdot |r_{n'-q-i}| \} = NR_{|x||r|}(k-q). \end{aligned} \quad (\text{D-15})$$

A (D-15) egyenlet (D-14) kifejezésbe való behelyettesítésével adódik (D-13). ■

E. Késleltetés hatása a hiba abszolút középérték becslésére hibaelőjeles FxLMS algoritmus esetén

Ebben a függelékben azt mutatom meg, hogy a késleltetést különválasztva az impulzusválasz többi részétől, szűkebb felső korlát adható az állandósult állapotban elérhető hiba abszolút középértékére hibaelőjeles FxLMS algoritmus esetén. A bizonyítás során a következő feltételezésekkel élek:

- Az x_n jel Gauss-eloszlású fehér zaj.
- Az impulzusválasz késleltetést már nem tartalmazó γ_n része monoton csökkenő abszolút értékű.

A következőkben $\cdot|_{d=0}$ azon paramétereket jelöli, amelyeket $d = 0$ választás mellett számítunk. (4.42) alapján azon állítás, hogy a késleltetés szeparálásával szűkebb felső korlát adható, a következő módon fogalmazható meg:

$$\bar{E}_n^a \leq \bar{E}_n^a|_{d=0}. \quad (\text{E-1})$$

Bizonyítás: (4.40) alapján csak ρ_d és ρ_p értékét befolyásolja d megválasztása. Ha a késleltetést nullának választjuk, akkor $\rho_d|_{d=0} = 0$ és az $|s_k|$ teljes impulzusválaszt alkalmazzuk $|\gamma_k|$ helyett a (4.40c) egyenletben, továbbá a (4.42) egyenletben: $\tilde{\mathbf{w}}_0|_{d=0} = \tilde{\mathbf{w}}_0$, $\rho_w|_{d=0} = \rho_w$, $\nu|_{d=0} = \nu$. Mivel μN konstans értékű, így $\bar{E}_n^a \leq \bar{E}_n^a|_{d=0}$ akkor igaz, ha a következő egyenlőtlenség igaz:

$$\rho_d + \rho_p \leq \rho_p|_{d=0}. \quad (\text{E-2})$$

A következőkben (E-2) jobb és bal oldalát fejtem ki, és ezzel igazolom az egyenlőtlenséget.

Mivel $k < d$ esetén $s_k = 0$, így $\rho_p|_{d=0}$ a (4.40c) és (4.6) egyenletek alapján számítható a $k < d$ tagokat elhagyva az összegzésből:

$$\rho_p|_{d=0} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{q=1}^k |s_k| R_{|x||r|}(k-q) = \sum_{k=d}^{\infty} \sum_{q=1}^k |s_k| R_{|x||r|}(k-q). \quad (\text{E-3})$$

Legyen $k = m + d$, ekkor indexcserével:

$$\rho_p|_{d=0} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{m+d} |s_{m+d}| R_{|x||r|}(m+d-q). \quad (\text{E-4})$$

(4.6) alapján $s_{m+d} = \gamma_m$, és a második összegzés két intervallumra bontható: $q = [1 \dots d]$ és $q = [d+1 \dots d+m]$:

$$\rho_p|_{d=0} = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{q=1}^d |\gamma_m| R_{|x||r|}(m+d-q) + \sum_{\substack{q=d+1 \\ m \geq 1}}^{d+m} |\gamma_m| R_{|x||r|}(m+d-q) \right]. \quad (\text{E-5})$$

A harmadik szumma operátor esetén az $m \geq 1$ feltétel azt jelenti, hogy $m \geq 1$ esetén kell az összegzést elvégezni.

Vezessük be az $l = d - q$ indexet a második szummában. Mivel q a $q = [1 \dots d]$ tartományt fedi le, így l az $l = [0 \dots d-1]$ tartományban lép. Vezessük be az $i = q - d$ változót a harmadik szummában. Mivel q a $q = [d+1 \dots d+m]$ tartományt fedi le, így i az $i = [1 \dots m]$ tartományban lép $m \geq 1$ esetén. A változócsereket követően:

$$\rho_p|_{d=0} = \sum_{l=0}^{d-1} \sum_{m=0}^{\infty} |\gamma_m| R_{|x||r|}(m+l) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^m |\gamma_m| R_{|x||r|}(m-i). \quad (\text{E-6})$$

(E-2) bal oldala (4.40b) és (4.40c) alapján számítható:

$$\rho_d + \rho_p = \sum_{q=1}^d R_{|r||r|}(q) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{q=1}^k |\gamma_k| R_{|x||r|}(k-q). \quad (\text{E-7})$$

(2.115) és (4.6) alapján:

$$r_t = \sum_{m=0}^{\infty} x_{t-m-d} \gamma_m. \quad (\text{E-8})$$

A korrelációs függvény (4.37) definíciója és (E-8) alapján:

$$\begin{aligned} \sum_{q=1}^d R_{|r||r|}(q) &= \sum_{q=1}^d \mathbb{E} \{ |r_t| |r_{t+q}| \} = \sum_{q=1}^d \mathbb{E} \left\{ \left| \sum_{m=0}^{\infty} x_{t-m-d} \gamma_m \right| |r_{t+q}| \right\} \leq \\ &= \sum_{q=1}^d \mathbb{E} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} |\gamma_m| |x_{t-m-d}| |r_{t+q}| \right\} = \sum_{q=1}^d \sum_{m=0}^{\infty} |\gamma_m| \mathbb{E} \{ |x_{t-m-d}| |r_{t+q}| \} = \\ &= \sum_{q=1}^d \sum_{m=0}^{\infty} |\gamma_m| R_{|x||r|}(q+m+d) \leq \sum_{q=0}^{d-1} \sum_{m=0}^{\infty} |\gamma_m| R_{|x||r|}(q+m), \end{aligned} \quad (\text{E-9})$$

ahol az utolsó egyenlőtlenséget az E.1. Lemmában bizonyítom a szakasz utolsó részében, lásd (E-11).

(E-7) átírható (E-9) alapján:

$$\rho_d + \rho_p \leq \sum_{q=0}^{d-1} \sum_{m=0}^{\infty} |\gamma_m| R_{|x||r|}(m+q) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{q=1}^k |\gamma_k| R_{|x||r|}(k-q). \quad (\text{E-10})$$

(E-6) és (E-10) jobb oldala az indexek jelölésétől eltekintve megegyezik, tehát az (E-10) egyenlőtlenség miatt (E-2) és így (E-1) bizonyított. ■

E.1. Lemma. *Amennyiben az x_n jel Gauss-eloszlású fehér zaj, és a késleltetést nem tartalmazó γ_n impulzusválasz monoton csökkenő abszolútértékű, úgy a következő egyenlőtlenség igaz:*

$$\sum_{q=1}^d \sum_{m=0}^{\infty} |\gamma_m| R_{|x||r|}(m+q+d) \leq \sum_{q=0}^{d-1} \sum_{m=0}^{\infty} |\gamma_m| R_{|x||r|}(m+q). \quad (\text{E-11})$$

Bizonyítás: A bizonyítás három lépésből áll. Az *1. lépés*ben megmutatom, hogyan lehet az $R_{|x||r|}(\tau)$ korrelációs függvényt Gauss-eloszlású fehér zajra analitikusan számítani. A *2. lépés*ben (E-11) jobb és bal oldalát számítom ki analitikusan az *1. lépés* alapján. A *3. lépés*ben az analitikusan számított függvényekre megmutatom, hogy (E-11) érvényes.

————— 1. lépés —————

Gauss-eloszlású jel esetén $R_{|x||r|}(\tau)$ a C. Függelékben ismertett módon az abszolút érték nélkül vett x és r jel $R_{xr}(\tau)$ keresztkorrelációs függvényből számítható:

$$R_{|x||r|}(\tau) = \psi(R_{xr}(\tau), \sigma_{xr}), \quad (\text{E-12})$$

ahol $\sigma_{xr} = \sqrt{R_{xx}(0)R_{rr}(0)}$, és $\psi(\cdot)$ függvényt (C-10) egyenlet definiálja.

A $\frac{\psi(\rho(\tau), \sigma_{xr})}{\sigma_{xr}}$ függvény az F.1. ábrán látható. Vegyük észre, hogy $\psi(\rho(\tau), \sigma_{xr})$ páros függvénye $\rho(\tau)$ -nak, így: $\psi(\rho(\tau), \sigma_{xr}) = \psi(|\rho(\tau)|, \sigma_{xr})$. A $\psi(|\rho(\tau)|, \sigma_{xr})$ függvény minimumhelye $|\rho(\tau)| = 0$, ahol $\psi_0 = \psi(0, \sigma_{xr})$ értéket veszi föl. Legyen

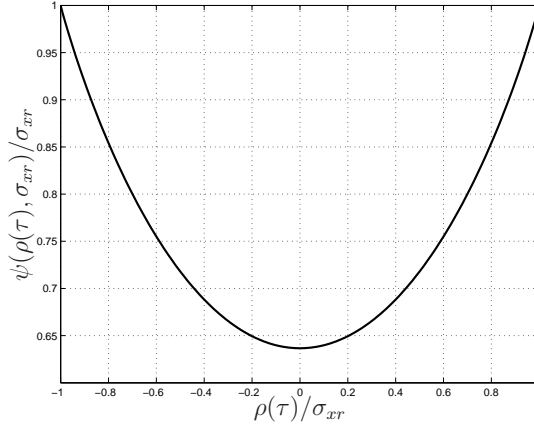
$$\psi(|\rho(\tau)|, \sigma_{xr}) = \psi'(|\rho(\tau)|, \sigma_{xr}) + \psi_0, \quad (\text{E-13})$$

így $\psi'(0, \sigma_{xr}) = 0$. $\psi'(|\rho(\tau)|, \sigma_{xr})$ konvex függvénye $|\rho(\tau)|$ -nek. A konvex függvények definíciója alapján:

$$\psi'(tx + (1-t)y, \sigma_{xr}) \leq t\psi'(x, \sigma_{xr}) + (1-t)\psi'(y, \sigma_{xr})$$

$t \in [0, 1]$ esetén, bármilyen x és y -ra. Az egyenlet $y = 0$ esetén a

$$\psi'(tx, \sigma_{xr}) \leq t\psi'(x, \sigma_{xr}) \quad (\text{E-14})$$

F.1. ábra. A $\frac{\psi(\rho(\tau), \sigma_{xr})}{\sigma_{xr}}$ függvény.

alakot ölti. Az (E-12) egyenletben adott $R_{xr}(\tau)$ számítható (E-8) és (4.37) alapján:

$$\begin{aligned} R_{xr}(\tau) &= \mathbb{E}\{x_t r_{t+\tau}\} = \mathbb{E}\left\{x_t \sum_{m=0}^{\infty} x_{t+\tau-m-d} \gamma_m\right\} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m \mathbb{E}\{x_t x_{t+\tau-m-d}\} = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m R_{xx}(\tau - m - d). \end{aligned} \quad (\text{E-15})$$

Mivel x Gauss-eloszlású fehér zaj, így $R_{xx}(\tau - m - d) = \sigma_x^2 \delta_{\tau-m-d}$, ahol σ_x^2 az x varianciája, és δ_τ a diszkrét Dirac-delta függvényt jelöli. A Dirac-delta definíciója miatt (E-15) folytatható:

$$R_{xr}(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m R_{xx}(\tau - m - d) = \sigma_x^2 \gamma_{\tau-d}. \quad (\text{E-16})$$

Tehát $\tau = q + m + d$ esetén:

$$R_{xr}(q + m + d) = \sigma_x^2 \gamma_{q+m}, \quad (\text{E-17})$$

és $\tau = q + m$ esetén:

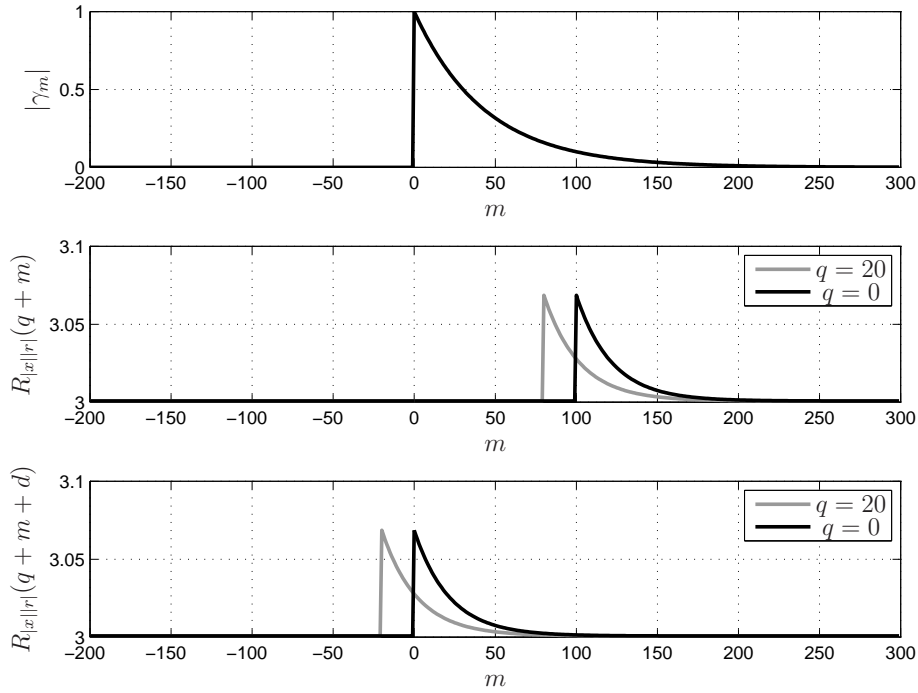
$$R_{xr}(q + m) = \sigma_x^2 \gamma_{q+m-d}. \quad (\text{E-18})$$

(E-12), (E-17), (E-18) és (E-13) alapján:

$$\begin{aligned} R_{|x||r|}(q + m + d) &= \psi(\sigma_x^2 \gamma_{q+m}, \sigma_{xr}) = \psi(\sigma_x^2 |\gamma_{q+m}|, \sigma_{xr}) \\ &= \psi'(\sigma_x^2 |\gamma_{q+m}|, \sigma_{xr}) + \psi_0, \end{aligned} \quad (\text{E-19})$$

$$\begin{aligned} R_{|x||r|}(q + m) &= \psi(\sigma_x^2 \gamma_{q+m-d}, \sigma_{xr}) = \psi(\sigma_x^2 |\gamma_{q+m-d}|, \sigma_{xr}) \\ &= \psi'(\sigma_x^2 |\gamma_{q+m-d}|, \sigma_{xr}) + \psi_0. \end{aligned} \quad (\text{E-20})$$

Az $|\gamma_m|$, $R_{|x||r|}(q + m)$ és $R_{|x||r|}(q + m + d)$ függvényeket az F.2. ábra illusztrálja egy konkrét esetre.



F.2. ábra. Illusztráció: $|\gamma_m|$, $R_{|x||r|}(q+m)$ és $R_{|x||r|}(q+m+d)$ függvények. $\gamma_m = 1 \cdot 0.9772^m$, $d = 100$. Fekete vonal: $q = 0$, szürke vonal: $q = 20$.

————— 2. lépés —————

(E-11) bal oldala (E-19) alapján kifejtethető:

$$\begin{aligned}
 \sum_{q=1}^d \sum_{m=0}^{\infty} |\gamma_m| R_{|x||r|}(q+m+d) &= \sum_{q=1}^d \sum_{m=0}^{\infty} |\gamma_m| [\psi'(\sigma_x^2 |\gamma_{q+m}|, \sigma_{xr}) + \psi_0] \\
 &= \sum_{q=1}^d \sum_{m=0}^{\infty} |\gamma_m| \psi_0 + \sum_{q=1}^d \sum_{m=0}^{\infty} |\gamma_m| \psi'(\sigma_x^2 |\gamma_{q+m}|, \sigma_{xr}) \\
 &= d\psi_0 \sum_{m=0}^{\infty} |\gamma_m| + \sum_{q=1}^d \sum_{m=0}^{\infty} |\gamma_m| \psi'(\sigma_x^2 |\gamma_{q+m}|, \sigma_{xr}). \tag{E-21}
 \end{aligned}$$

(E-11) jobb oldala számítható (E-20) felhasználásával:

$$\begin{aligned}
 \sum_{q=0}^{d-1} \sum_{m=0}^{\infty} |\gamma_m| R_{|x||r|}(m+q) &= \sum_{q=0}^{d-1} \sum_{m=0}^{\infty} |\gamma_m| [\psi'(\sigma_x^2 |\gamma_{q+m-d}|, \sigma_{xr}) + \psi_0] \\
 &= \sum_{q=0}^{d-1} \sum_{m=0}^{\infty} |\gamma_m| \psi_0 + \sum_{q=0}^{d-1} \sum_{m=d-q}^{\infty} |\gamma_m| \psi'(\sigma_x^2 |\gamma_{q+m-d}|, \sigma_{xr}). \tag{E-22}
 \end{aligned}$$

Az utolsó szummában m az $m = d - q$ indextől indul, mert $\gamma_{q+m-d} = 0$, ha $m < d - q$, és így $\psi'(\sigma_x^2|\gamma_{q+m-d}|, \sigma_{xr}) = 0$. A $k = m + q - d$ index bevezetésével:

$$\sum_{q=0}^{d-1} \sum_{m=0}^{\infty} |\gamma_m| R_{|x||r|}(m+q) = d\psi_0 \sum_{m=0}^{\infty} |\gamma_m| + \sum_{q=0}^{d-1} \sum_{k=0}^{\infty} |\gamma_{k+d-q}| \psi'(\sigma_x^2|\gamma_k|, \sigma_{xr}). \quad (\text{E-23})$$

Vezessük be a $p = d - q$ indexet. Mivel q a $[0 \dots d - 1]$ tartományt fedi le, így p a $[1 \dots d]$ intervallumon át fut. Az új indexekkel (E-23) átalakítható:

$$\sum_{q=0}^{d-1} \sum_{m=0}^{\infty} |\gamma_m| R_{|x||r|}(m+q) = d\psi_0 \sum_{m=0}^{\infty} |\gamma_m| + \sum_{p=1}^d \sum_{k=0}^{\infty} |\gamma_{k+p}| \psi'(\sigma_x^2|\gamma_k|, \sigma_{xr}). \quad (\text{E-24})$$

————— 3. lépés —————

Végző lépésként megmutatom, hogy (a δ^{LR} egyszerűsítő jelölés alkalmazásával):

$$\delta^{LR} = \left(\sum_{q=0}^{d-1} \sum_{m=0}^{\infty} |\gamma_m| R_{|x||r|}(m+q) - \sum_{q=1}^d \sum_{m=0}^{\infty} |\gamma_m| R_{|x||r|}(q+m+d) \right) \geq 0, \quad (\text{E-25})$$

tehát az (E-11) egyenlet igaz. Vonjuk ki az (E-24) egyenletből az (E-21) egyenletet, amely elemi átalakítások és az indexváltozók egységesítése után a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned} \delta^{LR} &= \sum_{p=1}^d \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\gamma_{k+p}|}{|\gamma_k|} |\gamma_k| \psi'(\sigma_x^2|\gamma_k|, \sigma_{xr}) - \sum_{p=1}^d \sum_{k=0}^{\infty} |\gamma_k| \psi'(\sigma_x^2|\gamma_k|, \sigma_{xr}) \frac{\psi'(\sigma_x^2|\gamma_{p+k}|, \sigma_{xr})}{\psi'(\sigma_x^2|\gamma_k|, \sigma_{xr})} \\ &= \sum_{p=1}^d \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{|\gamma_{k+p}|}{|\gamma_k|} - \frac{\psi'(\sigma_x^2|\gamma_{p+k}|, \sigma_{xr})}{\psi'(\sigma_x^2|\gamma_k|, \sigma_{xr})} \right] \Pi_{k,k}, \end{aligned} \quad (\text{E-26})$$

$$\Pi_{k,k} = |\gamma_k| \psi'(\sigma_x^2|\gamma_k|, \sigma_{xr}) \quad (\text{E-27})$$

Vegyük észre, hogy $\Pi_{k,k} \geq 0$. Amennyiben $|\gamma_k| = 0$, akkor $|\gamma_{k+p}| \psi'(\sigma_x^2|\gamma_k|, \sigma_{xr}) = |\gamma_k| \psi'(\sigma_x^2|\gamma_{p+k}|, \sigma_{xr}) = 0$, tehát az $|\gamma_k|$ és a $\psi'(\sigma_x^2|\gamma_k|, \sigma_{xr})$ függvénnyel való osztás elhagyható az összegből, mert azok a tagok nem befolyásolják az eredményt.

A feltételezések alapján $|\gamma_k|$ monoton csökkenő függvény, tehát: $\{|\gamma_{k+p}| = t_{k,p}|\gamma_k|; t_{k,p} \in [0 \dots 1]\}$. Alkalmazzuk a $t'_{k,p} = \frac{\psi'(\sigma_x^2|\gamma_{p+k}|, \sigma_{xr})}{\psi'(\sigma_x^2|\gamma_k|, \sigma_{xr})}$ jelölést, ekkor az (E-14) egyenlőtlenség miatt:

$$t'_{k,p} = \frac{\psi'(\sigma_x^2|\gamma_{p+k}|, \sigma_{xr})}{\psi'(\sigma_x^2|\gamma_k|, \sigma_{xr})} = \frac{\psi'(\sigma_x^2 t_{k,p} |\gamma_k|, \sigma_{xr})}{\psi'(\sigma_x^2 |\gamma_k|, \sigma_{xr})} \leq \frac{t_{k,p} \psi'(\sigma_x^2 |\gamma_k|, \sigma_{xr})}{\psi'(\sigma_x^2 |\gamma_k|, \sigma_{xr})} = t_{k,p}. \quad (\text{E-28})$$

Folytatva az (E-26) egyenletet:

$$\sum_{p=1}^d \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{|\gamma_{k+p}|}{|\gamma_k|} - \frac{\psi'(\sigma_x^2|\gamma_{p+k}|, \sigma_{xr})}{\psi'(\sigma_x^2|\gamma_k|, \sigma_{xr})} \right] \Pi_{k,k} = \sum_{p=1}^d \sum_{k=0}^{\infty} [t_{k,p} - t'_{k,p}] \Pi_{k,k} \geq 0, \quad (\text{E-29})$$

mivel az (E-28) alapján $t_{k,p} - t'_{k,p} \geq 0$, és $\Pi_{k,k} \geq 0$. (E-29) alapján az (E-24) jobb oldala nagyobb, mint az (E-21) jobb oldala, így (E-11) igaz. ■

F. Állapotátmeneti mátrix normája adatvesztés esetén

F.1. Lemma. Amennyiben $\alpha \in [0 \dots 2]$, akkor

$$\|\langle z_i \rangle - \mathbf{g}K_n\mathbf{c}^T\| = 1; \quad K_n = \{0, 1\}. \quad (\text{F-1})$$

Bizonyítás: Egy tetszőleges \mathbf{Z}_n mátrix normája a következő módon számítható [106]:

$$\|\mathbf{Z}_n\|^2 = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{Z}_n\mathbf{x}\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \mathbf{x}^H \mathbf{Z}_n^H \mathbf{Z}_n \mathbf{x}. \quad (\text{F-2})$$

Vezessük be a $\mathbf{Z}_n = (\langle z_i \rangle - \mathbf{g}K_n\mathbf{c}^T)$ jelölést. (2.16), (2.17) és (2.21) alapján egyszerű behelyettesítéssel igazolható, hogy:

$$\mathbf{g} = \frac{\alpha}{N}\mathbf{z} = \frac{\alpha}{N}\langle z_i \rangle \mathbf{c}. \quad (\text{F-3})$$

A \mathbf{c} vektorokra a (2.21) definíciójuk alapján könnyen belátható, hogy $\mathbf{c}^H\mathbf{c} = \mathbf{c}^T\mathbf{c} = \sum_{i=0}^{N-1} 1 \cdot 1 = N$, így az (F-3) azonosságot is felhasználva:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_n^H \mathbf{Z}_n &= (\langle z_i \rangle - \frac{\alpha}{N}\langle z_i \rangle \mathbf{c}K_n\mathbf{c}^T)^H (\langle z_i \rangle - \frac{\alpha}{N}\langle z_i \rangle \mathbf{c}K_n\mathbf{c}^T) \\ &= (\mathbf{I} - \frac{\alpha}{N}\mathbf{c}K_n\mathbf{c}^T)^H \langle z_i \rangle^H \langle z_i \rangle (\mathbf{I} - \frac{\alpha}{N}\mathbf{c}K_n\mathbf{c}^T) \\ &= \mathbf{I} - 2\frac{\alpha}{N}\mathbf{c}K_n\mathbf{c}^T + (\frac{\alpha}{N})^2 \mathbf{c}K_n\mathbf{c}^T \mathbf{c}K_n\mathbf{c}^T \\ &= \mathbf{I} - \frac{1}{N}(2\alpha - \alpha^2)\mathbf{c}K_n\mathbf{c}^T = \mathbf{I} - f(\alpha)\mathbf{c}K_n\mathbf{c}^T, \end{aligned} \quad (\text{F-4})$$

ahol $f(\alpha) = \frac{1}{N}(2\alpha - \alpha^2)$. $\langle z_i \rangle^H \langle z_i \rangle = \mathbf{I}$, mivel a (2.16) egyenletben adott $\langle z_i \rangle$ egy diagonálmátrix, és a diagonális elemek szorzata: $z_i^* z_i = e^{-j2\pi i f_1} e^{j2\pi i f_1} = 1$. Az $f(\alpha)$ függvény a következő tulajdonsággal rendelkezik:

$$f(\alpha) \geq 0 \text{ ha } 0 \leq \alpha \leq 2. \quad (\text{F-5})$$

A norma az (F-2) és (F-4) összefüggések alapján számítható:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{Z}_n\|^2 &= \max_{\|\mathbf{x}\|=1} [\mathbf{x}^H (\mathbf{I} - f(\alpha)\mathbf{c}K_n\mathbf{c}^T) \mathbf{x}] \\ &= \max_{\|\mathbf{x}\|=1} [\mathbf{x}^H \mathbf{x} - f(\alpha)(\mathbf{x}^H \mathbf{c})K_n(\mathbf{c}^T \mathbf{x})] \\ &= \max_{\|\mathbf{x}\|=1} [1 - f(\alpha)|\mathbf{c}^T \mathbf{x}|^2 K_n]. \end{aligned} \quad (\text{F-6})$$

$\|\mathbf{Z}_n\|^2 = 1$, mivel $K_n = \{1, 0\}$, $|\mathbf{c}^T \mathbf{x}|^2 \geq 0$, valamint (F-5) alapján $f(\alpha) \geq 0$, amennyiben $\alpha \in [0 \dots 2]$. Mivel az $f(\alpha)|\mathbf{c}^T \mathbf{x}|^2 K_n$ szorzat minden tagja nemnegatív értékű, így (F-6) maximuma egy. ■

G. Adatvesztéshez tartozó kritikus értékek becslése

G.1. Lemma. *Egyenletes rezonátorelhelyezkedés és $\alpha < 1$ esetén:*

$$\pi_{\text{cr}} \leq \frac{1}{N-1}, \quad (\text{G-1})$$

$$\Gamma_{\text{cr}} \leq \frac{1}{N}, \quad (\text{G-2})$$

$$L_{\text{cr}} \geq N. \quad (\text{G-3})$$

Bizonyítás: Egyenletes rezonátorelhelyezkedés esetén $f_1 = \frac{1}{N}$. Ebben az esetben az állapothibára vonatkoztatott $(\langle z_i \rangle - \mathbf{g}\mathbf{c}^T)$ állapotátmeneti mátrix sajátértékei egyenletesen vannak elosztva a komplex számsíkon egy $|\lambda|$ sugarú körön, és $\lambda_i = |\lambda|z_i$ alakúak, ahol [67]:

$$|\lambda| = (1 - \alpha)^{1/N} = \bar{\lambda}. \quad (\text{G-4})$$

Mátrixalakban felírva:

$$\mathbf{\Lambda} = \langle \lambda_i \rangle = |\lambda| \langle z_i \rangle = (1 - \alpha)^{1/N} \langle z_i \rangle. \quad (\text{G-5})$$

A $\mathbf{\Lambda}$ mátrix inverze a $\mathbf{\Lambda}^{-1} = |\lambda|^{-1} \langle z_i^* \rangle$ diagonálmátrix, mivel a $\mathbf{\Lambda}$ diagonálmátrixszal összeszorozva a diagonálemek egyet adnak: $|\lambda|^{-1} z_i^* |\lambda| z_i = z_i^* z_i = e^{-j2\pi f_i} e^{j2\pi f_i} = 1$. A $\mathbf{\Lambda}^{-1}$ mátrix normája a $(\mathbf{\Lambda}^{-1})^H \mathbf{\Lambda}^{-1}$ szorzat legnagyobb sajátértékének a gyöke:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{\Lambda}^{-1}\| &= \sqrt{\lambda_{\max} \left((\mathbf{\Lambda}^{-1})^H \mathbf{\Lambda}^{-1} \right)} = \sqrt{\lambda_{\max} (|\lambda|^{-1} \langle z_i \rangle |\lambda|^{-1} \langle z_i^* \rangle)} = \\ &= \sqrt{|\lambda|^{-2} \lambda_{\max}(\mathbf{I})} = |\lambda|^{-1} = (1 - \alpha)^{\frac{1}{N}}, \end{aligned} \quad (\text{G-6})$$

ahol kihasználtuk, hogy $z_i^* z_i = e^{-j2\pi f_i} e^{j2\pi f_i} = 1$, és az \mathbf{I} egységmátrix sajátértékei egységnyiek.

Szorozzuk meg (5.16) mindkét oldalát jobbról a \mathbf{c} vektorral, és helyettesítsük be az (F-3) egyenletet:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{c} &= \langle z_i \rangle \mathbf{c} - \mathbf{g}\mathbf{c}^T \mathbf{c} = \langle z_i \rangle \mathbf{c} - \frac{\alpha}{N} \langle z_i \rangle \mathbf{c}\mathbf{c}^T \mathbf{c} \\ \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{c} &= \langle z_i \rangle \mathbf{c} (1 - \alpha), \end{aligned} \quad (\text{G-7})$$

ahol kihasználtuk, hogy $\mathbf{c}^T \mathbf{c} = N$, mivel a \mathbf{c} vektor minden eleme 1.

Szorozzuk meg (G-7) mindkét oldalát balról a $\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{U}^{-1}$ mátrixszal, és szűrjük be az egységmátrixnak megfelelő $\mathbf{I} = \mathbf{U}\mathbf{U}^{-1}$ szorzatot a jobb oldalra a $\langle z_i \rangle \mathbf{c}$ szorzat közé:

$$\mathbf{U}^{-1}\mathbf{c} = \mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{U}^{-1} \langle z_i \rangle \mathbf{U}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{c} (1 - \alpha). \quad (\text{G-8})$$

Vegyük a (G-8) mindkét oldalának a normáját. Az $\|\mathbf{A}\mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|$ egyenlőtlenséget kihasználva:

$$\|\mathbf{U}^{-1}\mathbf{c}\| \leq \|\mathbf{\Lambda}^{-1}\| \|\mathbf{U}^{-1} \langle z_i \rangle \mathbf{U}\| \|\mathbf{U}^{-1}\mathbf{c}\| (1 - \alpha). \quad (\text{G-9})$$

Helyettesítsük be a (G-6) egyenletet $\|\mathbf{\Lambda}^{-1}\|$ helyére, és osszuk le mindkét oldalt a $\|\mathbf{U}^{-1}\mathbf{c}\|$ értékkel:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{U}^{-1}\langle z_i \rangle \mathbf{U}\| &\geq \frac{1}{\|\mathbf{\Lambda}^{-1}\|(1-\alpha)} = \frac{(1-\alpha)^{\frac{1}{N}}}{1-\alpha} \\ \|\mathbf{U}^{-1}\langle z_i \rangle \mathbf{U}\| &\geq (1-\alpha)^{\frac{1-N}{N}}.\end{aligned}\tag{G-10}$$

Kihasználva, hogy $\|\mathbf{U}^{-1}\langle z_i \rangle \mathbf{U}\| \leq \|\mathbf{U}^{-1}\| \|\langle z_i \rangle\| \|\mathbf{U}\| = \|\mathbf{U}^{-1}\| \|\mathbf{U}\|$, mivel $\|\langle z_i \rangle\| = 1$, így ζ értéke az (5.17) definíciót felhasználva:

$$\zeta = \|\mathbf{U}^{-1}\| \|\mathbf{U}\| \geq \|\mathbf{U}^{-1}\langle z_i \rangle \mathbf{U}\| \geq (1-\alpha)^{\frac{1-N}{N}}\tag{G-11}$$

A (G-4) és (G-11) egyenleteket az (5.20) kifejezésbe helyettesítve:

$$\pi_{\text{cr}} = -\frac{\log \bar{\lambda}}{\log \zeta} \leq -\frac{\log [(1-\alpha)^{1/N}]}{\log [(1-\alpha)^{\frac{1-N}{N}}]} = -\frac{\frac{1}{N} \log (1-\alpha)}{\frac{1-N}{N} \log (1-\alpha)} = \frac{1}{N-1}.\tag{G-12}$$

(G-12) alapján az (5.31) és (5.34) definíciókat felhasználva következik (G-2) és (G-3). ■