Kétdimenziós rendszerek rezgésének numerikus modellezése

Út a cintányér fizikai alapú szintézise felé…

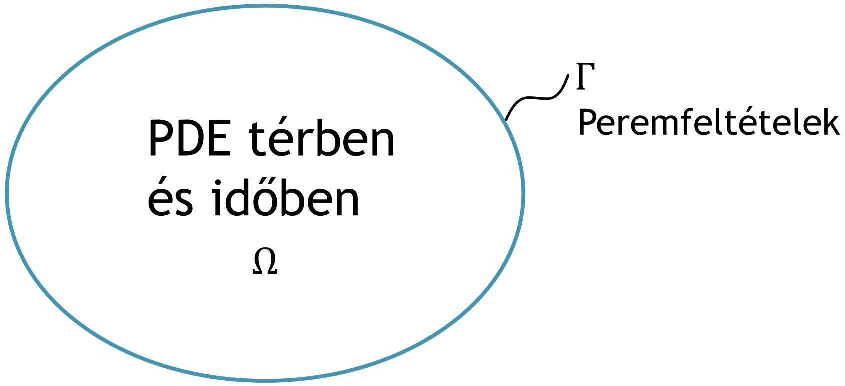
Szegszárdy Máté, MSc Önálló Laboratórium 2

Konzulens: Dr. Bank Balázs

Hangszerek fizikája

- Rezgést és hullámterjedést leíró parciális differenciálegyenletek (1D, 2D, 3D)
- Általában nemlineáris viselkedés eredményezi a megszokott hangzást
- Egy lehetséges szintézis végeselem módszerrel
  - Sok más van: véges differencia, waveguide, modális megoldások…

A peremérték-feladat



<u>Peremértékfeladat</u> = PDE Ω-ban + Peremfeltételek Γ-n + kezdeti feltételek

Egyértelműen megoldható!

A végeselem módszer: 1D hullámegyenlet

- Húr, fúvós hangszerek…

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

$$u(x)\text{: } kitérés, nyomás$$

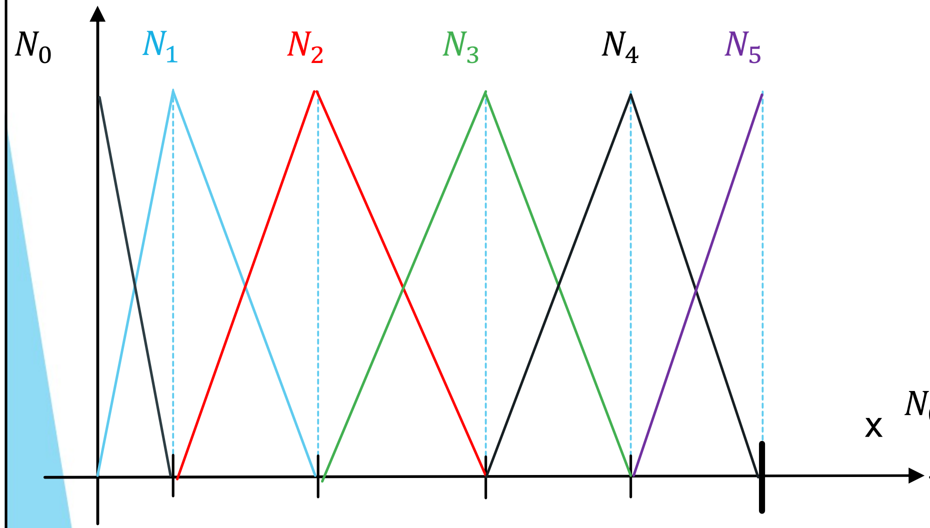
- Vizsgált Ω tartomány $x = [0, L]$
- Peremfeltételek például: $u(x = 0) = u(x = L) = 0$

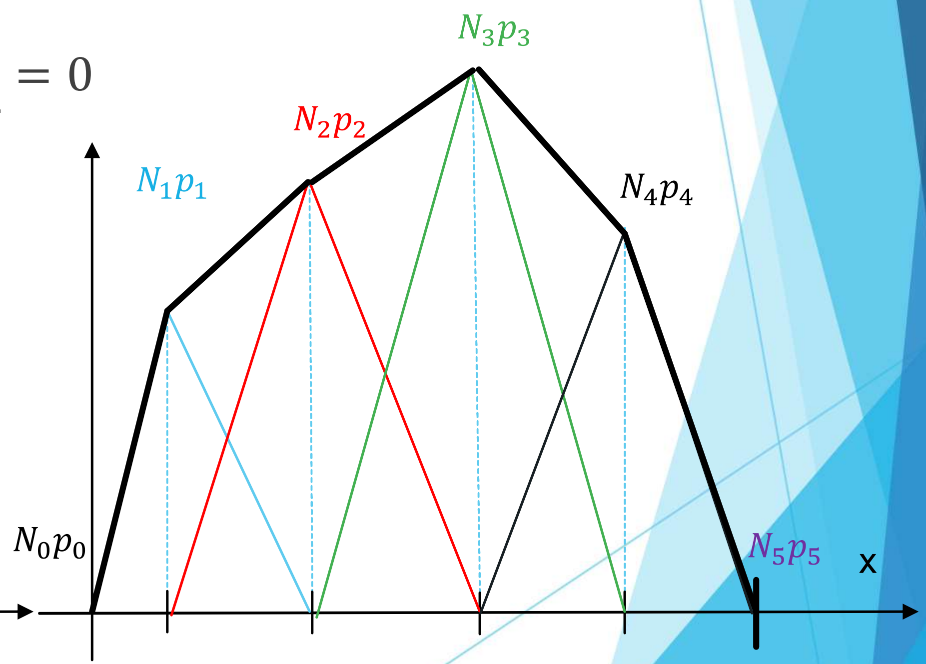
A végeselem módszer: 1D hullámegyenlet

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad + \quad u \cong \sum_{i=1}^{N} N_i(x) p_i$$

Hibaminimalizálás

$$\boldsymbol{K}\underline{p} - \frac{1}{c^2}\boldsymbol{M}\ddot{\underline{p}} = 0$$

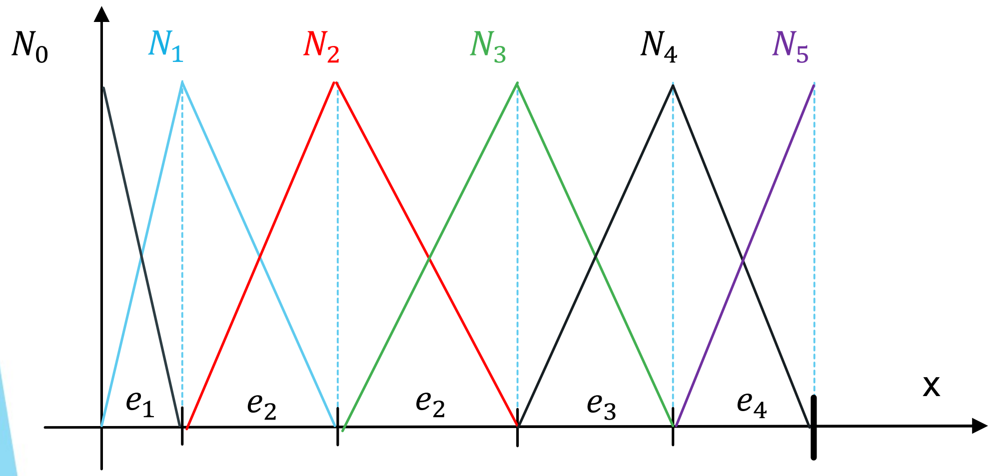




A végeselem módszer: 1D hullámegyenlet

- A bázisfüggvényeket mi választjuk meg!

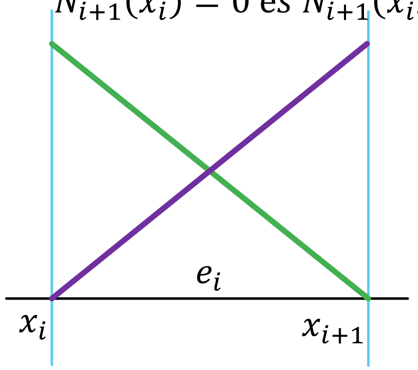
Válasszuk meg valamilyen szabály szerint:



Szabadsági fokok

- $u(x_i)$
- $u(x_{i+1})$

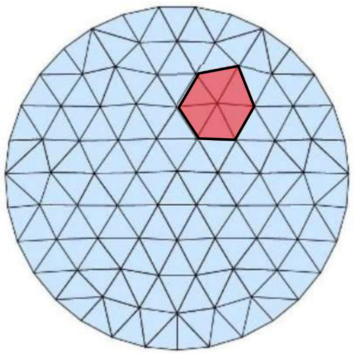
$N_i(x_i) = 1$ és $N_i(x_{i+1}) = 0$
$N_{i+1}(x_i) = 0$ és $N_{i+1}(x_{i+1}) = 1$

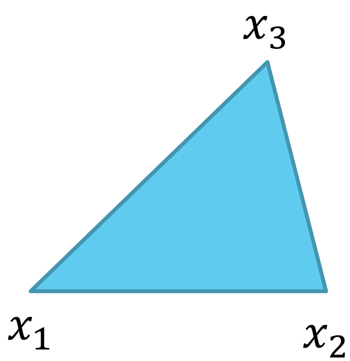


A végeselem módszer: 2D hullámegyenlet

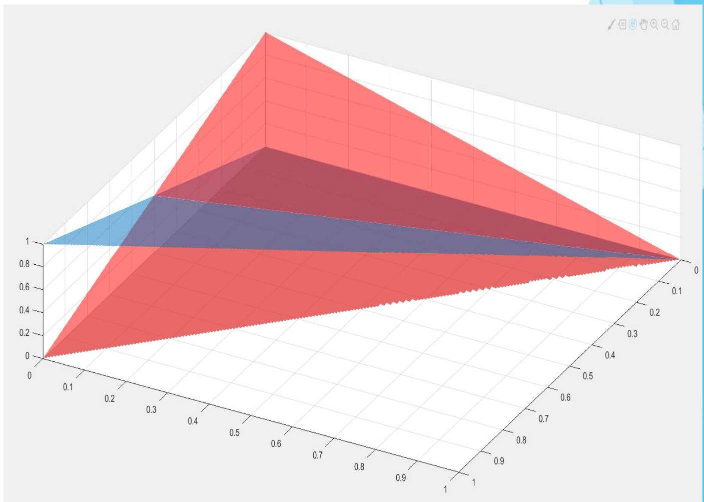
- Membrán (dob) egyenlete

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$





Szabadsági fokok:
$u(x_1)$, $u(x_2)$, $u(x_3)$

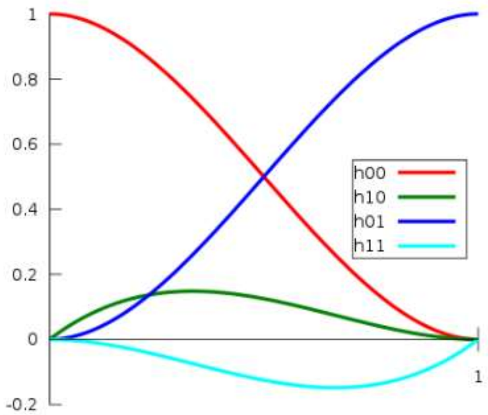


Magasabb rendű egyenletek 1D

- Rúd egyenlete

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = -\kappa^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

- Bonyolultabb peremfeltételek
- Olyan bázisfüggvények kellenek, melyek első deriváltja még folytonos
- Szabályszerűen generálható



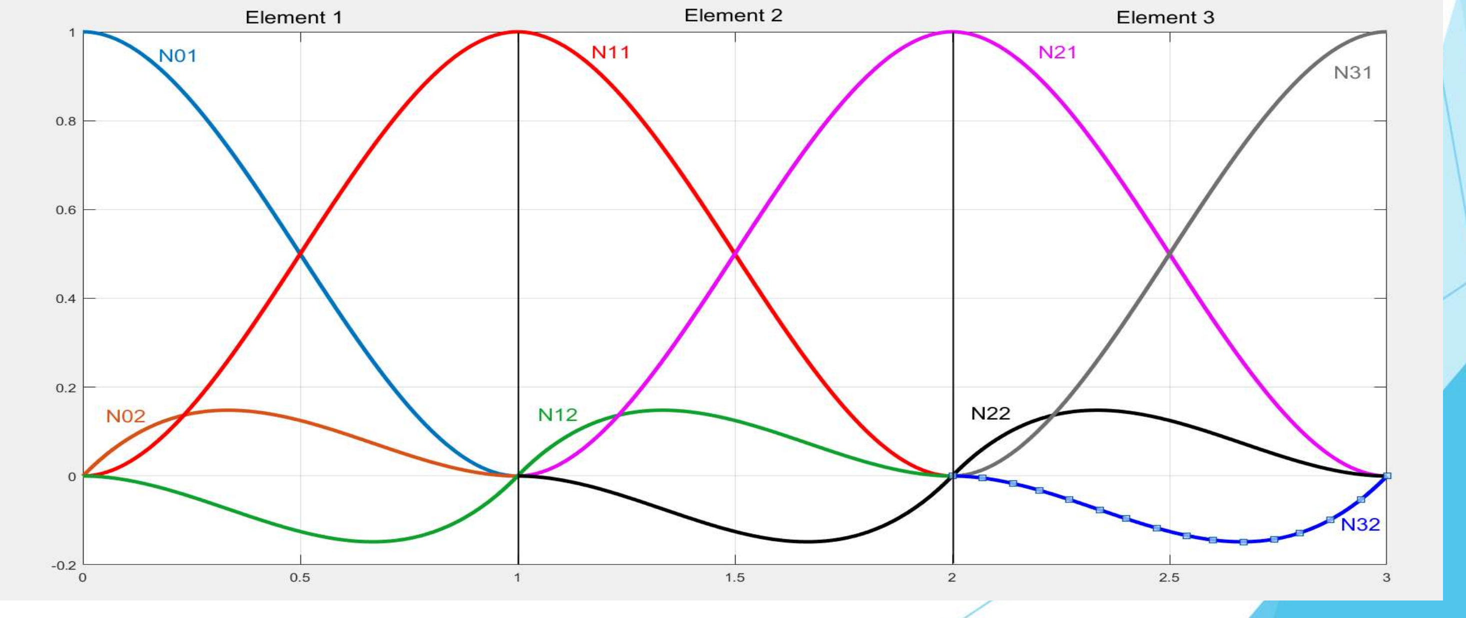
Szabadsági fokok
- u(0) --> h00
- u’(0) --> h10
- u(1) --> h01
- u’(1) --> h11

Magasabb rendű egyenletek 1D

- Rúd egyenlete

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = -\kappa^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

- Bonyolultabb peremfeltételek
- Olyan bázisfüggvények kellenek, melyek első deriváltja még folytonos
- Szabályszerűen generálható



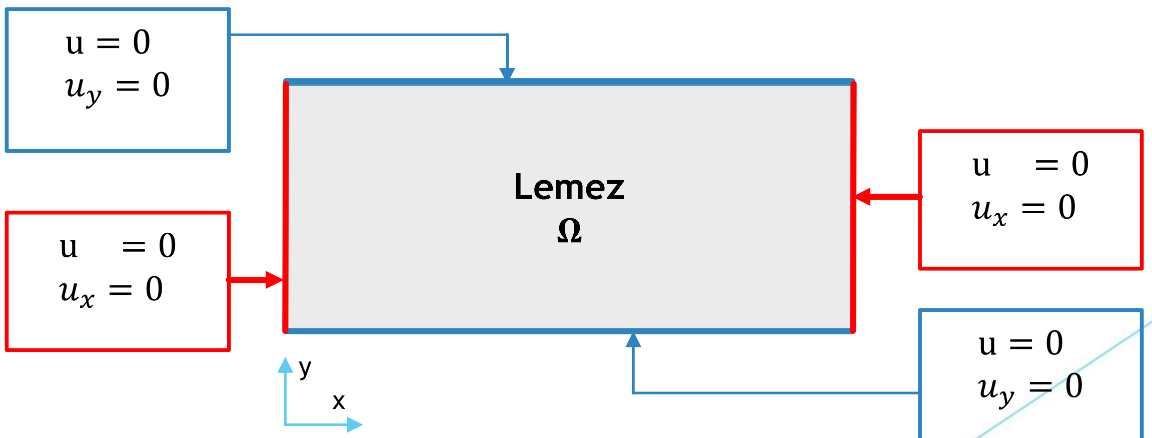
Magasabb rendű egyenletek 2D

- Lemez egyenlete

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = -\kappa^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

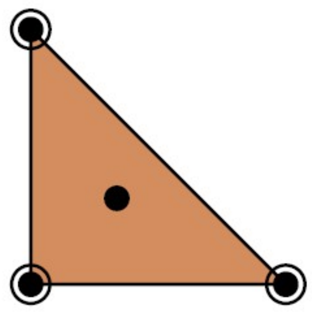
- Peremfeltételek bonyolultak, például a szélein rögzített, téglalap alakú lemez:

$u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0$ a peremen.

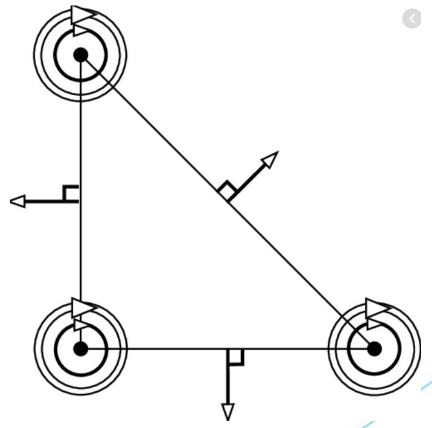


Magasabb rendű egyenletek 2D

- Összetettebb bázisfüggvények
- Hermite bázisfüggvények
  - 10 szabadsági fok:
  - u ; u_x ; u_y



- Argyris bázisfüggvények
  - 21 szabadsági fok



- Határ a csillagos ég…

Összefoglalás, kitenkintés

- Munkám során
  - Megismerkedtem a végeselem módszer elméletével és implementációs kérdéseivel is
- További munka: cintányér
  - Nemlineáris lemez
  - Eddig nem sikerült jó hangzású szintézist elérni

Köszönöm a figyelmet!

Szimulációs példa: membrán (dob)