



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Villamosmérnöki és Informatikai Kar

Méréstechnika és Információs Rendszerek Tanszék

Cintányérhang fizikai alapú szintézise végeelem módszer alkalmazásával

DIPLOMATERV

Készítette

Szegszárdy Máté

Konzulens

Dr. Bank Balázs

2020. december 16.



DIPLOMATERV-FELADAT

Szegszárdy Máté (LAPON6)
szigorló villamosmérnök hallgató részére

Cintányérhang fizikai alapú szintézise végeselem módszer alkalmazásával

Az akusztikus dobfelszerelés hátránya a nagy mérete, súlya, és a nagy hangereje, emiatt az otthoni gyakorlás csak kevés dobos privilégiuma. Ezen problémák kiküszöbölésére jelentek meg az elektronikus dobok: a kereskedelemben kapható dobszintetizátorok előre felvett hangminták visszajátszásán alapulnak, és bár gyakorlásra többnyire megfelelőek, a dobok, cintányérok hangji változatosságát nem képesek visszaadni. Különösen igaz ez a cintányérok esetére, melyek hangja a megütés pontjától és jellegétől függően változik, ill. a rezgés nemlineáris jellege miatt függ a cintányér előző állapotától (korábban megütött hangoktól) is.

A hangminták visszajátszása helyett húros és fúvós hangszerek esetén több hatékony, ugyanakkor jó hangminőséget biztosító fizikai modellezési technika is rendelkezésünkre áll. Kétdimenziós rendszerek esetén azonban, mint amilyenek pl. a membránok és a lemezek, nincsenek még olyan bevált módszerek, amelyek jó hangminőséget biztosítanának elfogadható számításigény mellett.

A hallgató feladata a cintányérhang modellezésére jól használható lemezmodell megalkotása a végeselem módszer alkalmazásával. Mivel a távlati cél valós idejű hangszintézis megvalósítása, az időtartománybeli (időlépéses) változat alkalmazása szükséges. A hallgató munkájának a következőkre kell kiterjednie:

- Ismerje meg a végeselem módszert, és tekintse át az egy- két-, és háromdimenziós hullámegyenlet modellezésének lehetőségeit!
- Matlab segítségével valósítsa meg a négyzetes és a kör alakú lineáris lemez frekvenciatartománybeli végeselem modelljét, és a modell által számított módusfrekvenciákat vesse össze az irodalom adataival!
- A végeselem modelleket hozza időlépéses alakba, és végezzen időtartománybeli szimulációkat!
- A cintányért modellező lemez gerjesztését (dobverővel történő megütés) fizikai modell segítségével vegye figyelembe, és a gerjesztésmodellt integrálja az időlépéses végeselem szimulációba!
- A cintányér sugárzásának hatását kis számításigényű (pl. pontforrásokat alkalmazó) modellel vegye figyelembe!
- Térképezze fel a cintányérlemez nemlineáris modellezésének lehetőségeit, és amennyiben lehetséges, építse be az időlépéses végeselem modellbe!

Tanszéki konzulens: Dr. Bank Balázs, docens

Budapest, 2020. március 14.

.....
Dr. Dabóczy Tamás
tanszékvezető

Tartalomjegyzék

Kivonat	5
Abstract	6
Bevezető	7
1. A hangszintézis módszereinek áttekintése	10
1.1. Absztrakt szintézismódszerek	10
1.2. A fizikai alapú hangszintézis módszerei	13
1.2.1. Modális szintézis	14
1.2.2. Digitális hullámvezető	16
1.2.3. Transzformációs módszer	17
1.2.4. Numerikus módszerek	18
2. A hullámegyenlet	20
2.1. Jelölések és azonosságok	20
2.2. A hullámegyenlet peremértékfeladata	23
2.3. Energiamérleg és veszteségek	25
2.4. Modális megoldás	27
2.5. A membrán modális dekompozíciója	29
2.6. Szabadtéri megoldás	33
3. Bevezetés a végeselem módszer alkalmazásába	34
3.1. Hibaminimalizálás - Súlyozott residuum elv	34
3.2. Gyenge alak	37
3.3. Diszkretizáció	39
3.4. A végeselem bázisfüggvényei	41
3.5. A Sobolev tér	46
3.6. A Dirichlet típusú peremfeltételek érvényesítése	48
3.7. A referenciaelem	51
3.8. Megoldás időtartományban	56
3.8.1. Stabilitás	57
3.9. A húr végeselem modellje	59
3.10. A membrán végeselem modellje	62

4. A Kirchhoff féle lineáris lemez végelem modellezése	68
4.1. Anyagparaméterek és fizikai változók	68
4.2. A Kirchhoff lemez egyenlete	70
4.3. Peremfeltételek	72
4.4. Gyenge alak és energiamérleg	73
4.5. Csillapítás	76
4.6. Diszkretizáció	77
4.6.1. Konvergens bázisfüggvény-rendszerek	78
4.6.2. Asszemblálás	81
4.7. A peremfeltételek érvényesítése	84
4.8. Implementáció	85
4.9. Eredmények	89
4.9.1. A négyzet alakú lemez	89
4.9.2. A kör alakú lemez	92
5. A gerjesztés és a hangsugárzás modellezése	95
5.1. A gerjesztés egyszerű tömeg-rugó modellje	95
5.2. Hangsugárzás modellezése	100
6. A von Kármán nemlineáris lemez végelem modellezése	105
6.1. A von Kármán egyenletek	105
6.2. Energiamérleg és peremfeltételek	107
6.3. Végelem modell	108
6.4. Diszkretizálás időtartományban	112
6.5. A modell további pontosításának lehetőségei	114
Összefoglalás és kitekintés	116
Irodalomjegyzék	121
Függelék	122
F.1. A peremértékfeladat egyértelműsége	122
F.2. Az explicit véges differencia módszer stabilitása	123
F.3. Az \mathbf{E} kifejtése	126

HALLGATÓI NYILATKOZAT

Alulírott *Szegszárdy Máté*, szigorló hallgató kijelentem, hogy ezt a diplomatervet meg nem engedett segítség nélkül, saját magam készítettem, csak a megadott forrásokat (szakirodalom, eszközök stb.) használtam fel. Minden olyan részt, melyet szó szerint, vagy azonos értelemben, de átfogalmazva más forrásból átvettem, egyértelműen, a forrás megadásával megjelöltem.

Hozzájárulok, hogy a jelen munkám alapadatait (szerző(k), cím, angol és magyar nyelvű tartalmi kivonat, készítés éve, konzulens(ek) neve) a BME VIK nyilvánosan hozzáférhető elektronikus formában, a munka teljes szövegét pedig az egyetem belső hálózatán keresztül (vagy autentikált felhasználók számára) közzétegye. Kijelentem, hogy a benyújtott munka és annak elektronikus verziója megegyezik. Dékáni engedéllyel titkosított diplomatervek esetén a dolgozat szövege csak 3 év eltelte után válik hozzáférhetővé.

Budapest, 2020. december 16.

Szegszárdy Máté
hallgató

Kivonat

A számítástechnika fejlődésével a fizikai alapú hangszintézis egyre nagyobb népszerűségnek örvend. Célja, hogy a hangszer fizikájából olyan diszkrét idejű rendszert vezessen le, mely élethűen visszaadja jellegzetes tulajdonságait. Az irodalom jelen állása szerint még nem létezik kellemesen hallgatható cintányérhang-szintézis, ugyanakkor a rendelkezésre álló hangminták mindenképpen biztatóak: a hangszer jellegzetes és változatos tulajdonságait jól reprodukálják. Az összhangzás azonban még kellemetlen, gépies.

A cintányér elsöre egyszerűbb hangszernek tűnik, mint a például zongora vagy a hegedű, azonban valóságghű modellezése roppant nehéz feladat. Hangzása bonyolult, nemlineáris jelenségeken alapul, ezért elkerülhetetlen valamilyen numerikus módszer használata. Az irodalomban eddig véges differenciák módszerével, illetve modális szintézissel próbálkoztak. A végeelem módszert (közvetlenül hangszintézis céljából) még nem alkalmazták, ugyanakkor a modális megoldások egy része éppen végeelem módszerrel meghatározott módusalakokra épül. Jelen dolgozatban kísérletet teszek a cintányér hangjának fizikai alapú szintézisére végeelem módszerrel. Ehhez először a hullámegyenlet példáján keresztül bemutatom a végeelem módszer elméleti alapjait és implementációját. Az időtartományi megoldáshoz a véges differenciák módszerét használom, és vizsgálom annak stabilitását is. Ezt követően bemutatom a lineáris Kirchhoff lemez végeelem modellezését a Morley és Argyris elemek felhasználásával. Hatékony és az irodalomhoz képest általánosabb algoritmusokat adok a globális egyenletrendszer mátrixainak felírására, végül összehasonlítom a numerikusan kapott módusfrekvenciákat az irodalmi adatokkal. A lemez gerjesztését egy egyszerű, nemlineáris tömeg-rugó elrendezéssel modellezem, és a hangsugárzásra egy minimális számítási igényű, pontforrásokat alkalmazó módszert mutatok be törtrészkesleltető szűrők alkalmazásával.

A lineáris lemezmodellt kiterjesztem a nemlineáris von Kármán egyenletekre is, és bemutatom annak egy időlépéses megoldását. Röviden összegzem a modell továbbfejlesztésének lehetőségeit: a görbület és az anyaginhomogenitás modellezését.

Abstract

Due to the rapid evolution in computational technology, physics-based sound synthesis is becoming more and more popular. It aims to develop a discrete-time system based on the instrument's physics, that can reproduce the characteristic sounds of the instrument. The state of the art on the physics-based sound synthesis of cymbals is still far away from industrial applications, however, based on the available sound samples the progress is encouraging: the various sound effects of cymbals (like pitch glides and crashes) can be sufficiently reproduced. However, the overall sound is still heavily artificial.

Though the cymbal seems to be a simpler instrument than eg., the piano or the violin, simulating it properly is a difficult task. The characteristic sound of cymbals is based on strong nonlinear effects thus numerical methods are inevitable. One can find finite difference methods and modal approaches in the literature. The finite element method, with the aim of sound synthesis, has not been directly applied, however, some of the modal approaches are based on finite element modal solutions of the linear problem. In this Thesis, the finite element method is applied to the nonlinear vibration problem to generate sound. To begin with, the finite element theory is presented and applied to the wave equation. The time-domain solution is generated with the finite difference method, and its stability is analyzed. In the next step, the finite element discretization of the Kirchhoff linear plate is presented using the Morley and the Argyris elements. Efficient and general algorithms are provided for the assembly of the global matrices. The numerically computed modal frequencies are compared against the literature. Besides, a simple, nonlinear mass-spring network is used to excite the plate and an efficient sound radiation model is also presented with point sources and fractional delay filters.

Finally, the linear finite element model is extended to the nonlinear von Kármán plate model with time-stepping methods. In the end, possibilities of model refinement are shortly discussed.

Bevezető

Bármilyen hangszeren megtanulni komoly kihívást és elköteleződést kíván. Több évnyi gyakorlás és gyakran sok kudarc után léphet valaki előadóművészi vagy zenekari pályára. Éppen ezért kevés zenész kiváltsága, hogy 1-2 hangszernél többet tud profin, virtuózan megszólaltatni, vagy éppen egy hangszerarzenált megvásárolni. A szintetizátorok megjelenésével lehetőség nyílt akár több száz virtuális hangszer „megszólaltatására” pusztán a zongorajáték ismeretével.

Bizonyos hangszerek esetében a „sok évnyi gyakorlás” nem is olyan könnyedén kivitelezhető. A dobok, cintányérok mellett a harsány fúvós hangszerek otthoni gyakorlására nem mindenkinek van lehetősége. Lakóhelytől függően a környezet számára zavaró lehet a gyakori „zaj”, és nem várható el sem a szomszédoktól sem a családtól, hogy ezt tartósan elviselje. De miért is vegye el ez bárkitől a lehetőséget, hogy a zene világában elmélyedjen? Számukra megfelelő alternatívát biztosíthatnak a szintetizátorok. Különösen dobok esetében terjedt el azok kicsi, jól hordozható, digitális szintézisen alapuló változata. Egész egyszerűen fejhallgató, vagy kis teljesítményű hangszóró segítségével adott a határtalan gyakorlás lehetősége. Sőt számos zenekar éppen ezen előnye miatt már a digitális dobot viszi a stúdióba vagy akár koncertre is. A virtuális dobok hangzása igen jó, és bár a valódi hangszert nem helyettesítik 100%-osan, a különbséget csak egy profi játékos veszi észre.

Más a helyzet sajnos a cintányérok esetében. Léteznek ugyan digitális cintányérok, de sokan mégis mellőzik használatukat, mert nem adják vissza azt a hangzást, melyet a „fém” hangszer biztosít. A legtöbb digitális cintányér előre felvett minták visszajátszásán alapul, így alaposan korlátozza a dobos művészi szabadságát: az ütés ereje, helye, jellege jelentősen befolyásolja a hangzást. Az ütés erősségének mérése még csak-csak kivitelezhető, de az ütés helyének meghatározása már nehezebben - pedig óriási jelentősége van a hangzás kialakításában. És ez még csak a kezdet: másképp szól a cintányér egy puha, és másképp egy kemény ütővel. Másképp szól, ha gyorsan ütjük meg többször egymás után, különböző vagy éppen azonos helyeken.

Számos hangszer esetében kiderül, hogy a szintetizált hang nem olyan jó, hogy a profi zenében is használni lehessen. A szintetizált hangszerek nem képesek visszaadni sem a „kézzel fogható” zenészerszám hangzását, sem az azt profin kezelő zenész játékát. Előre felvett hangmintákat játszanak le, ezért a hangmagasság változtatásán kívül nagyon nincs másra lehetőség. A fizikai alapú szintézis egy alapjaiban más megközelítést alkalmaz. A

hangszer fizikájából indul ki, annak fizikai törvényeiből, egyenleteiből. Ha képesek vagyunk a hangszer fizikáját megérteni, és rájönni különleges hangzásának fizikai eredetére, akkor talán lehetőség adódik olyan szintézisre, melyet a zenész korlátozások nélkül használhat.

Rengeteg hangszer fizikai alapú szintézisére találhatunk példát, köztük a zongorára [4] a klarinétra, a szaxofonra, a hegedűre [39], és még sorolhatnánk. Cintányér fizikai alapú szintézisének tekintetében kicsit szűkösebb az irodalom. Bilbao [6] véges differenciák módszerével próbálkozott (és ezzel jelen dolgozat elkészülését motiválta), Ducceschi és Touzé pedig modális megközelítést alkalmazott [12, 13, 30].

A cintányér elsöre elég egyszerű hangszernek tűnik, például egy zongorához vagy szaxofonhoz képest, azonban élethűen modellezni rendkívül nehéz feladat. Nem egyszerűsíthetjük a modell bizonyos részeit egydimenziós rendszerekkel (mint például a zongora esetében a húrt vagy a szaxofon esetében légoszlopot), és nem helyettesíthetjük a modell egyes részeit méréseken alapuló átviteli függvényekkel. Mindenképpen a teljes, kétdimenziós rezgést kell modellezni, mely (a lemez merevsége miatt) nem is egy „szokásos” hullámjelenség. Ráadásul a rezgés erős nemlineáris jelenségeken alapul, melyek modellezése kulcsfontosságú a szintézis során. A megfelelő hangzáshoz pedig a cintányér enyhe görbületét és anyagának inhomogenitását is figyelembe kell venni.

A rendelkezésre álló hangminták alapján szubjektív véleményem, hogy a jelenleg létező fizikai alapú cintányér-szintézisek (nagy sajnálatomra) nem hallgathatók különösebb élvezettel. Azonban egy valamit biztosan állíthatok: a cintányér hangjának jellegzetes tulajdonságai hallhatóak, a fizikai modell nagy eséllyel alkalmas lehet jó minőségű cintányér-szintetizátorok készítésére.

A Bilbao által bemutatott véges differencia módszer sajnálatos módon a numerikus közelítés miatt hallható csorbát szenved - ahogy erre a szerző is felhívja a figyelmet. A probléma forrása a véges differenciák módszerének jellegzetes hibája a numerikus diszperzió. Ennek hatására a módusfrekvenciák elhangolódnak, mindemellett a nagy mintavételi frekvencia ellenére az eredmény erősen sávkorlátozott lehet. A cintányér körszimmetriája tovább ront a helyzeten: a numerikus diszperzió polárkoordináta-rendszerben még erősebb [6].

Annak érdekében, hogy ezt a problémát kiküszöböljem a végeselem módszer alkalmazásához fordultam, melyet éppen úgy fejlesztettek ki, hogy bármilyen geometriát képes legyen tetszőleges pontossággal modellezni. Mindemelett hatékonyan alkalmazható anyaginhomogenitás modellezésére, mely kulcsfontosságú a cintányér szintéziséhez. Jelen dolgozatban kísérletet teszek a cintányér fizikai alapú szintézisére végeselem módszerrel. Jelenlegi tudomásom szerint a módszert direkt módon még nem alkalmazták cintányér hangjának szintézisre, ugyanakkor a rezgést leíró egyenletet részletes analízisére már igen [37].

A dolgozat felépítése

Az 1. fejezetben röviden összefoglalom a leggyakrabban használt szintézismódszereket, beleértve a fizikai alapú szintézis lehetőségeit is.

A cintányér szintézisének legfontosabb eleme a nemlineáris lemez numerikus szimulációja. Ezt előkészítendő, a 2. fejezetben a hullámgyenlet példáján keresztül bemutatom a hullámjelenségeket leíró parciális differenciálegyenletek legfontosabb tulajdonságait: peremfeltételeket, kezdeti feltételeket, energiaviszonyokat és modális megoldásokat. A 3. fejezetben bevezetem az Olvasót a végelem módszer alkalmazásába: elmélettel és implementációval együtt. A 4. fejezet képezi a dolgozat legfontosabb részét, a Kirchhoff féle lineáris lemez végelem modellezését.

Némi kitérő következik: az 5. fejezetben egyszerű és minimális számításgényű módszereket mutatok a gerjesztés és a hangsugárzás modellezésére. Ezeket csatolom a lineáris lemez végelem modelljéhez. Végül a 6. fejezetben a von Kármán nemlineáris lemez végelem modellezésének lehetőségeit ismertetem. A dolgozatot az összefoglalás és a továbbfejlesztési lehetőségek ismertetése zárja.

1. fejezet

A hangszintézis módszereinek áttekintése

A számítástechnika és elektronika rohamos fejlődésének a zeneipar is hasznát vette. A 60-as és 70-es évek környékén tömegesen terjedtek el a zenei szintetizátorok, melyek az analóg elektronika vívmányain alapultak. A 80-as és 90-es évek környékén, a számítástechnika ugrásszerű fejlődésének köszönhetően megjelentek a digitális jelfeldolgozáson alapuló szintetizátorok is. A nagysebességű jelfeldolgozó processzorok lehetőséget biztosítanak rendkívül változatos hangzás kialakítására. Mindemellett könnyedén testreszabhatók, kis méretűek, és nem hangolódnak el a környezeti hőmérséklet megváltozásának hatására [33].

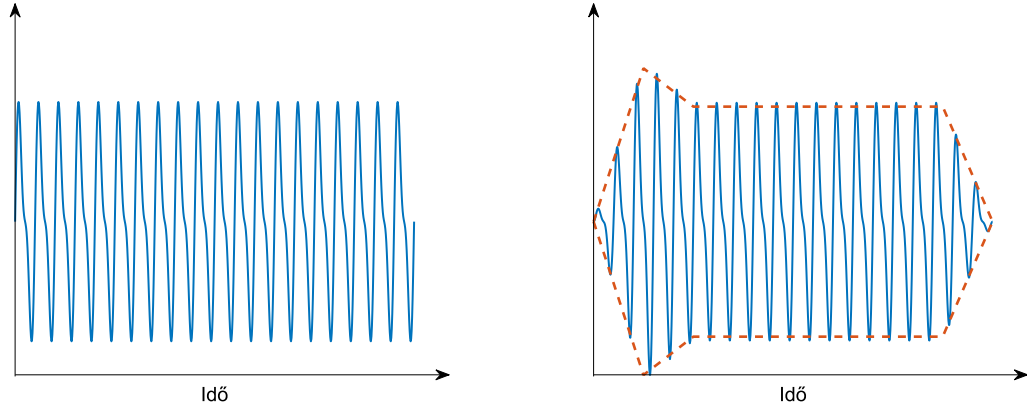
Ezen előnyös tulajdonságaival a digitális szintézis szépen lassan háttérbe szorította az analóg szintézist, így napjainkban kapható szintetizátorok túlnyomó többsége már mikroprocesszoros jelfeldolgozáson alapul. A számítástechnika fejlődése pedig nem áll meg, így egyre bonyolultabb szintézismódszerek jelennek meg, és kapnak teret a szintetizátorok világában.

Mielőtt rátérnénk a dolgozat fő témájára érdemes röviden, a teljesség igénye nélkül megismerkedni a legelterjedtebb szintézismódszerekkel [6, 33].

1.1. Absztrakt szintézismódszerek

Az absztrakt módszerekkel kezdődött a hangszintézis története. Egyszerű módszerekről van szó, melyek akár analóg, akár digitális módon is megvalósíthatóak.

A szintézismódszerek egy része azon a megfigyelésen alapul, hogy az emberi fül által „egy azonos hangnak” halott hullámforma időbeli, periodikus függvénnyel írható le. A periodikus jelek, a Fourier sorfejtés szerint olyan harmonikus (szinuszos) hullámformák lineáris kombinációja, melyek frekvenciája az alapfrekvencia (alapharmonikus) egész számú többszöröse.



1.1. ábra. Az ADSR burkológörbe.

Additív szintézis

Az additív szintézis során különböző frekvenciájú, amplitúdójú és kezdőfázisú harmonikus függvényeket adunk össze közvetlenül:

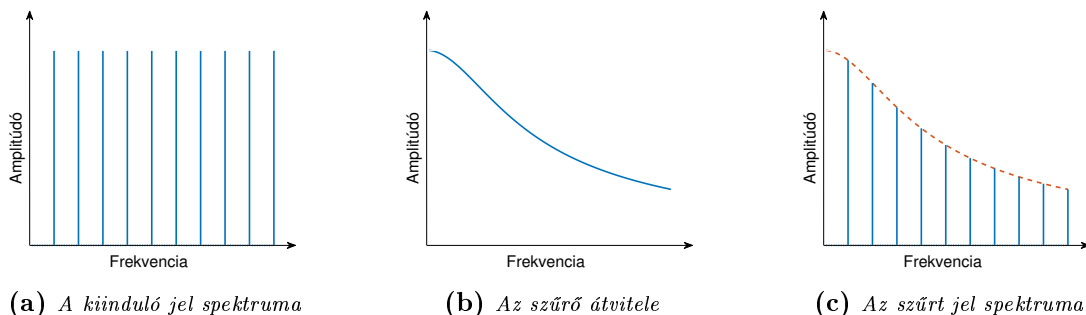
$$u(t) = \sum_{i=0}^N A_i \cos(2\pi f_i t + \varphi_i) \quad (1.1)$$

Az additív szintézis eredményeképp periodikus jelet kapunk, ha $i \neq 0$ -ra $f_i = if_0$. Az emberi fül által halott hangmagasságot a frekvenciakomponensek közötti különbség határozza meg, míg a hangszint a szinuszfüggvények amplitúdója és fázisa. Az emberi hallás felső határa kb. 20 kHz-nél van, így az addíciót legfeljebb eddig kell elvégezni. A súlyzógyütthetők és fázisok meghatározása kulcsfontosságú a végső hangzás szempontjából: valós hangszerek hangját is modellezhetjük additív szintézissel, ha mérésel meghatározzuk a frekvenciakomponensek paramétereit.

Az összeg eredményét, $u(t)$ -t időtartományban burkológörbével szokás tovább formázni. A burkológörbe a periodikus jel amplitúdóját változtatja (a periódusidőnél jóval lassabban). Ezzel a hang „finom” megjelenése vagy eltűnése jól modellezhető, de ütés vagy pengetés jellegű hullámformákra is jól alkalmazható.

Gyakori az ADSR (Attack, Decay, Sustain, Release) burkoló használata, melyet a 1.1 ábra szemléltet. Az ADSR burkoló jól modellezi például fúvós vagy vonóshangszerek megszólaltatását: a hang rövid, határozott indulását követően (A és D) alacsonyabb amplitúdón szól hosszabb ideig (S), majd elhallgat (R). Az (S) rész akár sokkal hosszabb ideig is tarthat, mint a többi szakasz.

Az additív szintézis önmagában jól használható, de (különösen a hangszintézis hajnalán) nem igazán terjedt el [33]. Ennek oka, hogy a szintézishez rengeteg harmonikus előállítására van szükség, mely analóg áramkörök esetében sok, jól hangolt oszcillátor megvalósítását kívánja, mely költséges lehet. Az additív szintézis inverze, a szubtraktív szintézis ezzel szemben „kiveszi” a harmonikusokat, mely sokkal egyszerűbb feladat.



1.2. ábra. Szubtraktív szintézis.

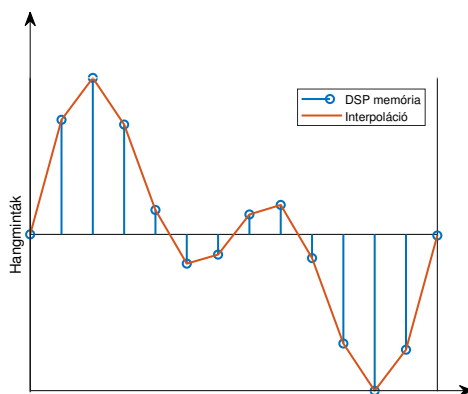
Szubtraktív szintézis

A szubtraktív szintézis során nem frekvenciákat adunk össze, hanem - épp ellenkezőleg - frekvenciakomponenseket szűrünk ki. A kiinduló jel egy harmonikusokban gazdag periodikus függvény, melyet megszűrve előállítjuk a végső jelet. A folyamatot a 1.2. ábra szemlélteti. A szűrést követően ismét alkalmazhatunk burkológörbékét a hangzás időbeli lefutásának változtatásához. A szubtraktív szintézis könnyedén implementálható mind analóg mind digitális módon. Érdekes például fűrés-, vagy négyszögjelből kiindulni, hiszen ezek könnyedén megvalósíthatók, és felharmonikusokban gazdagok. Az első analóg szintetizátorok épp ezt használták ki [33].

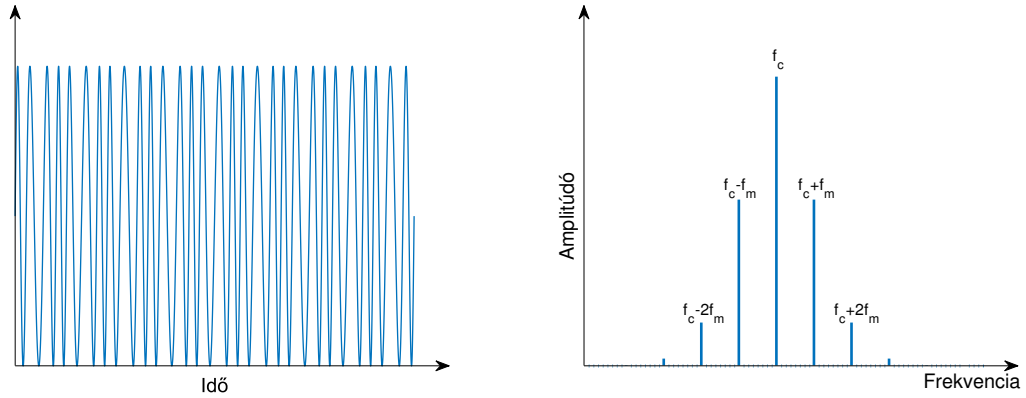
Wavetable szintézis

A wavetable szintézis (más néven „sampling” vagy „Pulse Code Modulation”) a digitális szintézismódszerek közé tartozik. A lejátszandó hang egy (vagy több) periódusát a digitális jelfeldolgozó processzor memóriájában tároljuk, és egyszerűen ciklikusan visszajátsszuk. A wavetable adatainak forrása lehet valós hangszerek mért jelalakja, vagy tetszőleges hullámforma [6]. A wavetable szintézist a 1.3 ábra szemlélteti.

A wavetable szintézissel könnyedén változtatható a lejátszott periodikus jel frekvenciája is megfelelő újramintavételezés (és átlapolásgátló szűrő) alkalmazásával.



1.3. ábra. A wavetable szintézis szemléltetése. A memóriában tárolt minták között valamilyen interpolációt alkalmazunk - például az ábrán látható módon lineárisat. Az ábra aránytalan: egy periódusból sokkal több minta állhat rendelkezésünkre.



1.4. ábra. FM szintézis időtartományban és frekvenciatartományban.

A wavetable szintézis egy nagyon egyszerű, hatékonyan implementálható, kis számítási igényű algoritmus, éppen ezért a mai szintetizátorokban (különösen az alsó kategóriákban) ezt használják a leggyakrabban.

FM szintézis

Az FM szintézis egy moduláló,- és egy vivőjelből áll, melyek legtöbb esetben tisztán szinuszosak. A vivőjel segítségével a moduláló jelet transzformáljuk magasabb frekvenciára, ezzel gazdagítva a spektrumot - és a hangzást is. Az FM szintézis összefüggése [6]:

$$u(t) = A \sin(2\pi f_c t + I \sin(2\pi f_m t)) \quad (1.2)$$

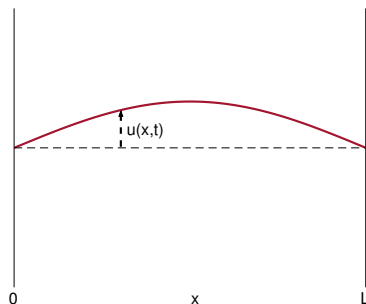
ahol f_c a vivőjel, f_m pedig a moduláló jel frekvenciája. Ahogy a 1.4. ábrán látható, az FM szintézis harmonikusokban gazdag spektrumot eredményez. Minden $f_c \pm i f_m$ frekvencián található egy-egy szinuszfüggvény. Éppen ezért mondhatjuk, hogy a FM moduláció talán a leghatékonyabb módszer harmonikusokban gazdag hang előállítására. Természetesen az FM modulált jelet is elláthatjuk tetszőleges burkológörbével.

1.2. A fizikai alapú hangszintézis módszerei

Sok hangszer esetében a fenti módszerek nem alkalmasak jól reprodukálni a hangszer jellegzetes hangzási tulajdonságait. A fizikai alapú szintézismódszerek igyekeznek ezt a problémát orvosolni, de ennek ára gyakran a számítási kapacitás, és/vagy a fejlesztési idő növekedése.

A hangszer fizikáját leggyakrabban (ha nem mindig) differenciál-egyenletekkel írhatjuk le. Analitikus megoldásuk bizonyos esetekben kifejezetten egyszerű, más esetekben merész vállalkozás.

A fizikai alapú szintézisek családját két nagy részre bonthatjuk. Az analitikus megoldáson alapuló módszerek a folytonos idejű megoldást közvetlenül diszkrétizálják. Ezek számítási kapacitás szempontjából általában hatékony módszerek. A numerikus megoldáson alapuló



1.5. ábra. Egy L hosszúságú húrt az $x = [0, L]$ intervallumra képezzük le, és vertikális kitérését minden időpillanatban értelmezzük.

módszerek a fizikai rendszer leíró differenciálegyenleteket diszkrétizálják, és oldják meg, így gyakran számításigényesebbek.

A fizikai alapú szintézismódszerek szemléltetésére a húr legegyszerűbb, egydimenziós, lineáris modelljét fogom használni, melynek differenciálegyenlete:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.3)$$

Az u változó jelöli a húr kitérését a kezdeti pozíciójához képest, c pedig a húr anyagparamétereitől függő konstans, mely a húrban terjedő hullám sebessége (1.5. ábra). A húrt itt most kizárólag példaként használom a szintézismódszerek bemutatására. Ez a lineáris modell ugyan alkalmas lehet például zongora vagy gitárhang szintézisére, de nem adja vissza jól a hangzás bizonyos tulajdonságait. Az érdeklődő Olvasó a [17] hivatkozásban megtekintheti a gitárhang fizikai szintézisét, a [3, 4] hivatkozásokban pedig a zongorahang átfogó, nemlinearitásokat is modellező szintézisét.

1.2.1. Modális szintézis

A modális megoldás (avagy módus) a differenciálegyenlet egy speciális megoldása. A húr esetében a modális megoldást térben és időben is szinuszosan változó függvények formájában keressük, azaz:

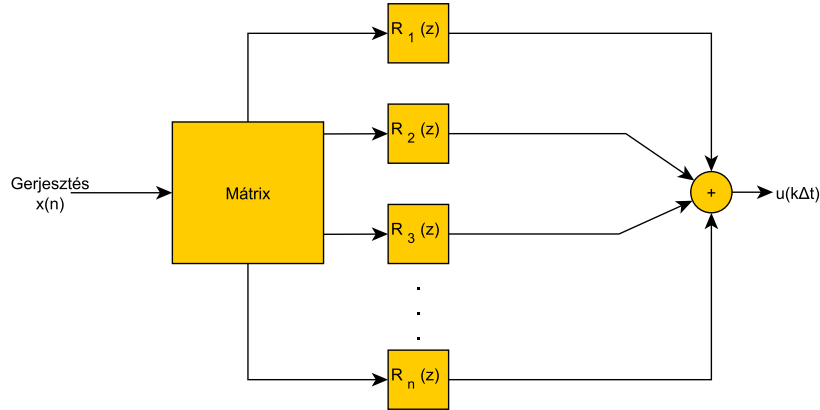
$$u_m(t) = A \cos(k_x x) \cos(\omega t + \varphi) \quad (1.4)$$

Ha visszahelyettesítünk az (1.3) egyenletbe, akkor a

$$k_x^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (1.5)$$

összefüggést kapjuk, melyet gyakran diszperziós relációnak neveznek. A k_x egy térbeli „körfrekvencia”, és a λ hullámszámmal arányos:

$$k_x = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1.6)$$



1.6. ábra. A modális szintézis blokkvázlata. Az $R(z)$ blokkok diszkrét idejű harmonikus oszcillátorokat (rezonátorokat) jelölnek.

Tehát az (1.4) egyenlet a húr modális megoldása, ha teljesül a diszperziós reláció. Figyelembe kell vennünk, hogy a húr nem végtelen hosszú, hanem (legegyszerűbb esetben) a szélein rögzítve van, mely azt jelenti, hogy ott kitérése nulla. Ez csak akkor teljesülhet, ha a húr hossza a térbeli szinuszfüggvény félhullámhosszának egész számú többszöröse. Más szóval, a szélein rögzített húr módusai csak olyanok lehetnek, melyekre teljesül

$$k_x = \frac{n\pi}{L} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.7)$$

Emellett persze továbbra is teljesülnie kell a diszperziós relációnak, így nemcsak a térbeli hullámhossz, de az időbeli periódusidő is csak kvantált értékeket vehet fel.

Belátható, hogy a húr egyenletének teljesen általános megoldása a módusok összegeként írható fel.

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_i \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos(\omega_n t + \varphi_n) \quad (1.8)$$

A modális megoldások ismeretében a hangszintézis megvalósítható a módusok rezgésének lineáris kombinációjaként. Az időben harmonikusan rezgő módusokat diszkrét idejű rezonátorokkal valósítjuk meg, és ezek súlyozott összege eredményezi a végső hangot. A módusok amplitúdóját és fázisát egyrészt a gerjesztőerő $x(n)$, másrészt a csillapítás határozza meg. A modális szintézist az 1.6. ábra szemlélteti

A módusalakokat és azok frekvenciáit megkaphatjuk, akár a fenti példához hasonlóan analitikus módszerekkel, de bonyolultabb rendszerek esetében fordulhatunk numerikus algoritmusok felé is.

1.2.2. Digitális hullámvezető

Bevezető példa

Bevezetőként alkalmazzunk az (1.4) egyenletre egy elemi trigonometrikus átalakítást:

$$u_m(t) = \frac{A}{2} \cos(k_x x - \omega t) + \frac{A}{2} \cos(k_x x + \omega t) \quad (1.9)$$

Kihasználva a diszperziós relációt, átalakíthatjuk az alábbi formára:

$$u_m(t) = \frac{A}{2} \cos(\omega[t - x/c]) + \frac{A}{2} \cos(\omega[t + x/c]) \quad (1.10)$$

A kapott eredmény kifejezetten szemléletes. Az első tag egy jobbra haladó hullámkomponenst ír le, a második tag pedig egy balra haladót. Tehát a húr rezgése felbontható két, egymással ellentétes irányban, azonos sebességgel terjedő hullámkomponensre.

Digitális hullámvezető módszer

A bevezető példa ismeretében láthatjuk azt is, hogy a húr rezgésének teljesen általános megoldása is egy balra, és egy jobbra haladó hullám szuperpozíciójaként írható fel [39, 44]. Ezt szokás d’Alambert féle megoldásnak nevezni. Formálisan

$$u(x, t) = u_r\left(t - \frac{x}{c}\right) + u_l\left(t - \frac{x}{c}\right). \quad (1.11)$$

Diszkrétizáljuk most térben és időben a fenti egyenletet, azaz legyen $t \approx n\Delta t$ és $x \approx k\Delta x$. Ha Δt elég kicsi, és teljesítjük a mintavételi tételt, akkor nem veszítünk információt.

$$u(n\Delta t, k\Delta x) = u_r\left(n\Delta t - \frac{k\Delta x}{c}\right) + u_l\left(n\Delta t + \frac{k\Delta x}{c}\right) \quad (1.12)$$

Ha $\Delta t = \Delta x/c$ választással élünk, akkor

$$u(n\Delta t, k\Delta x) = u_r((n - k)\Delta t) + u_l((n + k)\Delta t) \quad (1.13)$$

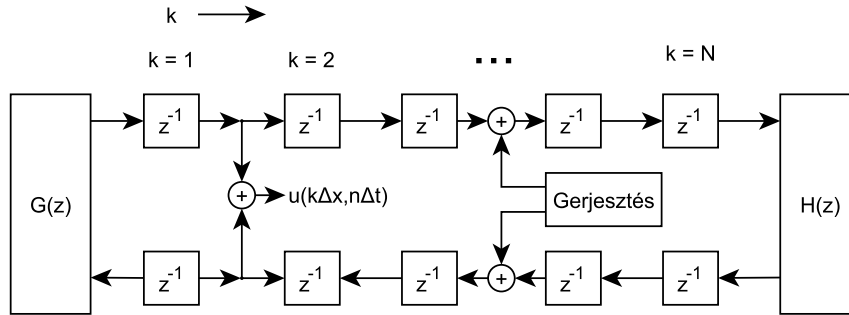
Ezzel már tulajdonképpen megkaptuk a végeredményt. Vezessünk még be két, gyakran használt jelölést:

$$u^+ = u_r(m\Delta t) \quad u^- = u_l(m\Delta t) \quad (1.14)$$

Ezzel a választással:

$$u(k\Delta x, n\Delta t) = u^+(n - k) + u^-(n + k) \quad (1.15)$$

Az összefüggés mellett tekintsük meg az 1.7. szemléletes ábrát. A waveguide két, ellentétes irányú késleltetővonallal modellezi a hullámegyenletet. A kimenet bármelyik időpillanatban és bármelyik diszkrét térpontban a két hullámkomponens összegeként kapható meg. A



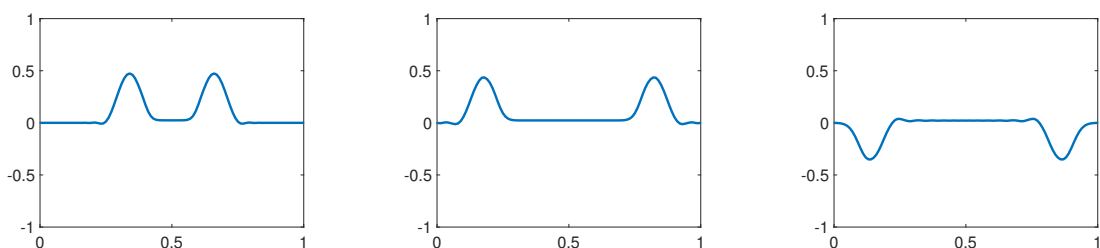
1.7. ábra. A waveguide szemléltetése. A „ z^{-1} ” feliratú blokkok egy mintányi késleltetést jelentenek, ami implementáció szempontjából nézve egy tárolóelemet jelent.

gerjesztés szintén a waveguide valamelyik pontjában mindkét¹ késleltetővonalban hat. A húr végén digitális szűrők találhatóak, melyek a lezárást modellezzik. Legegyszerűbb esetben, amikor a húr a végén rögzítve van, az átviteli függvények egy veszteségmentes, negatív reflexiót valósítanak meg, azaz $u^-(N - k) = -u^+(N - k)$ ill. $u^-(1 - k) = -u^+(1 - k)$. Természetesen ez csak a legegyszerűbb modell, de szemléltetés céljából teljesen alkalmas. A 1.8. ábra szemlélteti, mi történik a szélein rögzített húr hullámkomponenseivel a reflexió követően. Jól különválnak a két irányban terjedő hullámkomponens, melyek a húr rögzített szélein teljes, negatív reflexiót szenvednek. Egy kicsit valóságosabb modellben a húr szélein valamilyen veszteséget vehetünk figyelembe, így a visszavert hullámkomponensek amplitúdója kisebb, mint a beérkezőké. A waveguide gyakori módszer a húr modellezésére, így alkalmazásával gitár, zongora vagy hegedű hangja is szintetizálható. A waveguide módszert gyakran használják fúvós hangszerek fizikai alapú szintéziséhez is. A különböző alkalmazási lehetőségekhez javaslom a módszer kidolgozója, J.O. Smith online könyvét [39]. Az egydimenziós módszer kiterjeszthető többdimenzióra is, és használható például dobok membránjának modellezésére [6] is, ugyanakkor sokkal kevésbé hatékonyan.

1.2.3. Transzformációs módszer

A transzformációs módszer (angol nevén Functional Transformation Method) a differenciálegyenlet analitikus megoldásán alapul. A megoldást olyan integráltranszformációk segítségével állítható elő, melyek az egyenlet parciális deriváltjait valamilyen módon eliminálják,

¹Ez alól kivételt jelent az a speciális eset, amikor a gerjesztés a waveguide elején (vagy esetleg a végén) hat. Előbbire fúvós hangszerek modellezése során kerülhet sor.



1.8. ábra. Pillanatképek a szélein rögzített húrban terjedő hullámcsomagról és annak reflexiójáról.

így a komplex frekvenciatartománybeli átviteli függvényt alkotnak.

Az átviteli függvény aztán diszkrétizálható és implementálható. A módszer implementáció szemszögéből hasonló eredményt ad, mint modális szintézisnél: rezonátorok lineáris kombinációja eredményezi a szintetizált hangot. A módszer részleteiért lásd [34].

1.2.4. Numerikus módszerek

A numerikus módszerek elsősorban bonyolult egyenletek, és/vagy bonyolult geometriák esetében válnak előnyös módszerekké. A számtalan numerikus módszer közül most kettőt, a véges differenciák módszerét és a végeelem módszert emelném ki.

A véges differenciák módszere

A véges differenciák módszerének alkalmazása során közvetlenül a differenciálegyenletet diszkrétizáljuk térben és időben a deriválás közelítésével:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \approx \frac{u(x + \Delta x/2, t) - u(x - \Delta x/2, t)}{\Delta x} \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \approx \frac{u(x, t + \Delta t/2) - u(x, t - \Delta t/2)}{\Delta t} \quad (1.16)$$

A közelítés ismételt alkalmazásával a másod (vagy magasabb) rendű deriváltak közelítése is megkapható. Az (1.3) egyenletre alkalmazva a közelítéseket:

$$\frac{u(x, t + \Delta t) - 2u(x, t) + u(x, t - \Delta t)}{\Delta t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2} \quad (1.17)$$

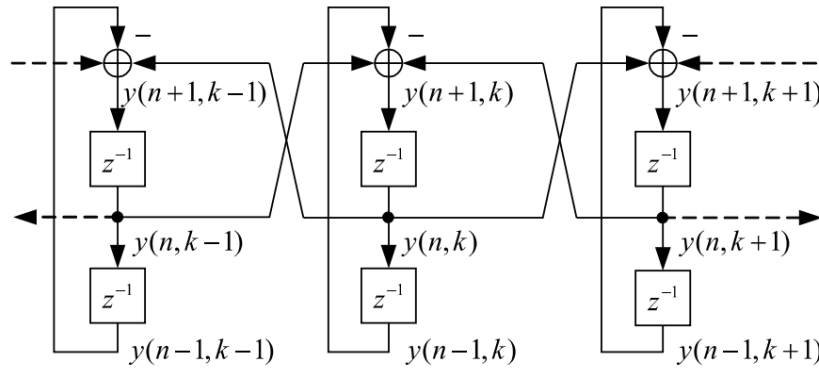
Az egyenletet átrendezve azt láthatjuk, hogy egy adott időpillanathoz képest a Δt - vel későbbi időpillanat megoldásfüggvénye bármelyik térbeli pontban előállítható a környező pontok előző időpillanatbeli megoldásából:

$$u(x, t + \Delta t) = \frac{1}{c^2} \frac{u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2} \Delta t^2 + 2u(x, t) - u(x, t - \Delta t) \quad (1.18)$$

A módszer nagyon egyszerű, és könnyedén, hatékonyan implementálható. A fent bemutatott módszert explicitnek nevezzük, mert az következő időpillanat kizárólag az előző időpillanat felhasználásával előállítható (1.9. ábra). Léteznek olyan, ún. implicit módszerek, melyek esetében ez nem így van. Ekkor egyenletrendszer megoldása válik szükségessé.

A véges differenciák módszere kiterjeszhető több dimenzióra is, így akár dobok, cintányérok szintézisére is alkalmas lehet. Az egyszerűségei mellett érdemes szót ejteni a hátrányairól is. A véges differenciák módszere elsősorban szabályos geometriák esetében alkalmazható hatékonyan. Jellegzetes numerikus hibája az ún. numerikus diszperzió. Ennek hatására a harmonikusok elhangolódnak, mely gyakran hallható disszonanciát eredményez, és a magas mintavételi frekvencia ellenére is sávkorlátozottá teszi a végeredményt. Mindezen hátrányai

ellenére számos hangszer fizikai alapú szintézisére alkalmas lehet. Egy átfogó gyűjtemény Bilbao könyvében tekinthető meg [6].



1.9. ábra. A véges differenciák módszere diszkrét idejű hálózatként reprezentálva. Az idő függőleges, a tér vízszintes irányban látható. Az ábra [44]-ből származik.

Végeselem módszer

A végeselem módszer elterjedt numerikus algoritmus parciális differenciál-egyenletek megoldására. Alapgondolata szerint a megoldásfüggvényt bázisfüggvények lineáris kombinációjaként keressük:

$$u \approx \sum_{i=1}^N u_i w_i(x, t) \quad (1.19)$$

A közelítés u_i együtthatóinak optimális értékét hibaminimalizáló technikákkal keressük meg, míg a bázisfüggvényeket szabadon, de szigorú szabályszerűségek betartásával választjuk meg. A szabályszerűség abból ered, hogy a tartományt kis résztartományokra osztjuk, és azokon lokálisan értelmezett w_i bázisfüggvényeket írunk elő. A tartomány diszkrétizálását végeselem hálónak nevezzük.

A módszer jelen dolgozat alapját képezi, így egy külön fejezetben részletesebben bemutatom a hibaminimalizálást, bázisfüggvény-konstrukciót és az implementálás részleteit is.

2. fejezet

A hullámgömb

A korábbi fejezetekben rávilágítottam arra, hogy hangszerek fizikai működését parciális differenciálegyenletek írják le. Egy differenciálegyenletnek végtelen sok megoldása van, ezért további megkötéseket írunk elő, mely elvezet a kezdeti-, és peremértékfeladat fogalmához.

Ebben a fejezetben a többdimenziós hullámgömböt analizálom:

- Felírok lehetséges peremfeltételeket és kezdeti feltételeket.
- Bemutatom a rendszer energiaviszonyait.
- Levezetem a módusokat, melyek a hullámgömb analitikus, frekvenciatartománybeli megoldásai.
- Végül felírom a hullámgömb analitikus megoldását sugárzó térben.

2.1. Jelölések és azonosságok

Ebben az alfejezetben összegzem a dolgozat során használt általános jelölés-rendszert, továbbá néhány fontos azonosságot [23].

Jelölések

Tekintsünk egy zárt $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ tartományt. A tartomány peremét Γ -val jelölöm. A tartomány infinitezimálisan kicsi részét $d\Omega$ -val jelölöm. Hasonlóan a perem infinitezimálisan kicsi részperemét a $d\Gamma$ -val jelölöm. Gyakran a perem normális irányú \mathbf{n} egységvektorát is hozzáveszem a jelöléshez, így $d\Gamma$ jelölés $d\Gamma\mathbf{n}$ vektort jelent.

Egy skalár értékű, többdimenziós függvényt kisbetűvel jelölök, mint például u , v , p . A skalármező gradiensét a ∇ (nabla) operátorral adom meg. Ez Descartes koordináta-rendszerben, kétdimenzióban¹ az alábbi módon írható fel.

¹A dolgozat során a leggyakrabban kétdimenziós tartományt vizsgálunk, azaz $n = 2$

$$\mathit{grad}(u) \equiv \nabla u = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Egy vektor értékű többdimenziós vektorteret vastag, kis betűvel jelölök, mint például \mathbf{a} , \mathbf{b} . A vektortér divergenciáját a $\nabla \cdot$ operátorral adom meg. Az $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$ kétdimenziós vektor divergenciája Descartes koordináta-rendszerben definíció szerint:

$$\mathit{div}(\mathbf{a}) \equiv \nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y}. \quad (2.2)$$

Egy skaláris függvény gradienseinek divergenciáját a Δ (Laplace) vagy a ∇^2 operátorokkal jelölöm. Az u skaláris függvényre:

$$\Delta u \equiv \nabla^2 u := \mathit{div}(\mathit{grad}(u)) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.3)$$

A fenti definíciók természetesen többdimenziós térben is ugyanúgy értelmezettek.

A biharmonikus operátor a Laplace operátor kétszer egymás utáni alkalmazása. Kétdimenzióban kifejtve:

$$\Delta(\Delta u) \equiv \Delta^2 u \equiv \nabla^4 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \quad (2.4)$$

Gyakran lesz szó az Ω tartomány feletti függvények vektortereiről, ahol a skaláris szorzatot a függvények szorzatintegráljaként értelmezzük. Ez pedig azonnal adja a normanégyszet kifejezését is:

$$\|u\|^2 = \int_{\Omega} u^2 d\Omega \quad (2.5)$$

Egy mátrixot nagy, vastag betűvel jelölök, mint például \mathbf{M} vagy \mathbf{K} . A mátrixot gyakran az elemeinek megadásával definiálom. Ha az \mathbf{M} mátrix ij . eleme m_{ij} , akkor a mátrix:

$$\mathbf{M} = [m_{ij}]_{ij} \quad (2.6)$$

ahol $i = 1 \dots N$, $j = 1 \dots M$.

Parciális integrálás

A parciális integrálás a dolgozat során leggyakrabban használt átalakítás. Különböző formáit az alábbiakban foglalom össze. Egydimenziós $u(x)$, $v(x)$ függvények esetében az alábbi

módon írható fel.

$$\int_a^b u \frac{dv}{dx} dx = [uv]_a^b - \int_a^b \frac{du}{dx} v dx \quad (2.7)$$

A parciális integrálás többdimenziós térben is felírható. Tetszőleges u skalárfüggvényre és \mathbf{v} vektorfüggvényre:

$$\int_{\Omega} u \nabla \cdot \mathbf{v} d\Omega = \oint_{\partial\Omega} uv \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \mathbf{v} d\Omega \quad (2.8)$$

ahol \mathbf{n} a Γ perem felületi normálvektora. A (2.8) egyenletből levezethetők az alábbi, x -re és y -ra külön-külön érvényes parciális integrálok [15].

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} v d\Omega = \oint_{\Gamma} uv d\Gamma n_x - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x} d\Omega \quad (2.9)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial y} v d\Omega = \oint_{\Gamma} uv d\Gamma n_y - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial y} d\Omega \quad (2.10)$$

ahol n_x, n_y a felületi normális vektor koordinátái: $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$. A parciális integrálás alkalmazható kétdimenziós vonalintegrálok esetében is. Az azonosság egyenes következménye a vonalintegrálok alaptételének. Legyen a görbe **sim**a és jelölje kezdeti ill. végpontját **a** ill. **b**. Ekkor

$$\oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial s} v d\Gamma = \left[uv \Big|_{\mathbf{b}} - uv \Big|_{\mathbf{a}} \right] - \oint_{\Gamma} u \frac{\partial v}{\partial s} d\Gamma. \quad (2.11)$$

ahol $\frac{\partial}{\partial s}$ a felületi tangenciális irányú deriváltat jelenti.

Idő szerinti deriváltak átalakítása

Idő szerinti deriváltat tartalmazó kifejezésekre gyakran fogom alkalmazni az alábbi átalakításokat.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \quad (2.12)$$

Hasonlóan,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \quad (2.13)$$

Ez az azonosság értelemszerűen extrapolálható y változóra is, sőt magasabb rendű deriváltakra is. Éppen ezért igazak lesznek az alábbiak is:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \nabla u \right) \cdot \nabla u = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla u \cdot \nabla u) \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\nabla u|^2 \quad (2.14)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\Delta u\right)\Delta u = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u)^2 \quad (2.15)$$

2.2. A hullámegyenlet peremértékfeladata

Egy parciális differenciálegyenlet végtelen sok megoldással rendelkezik. Ennek matematikai oka egyszerűen az, hogy a konstans deriváltja zérus, az értékétől függetlenül. Fizikai megközelítésben azt mondhatjuk, hogy az egyenletek elhanyagolnak „valós” megkötéseket (például a véges méreteket), a vizsgált jelenség teljesen általános leírására koncentrálnak.

Az egyértelműségnek márpedig fizikai megfontolásokból is teljesülnie kell: egy kísérletet kétszer, ugyanolyan körülmények között megismételve ugyanazt kell kapunk². Ezt az egyértelműséget matematikailag a kezdeti-, és peremértékfeladat bevezetésével fejezhetjük ki. Az általános helyett keressük a differenciálegyenlet megoldását csak egy zárt Ω tartományban. A tartomány Γ határán úgynevezett peremfeltételeket írunk elő. A peremfeltételek a tartományon kívül eső térrész hatásait hivatottak figyelembe venni: például, hogy a húr a szélein rögzítve van, vagy a cintányér véges méretű és a szélein szabadon rezeg. Figyelembe vehetünk a tartományon kívül (vagy épp azon) elhelyezkedő gerjesztő forrásokat is. Ez gyakran fordul elő elektromágneses terek analízise során [20].

A peremértékfeladat definíció szerint egy (parciális) differenciálegyenlet, peremfeltételek és kezdeti feltételek összessége [20]. Bemutatom a hullámegyenlet peremértékfeladatát.

Parciális differenciálegyenlet

A hullámegyenlet definíció szerint az alábbi idő, és térfüggő parciális differenciálegyenlet

$$c^2\Delta u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f, \quad (2.16)$$

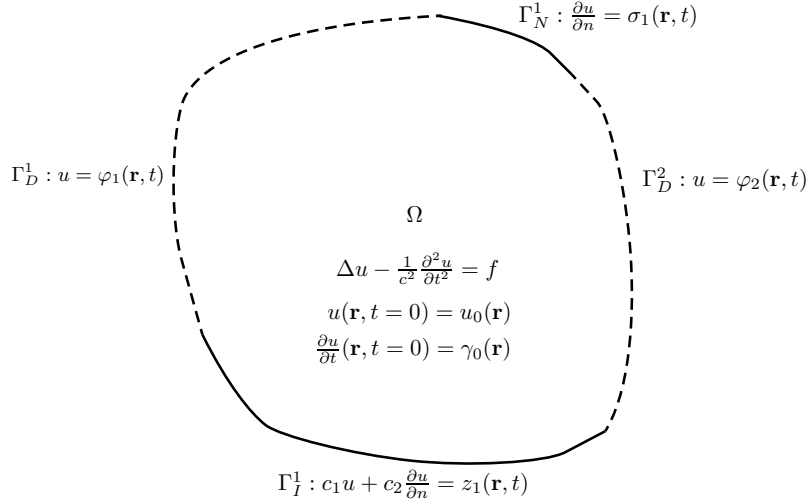
ahol c a hullám terjedési sebessége f pedig gerjesztő mennyiség megfelelő dimenzióval [6].

Peremfeltételek

A megoldást csak a zárt Ω tartományon keressük, melynek pereme Γ . A tartományon belül a parciális differenciálegyenlet érvényes, míg Γ -án megfelelő peremfeltételeket írunk elő úgy, hogy a megoldás egyértelmű legyen.

A tartomány peremét diszjunkt részperemekre osztjuk. Ezen résztartományokon megkötéseket írunk elő. A leggyakrabban használt peremfeltételek az alábbiak [6, 20]:

²Ennek az állításnak látszólag ellentmond a kvantummechanika. Ott azonban a differenciálegyenletek valószínűségi függvényekre vonatkoznak, emiatt egy kísérlet végtelen sok mérést jelent. Két ilyen „kísérlet” már ugyanazt adná eredményként, tehát az egyértelműség továbbra is értelmezhető



2.1. ábra. A hullámegyenlet kezdet, és peremértékfeladata.

- A Dirichlet típusú peremen (Γ_D) adott a megoldásfüggvény értéke, azaz $u = \varphi(x, y)$.
- A Neumann típusú peremen (Γ_N) adott a megoldásfüggvény normális irányú deriváltja $\frac{\partial u}{\partial n} \equiv \nabla u \cdot \mathbf{n} = \sigma(x, y)$.
- Az impedancia (vagy általánosított Neumann) típusú peremen (Γ_I) adott $c_1 u + c_2 \frac{\partial u}{\partial n} = z(x, y)$. A c_1, c_2 pozitív konstansok.

A peremfeltételek szemléltetése a 2.1. ábrán látható.

Kezdeti feltételek

Időfüggetlen problémák esetében a peremfeltételek megadása önmagában egyértelműen megoldhatóvá teszi a differenciálegyenletet. Kezdeti feltételekre csak időfüggő probléma esetén van szükség. A hullámegyenlethez a megoldásfüggvényt és annak első, idő szerinti deriváltját kell előírni a $t = 0$ időpillanatban, minden pontban [6, 20]:

$$u(\mathbf{r}, t = 0) = u_0(\mathbf{r}) \quad (2.17a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{r}, t = 0) = \gamma_0(\mathbf{r}) \quad (2.17b)$$

A kezdeti feltételeket szintén a 2.1. ábra szemlélteti.

Fizikai interpretáció

Számos hullámterjedési problémát vezettek le a fizika alapvető törvényeiből, például a Maxwell-egyenletekből, Newton-törvényből és deformációs törvényekből. Megfelelő elhanyagolásokkal sok fizikai probléma a (2.16) egyenletre vezet.

Fizikai probléma	u jelentése	$\frac{\partial u}{\partial n}$ jelentése	Terjedési sebesség (c)
Elektromágneses hullámterjedés	Késleltetett elektromos potenciál	Késleltetett felületi töltéssűrűség	$1/\sqrt{(\mu\varepsilon)}$
Akusztiikus hullámterjedés	Nyomás	Részecske gyorsulás	$\sqrt{(C/\rho)}$
Membrán/húr rezgés	Függőleges kitérés	Normális irányú mechanikai feszültség	$\sqrt{(T/\rho)}$

2.1. táblázat. *A hullámegyenlet alkalmazása a fizika különböző területein.*

Ha u nyomást jelöl valamilyen gázban vagy folyadékban, akkor a (2.16) egyenlet akusztikai hullámterjedést fejez ki [7]. Rengeteg különböző alkalmazás épül erre, mint például akusztikus lokalizáció, beamforming, wavefield szintézis stb.

A (2.16) egyenlet leírhatja egy vékony membrán rezgését is, mely jó modellje a dob anyagának [6]. Ebben az esetben u egy kétdimenziós függvény, és a membrán vertikális kitérését jelöli.

A (2.16) egyenlet megjelenik elektromágneses terek elméletében is. Ekkor u az ún. retardált (késleltetett) elektromos potenciált jelöli³[20].

A hullámegyenlet egydimenziós esetben éppen az (1.3) egyenletre egyszerűsödik, mely a húr rezgése mellett, egy egydimenziós légoszlop rezgését is leírhatja, ekkor u a légoszlop nyomása [6, 39].

A terjedési sebesség c az anyag vagy környezet paramétereitől függ. Például a Young-modulustól mechanikában [26], permittivitástól és permeabilitástól EM terekben [20], sűrűségtől akusztikus terekben [7]. Megjegyzem, hogy a (2.16) felírás legtöbb esetben csak akkor érvényes, ha az anyagparaméterek (és így c értéke) is konstans - legalább résztartományonként.

A hullámegyenlet különböző alkalmazásait (a teljesség igénye nélkül) a 2.1. táblázatban foglaltam össze.

2.3. Energiamérleg és veszteségek

Az energiamérleg a rendszeren belüli és azon kívüli energiaáramlásokat kifejező egyenlet, mely közvetlenül levezethető a differenciálegyenletből. Továbbá az energiamérleg segítségével a peremértékfeladat egyértelműsége is bebizonyítható.

Az energiamérleg levezetése

Meghatározásához szorozzuk meg a (2.16) hullámegyenletet $\frac{\partial u}{\partial t}$ -vel és integráljuk a vizsgált Ω tartományon.

³Kiegészítve ezt egy hasonló egyenlettel a mágneses vektorpotenciálra megkapjuk az elektromágneses hullámterjedés általános leírását

$$\underbrace{\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} f d\Omega}_{-\mathcal{P}_{exc}} = \int_{\Omega} \left(c^2 \Delta u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \frac{\partial u}{\partial t} d\Omega \quad (2.18)$$

Az egyenlet jobb oldalát átalakítjuk az alábbi módon:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} c^2 \Delta u \frac{\partial u}{\partial t} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t} d\Omega = \\ & \stackrel{(2.12)}{=} \stackrel{(2.8)}{=} c^2 \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial t} \nabla u \cdot d\mathbf{\Gamma} - c^2 \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \nabla u \cdot \nabla u d\Omega - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 d\Omega \quad (2.19) \\ & \stackrel{(2.14)}{=} \underbrace{c^2 \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial t} \nabla u \cdot d\mathbf{\Gamma}}_{\mathcal{P}_B} - \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{c^2 \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega}_{\mathcal{W}_1} - \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 d\Omega}_{\mathcal{W}_2}. \end{aligned}$$

A végső energiamérleg az alábbi szemléletes formában írható fel:

$$\frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial t} = \mathcal{P}_B + \mathcal{P}_{exc}. \quad (2.20)$$

A végeredmény kifejezetten beszédes. A $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ a rendszerben tárolt teljes energia adott időpillanatban. Az összenergia megváltozását a környezet okozza: egyrészt a gerjesztés, másrészt a vizsgált tartományon kívül eső térrész. A \mathcal{P}_B peremmenti integrálban megjelennek a korábban definiált peremfeltételek is⁴.

Az egyenlet tehát valóban egy mérleg. A rendszer energiája nem magától változik meg, hanem a környezete hatására: energiát környezettől kaphat vagy adhat át neki. Ez pedig nem más, mint az energiamegmaradás általános törvénye.

A \mathcal{W}_1 és \mathcal{W}_2 mennyiségeknek mindig adható fizikai interpretáció is. Ha u egy membrán kitérése, akkor \mathcal{W}_1 a membránban tárolt potenciális energiával arányos⁵, míg \mathcal{W}_2 az $\frac{1}{2}mv^2$ mozgási energiával arányos [6]. A rendszer a tartomány határán veszteségmentesnek nevezük, ha $\mathcal{P}_B = 0$.

Az energiamérleg segítségével bebizonyítható, hogy a peremfeltételekkel és kezdeti feltételekkel kiegészített differenciálegyenlet egyértelműen megoldható. A bizonyítás megtekinthető a Függelék F.1. fejezetében.

Veszteségek

A hullámeqyenlet eddig felírt alakja alapvetően veszteségmentes, legfeljebb a peremen vesztethet energiájából. Ez a fizikai probléma során feltételezett elhanyagolásoknak köszön-

⁴Ha u ismert, akkor annak idő szerinti deriváltja is ismert.

⁵Sűrűség dimenziójú mennyiséggel kell megszorozni

hető. A hullámegyenlet esetében gyakran modellezhetjük a veszteségeket az alábbi módon [6].

$$c^2 \Delta u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f + \sigma_1 \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (2.21)$$

ahol $\sigma_1 > 0$ a veszteséget jellemző paraméter. A veszteségnek természetesen mindig adható fizikai interpretáció. A rezgő membrán esetében a veszteséges tag a membránt körül vevő anyag (például a levegő) okozta veszteség [17]. Elektromágneses hullámok esetében a hullámvezető közeg nem-nulla vezetőképessége⁶ okoz veszteséget.

Az veszteséggel kiegészített rendszer energiamérlege ismét felírható, ha megszorozzuk a (2.21) egyenletet $\frac{\partial u}{\partial t}$ -val, és integráljuk a vizsgált Ω tartományon. Tekintsük most a peremmenti tagokat zérusnak (azaz legyen a rendszer a peremén veszteségmentes), így az energiamérleg az alábbi formában írható fel:

$$\frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial t} = -\mathcal{P}_{loss} + \mathcal{P}_{exc} \quad (2.22)$$

ahol

$$\mathcal{P}_{loss} = \sigma_1 \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 d\Omega \quad (2.23)$$

Az új tag határozottan pozitív, tehát a veszteség valóban mindig csökkenti a rendszerben tárolt energiát.

2.4. Modális megoldás

A modális megoldás egy speciális, frekvenciatartománybeli megközelítés. A modális megoldás során $f = 0$ -t feltételezünk. Ebben az alfejezetben részletesen bemutatom a modális megoldást és annak jelentőségét [6].

Szoratszeparáció

A szorzatszeparáció egy gyakori módszer többdimenziós parciális differenciálegyenletek megoldására. A megoldást több, alacsonyabb dimenziójú függvény szorzataként keressük. A modális megoldáshoz az idő és tér szerinti deriváltakat választjuk szét az alábbi módon:

$$u(\mathbf{r}, t) = S(\mathbf{r})T(t) \quad (2.24)$$

⁶Ha a hullámterjedést fémekben vizsgáljuk a csillapító tag olyan nagy, hogy a tér alig képes behatolni a fém belsejébe. Gyakorlatilag nem is beszélhetünk hullámjelenség kialakulásáról. Ezek az ún. kvázistacionárius terek [20]

Helyettesítsünk be a (2.16) hullámegyenletbe zérus gerjesztést feltételezve:

$$T(t)\Delta S(\mathbf{r}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} S(\mathbf{r}) \quad (2.25)$$

Osszuk el az egyenlet mindkét oldalát $S(\mathbf{r})T(t)$ -vel.

$$\Delta S(\mathbf{r}) \frac{1}{S(\mathbf{r})} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} \frac{1}{T(t)} \quad (2.26)$$

Az egyenlet bal oldala csak a térkoordinátáktól, jobb oldala csak az időtől függ, így csak akkor teljesülhet, ha mindkét oldal ugyanazzal a konstanssal egyezik meg, azaz

$$\Delta S(\mathbf{r}) = K S(\mathbf{r}) \quad (2.27a)$$

$$\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = c^2 K T(t) \quad (2.27b)$$

Ez két, csatolt differenciálegyenlet. Az első csak térkoordinátáktól a második csak időtől függ. Ez lehetőséget ad egy időben speciális megoldás keresésére.

Modális megoldás

A modális megoldás azon a megfigyelésen alapul, hogy a hullámegyenlet valamilyen rezgést ír le. Keressük a megoldást időfüggő részét az alábbi formában:

$$T(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (2.28)$$

ahol A és φ tetszőleges értékű konstansok. Visszahelyettesítve (2.27b)-be:

$$-\omega^2 T(t) = c^2 K T(t) \quad (2.29)$$

Ebből egyenesen következik, hogy $K = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2$. Vezessük be az alábbi jelölést:

$$k = \frac{\omega}{c}. \quad (2.30)$$

Ezzel a tértől függő (2.27a) egyenlet az alábbi formát ölti:

$$\Delta S(\mathbf{r}) = -k^2 S(\mathbf{r}) \quad (2.31)$$

Ez a Δ operátor ún. sajátértékegyenlete.

Differenciál-operátorok sajátértékproblémáját a mátrixokéhoz hasonlóan értelmezzük. Egy \mathbf{M} mátrix sajátértékegyenlete az $\mathbf{M}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ egyenlet. Az egyenlet nem-triviális (nullától eltérő) megoldása csak jól meghatározott, diszkrét λ értékeknél létezik. Ezeket sajátértéknek nevezzük, és a $\det(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk meg. A sajátértékhez tartozó \mathbf{v} vektort sajátvektornak nevezzük.

Egy differenciál-operátor sajátértékegyenlete analóg módon értelmezhető: a differenciál-operátor hat egy függvényre, és a függvény konstans-szorosát adja eredményül. Ennek megfelel a (2.31) egyenlet. A konstans $(-k^2-t)$ sajátértéknek, a hozzátartozó megoldást sajátmegoldásnak, vagy módusnak nevezzük. Az operátoros sajátértékegyenletnek önmagában kontinuum számosságú sajátérték-módus megoldáspárja létezik, azonban peremfeltételek érvényesítésével csak diszkrét sajátérték esetén lesz nem-triviális megoldás. Bár ezek számossága még mindig végtelen, de immáron megszámlálható.

A sajátértékprobléma analitikus megoldását valamilyen szinuszos alakban kereshetjük, hiszen ennek második deriválva (konstans szorzóktól eltekintve) megegyezik önmagával. A következő alfejezetben egy példán keresztül bemutatom a modális megoldás tulajdonságait.

2.5. A membrán modális dekompozíciója

Korábban többször is példaként hoztam fel a rugalmas membrán rezgését, melyet szintén a (2.16) hullámegyenlet ír le. Ekkor u a membrán vertikális kitérése. Ebben az alfejezetben analitikus megoldást adok a téglalap alakú membrán módusaira [6]. Az időfüggő megoldás továbbra is $T(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$.

Az térbeli egyenlet a következő módon írható fel:

$$\frac{\partial^2 S(\mathbf{r})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S(\mathbf{r})}{\partial y^2} = -k^2 S(\mathbf{r}) \quad (2.32)$$

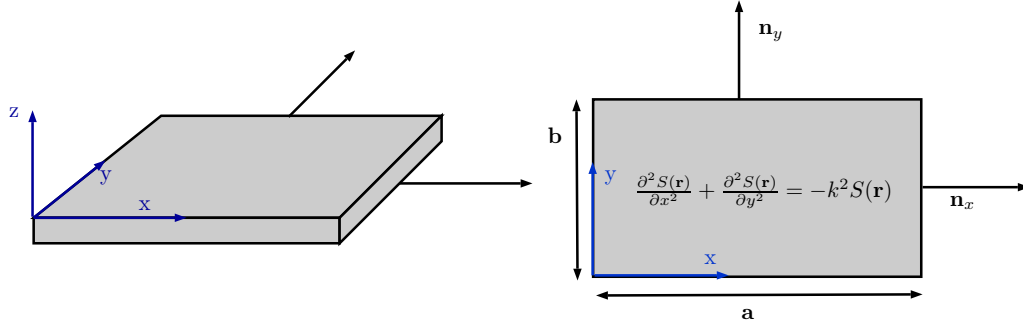
Két speciális peremfeltétel esetére adok analitikus megoldást. A szélein rögzített membrán esetében $u = 0$ feltétel teljesül. Magától értetődik, hogy ez a membrán a szélein rögzítve van, rezgésre képtelen.

A szélein szabadon hagyott membrán esetében $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ feltétel teljesül [6]. Az értelmezéshez lásd 2.2. ábrát.

A szélein rögzített membrán

Keressük a (2.32) megoldásfüggvényt az alábbi formában:

$$S(\mathbf{r}) = S_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y). \quad (2.33)$$



2.2. ábra. A vékony, rugalmas membrán kétdimenziós térben reprezentálható.

Behelyettesítve (2.32) egyenletbe megkapjuk a diszperziós relációt, azaz annak feltételét, hogy (2.33) megoldása legyen (2.32)-nek:

$$-k_x^2 - k_y^2 = -k^2 \quad (2.34)$$

Természetesen minden k_x, k_y párhoz található olyan k hullámszám, melyre teljesül a diszperziós reláció. Ez azt jelenti, hogy a sajátértékproblémának kontinuum számosságú megoldása van. Ahogy korábban már utaltam rá, diszkrét sajátmegoldásokat a peremfeltételek okoznak. Ahhoz, hogy $u = 0$ teljesüljön a peremen a (2.33) egyenlet mindkét szinusz függvényének éppen nullát kell adnia a peremen ($x = y = 0$ és $x = a$ és $y = b$), mely csak akkor teljesül ha

$$k_x = \left(\frac{n\pi}{a}\right) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.35a)$$

$$k_y = \left(\frac{m\pi}{b}\right) \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (2.35b)$$

ahol a, b a téglalap széleinek hossza. Ekkor ugyanis a szinusz félhullámhosszának egész számú többszöröse fér rá a téglalagra, függőleges és vízszintes irányban is. Ezzel a feltétellel a (2.34) diszperziós relációból meghatározhatók a módusok rezgési frekvenciái.

$$\omega = c \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} \quad (2.36)$$

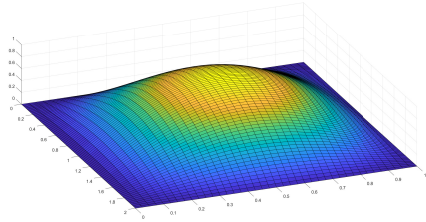
Az eredményből látszik, hogy a sajátfrekvenciák immáron diszkréték. A szélein rögzített membrán néhány módusa a 2.3. ábrán látható.

A szélein szabadon rezgő membrán

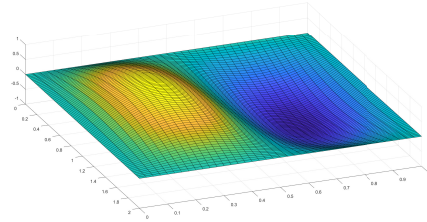
A szélein szabadon rezgő membrán esetében a megoldást az alábbi formában kereshetjük:

$$S(\mathbf{r}) = S_0 \cos(k_x x) \cos(k_y y), \quad (2.37)$$

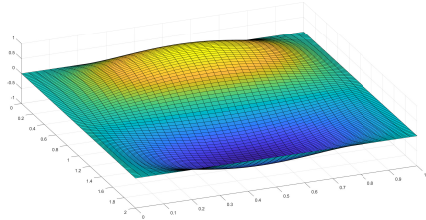
Behelyettesítve (2.32) egyenletbe ismét a (2.34) diszperziós relációt kapjuk. A normális irányú derivált csak akkor lehet nulla, ha a koszinuszfüggvény félhullámhosszának egész számú többszörösei férnek rá a membránra vízszintes és függőleges irányban is. Tehát



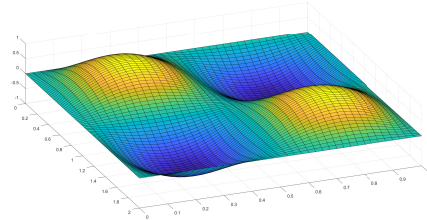
(a) $n = 1, m = 1$



(b) $n = 1, m = 2$



(c) $n = 2, m = 1$



(d) $n = 2, m = 2$

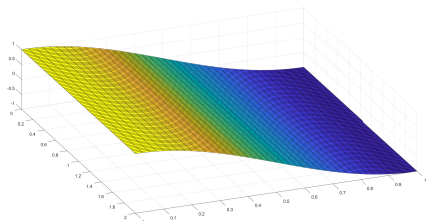
2.3. ábra. A szélein rögzített membrán első néhány módusa. $a = 1.5, b = 1$.

majdnem ugyanaz a feltétel fogalmazható meg k_x -re és k_y -ra.

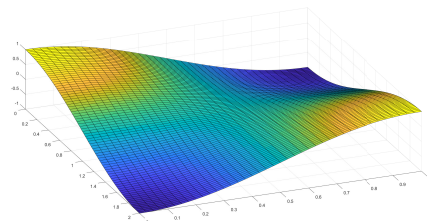
$$k_x = \left(\frac{n\pi}{a}\right) \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.38a)$$

$$k_y = \left(\frac{m\pi}{b}\right) \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.38b)$$

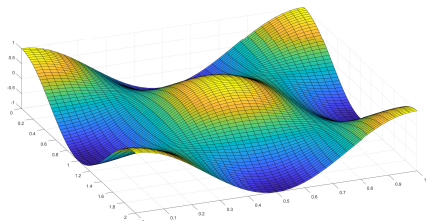
A különbség, hogy az $n = 0$ vagy $m = 0$ is megengedhető anélkül, hogy a megoldás nulla lenne. A 2.4. ábrán látható a szabadon rezgő membrán első néhány módusa.



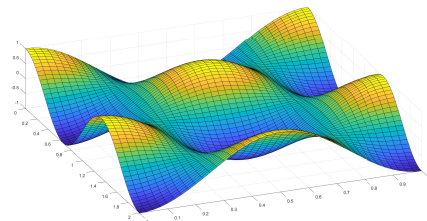
(a) $n = 0, m = 1$



(b) $n = 1, m = 1$



(c) $n = 2, m = 2$



(d) $n = 3, m = 2$

2.4. ábra. A szélein szabadon rezgő membrán első néhány módusa. $a = 1.5, b = 1$.

Módus szerinti sorfejtés

A differenciálegyenlet linearitása miatt minden ilyen jellegű megoldás összege is helyes

megoldás. Az inverz Fourier transzformációval belátható, hogy a teljes rezgés felírható a módusok szuperpozíciójaként. Mivel diszkrét módusok vannak, így integrálás helyett összeadás írható. Például a szélein rögzített membrán teljes rezgése az alábbi módon írható fel a módusok összegeként [29]:

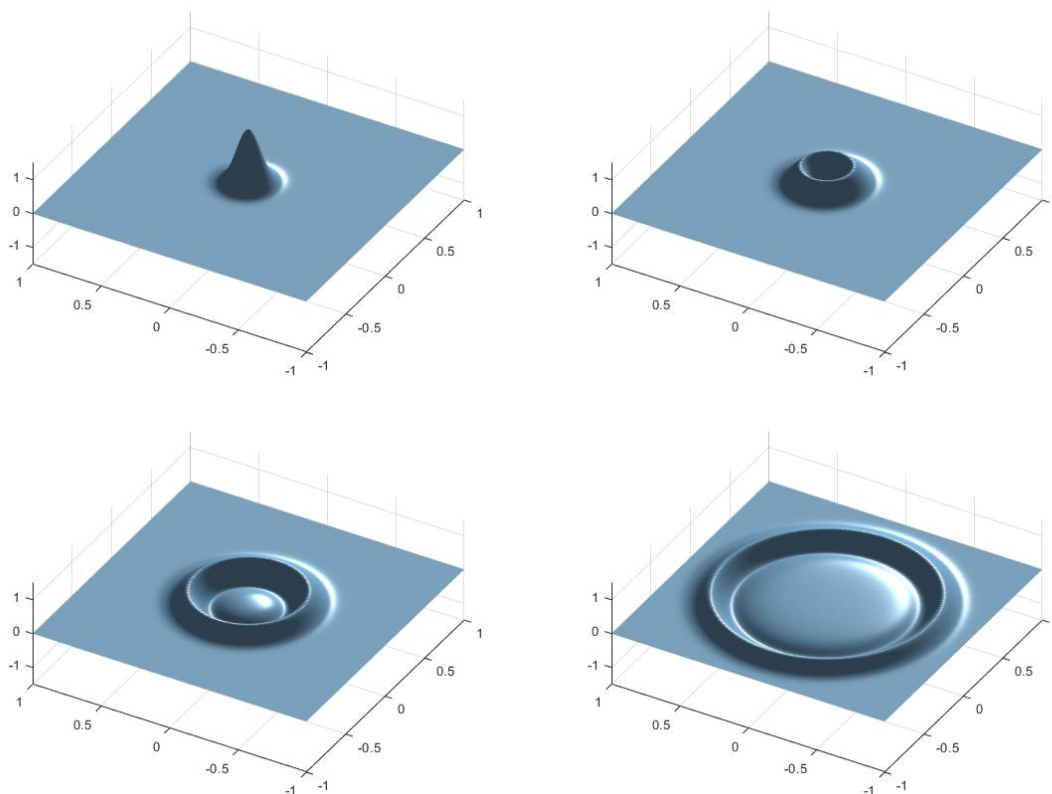
$$u(x, y, t) = \sum_{n,m} A_{nm} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \cos(\omega_{nm}t + \varphi_{nm}) \quad (2.39)$$

ahol természetesen a diszperziós reláció fennáll az összeg minden tényezőjére.

Az A_{nm} és φ_{nm} konstansok tetszőlegesek, így ez a felírás még nem egyértelmű. Ez nem is meglepő hiszen az egyértelműséghez még a kezdeti feltételek érvényesítése is szükséges. Éppen ezek adják az A_{nm} és a φ_{nm} értékeit.

Diszperziómentesség

A c terjedési sebesség minden módusra igaz, így azok lineáris kombinációjára is. A 2.5 ábrán láthatjuk, hogy egy kétdimenziós Gauss impulzus hogyan terjed egy négyzet alakú geometrián. A Gauss impulzus a módusok lineáris kombinációjával állítható el, tehát a hullámterjedésben több komponens is részt vesz. Mégis mindegyik komponens azonos sebességgel terjed ezért egy jól meghatározott hullámfrontot látunk. Az ilyen hullámjelenségeket diszperziómentesnek nevezzük.



2.5. ábra. A membrán egy kétdimenziós Gauss impulzussal inicializálva. A hullámfront jól meghatározott, nincs diszperzió.

2.6. Szabadtéri megoldás

A hangszugárzás modellezéséhez szükség lesz a hullámegyenlet egy általános, sugárzó térben értelmezett megoldására.

A Sommerfeld féle sugárzási feltétel

A sugárzási feltétel matematikai formában fejezi ki azt, hogy bármilyen zárt tartományt vizsgálva energia csak kifelé áramlik, befelé nem - más szóval szabad térben vagyunk, és nincs visszaverődés, reflexió.

Tekintsünk egy háromdimenziós, r sugarú, gömb alakú tartományt, melynek belsejében található a gerjesztő mennyiség. A vizsgált tartomány sugárzó, ha teljesíti a Sommerfeld féle sugárzási feltételt [14, 38]:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.40)$$

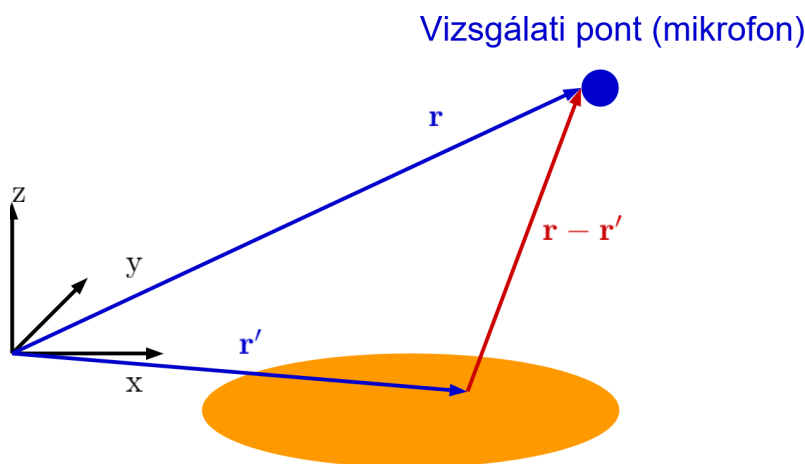
A sugárzási feltétel egy egyértelmű megoldást fejez ki [14].

Szabadtéri megoldás

Amennyiben a hullámegyenlet kielégíti a Sommerfeld féle sugárzási feltételt, a megoldás az alábbi integrál formájában írható fel [7, 10, 20]:

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{f\left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (2.41)$$

Ahogy korábban említettem a hullámegyenlet alkalmas akusztikai hullámterjedés modellezésére is, amennyiben u a nyomást jelöli. A (2.41) összefüggést a későbbiekben a hangszugárzás modellezésére fogom használni.



2.6. ábra. A (2.41) egyenlet értelmezése.

3. fejezet

Bevezetés a végeelem módszer alkalmazásába

A végeelem módszer az egyik legelterjedtebb numerikus analízis módszer, melynek ma ismert (és itt bemutatott) formáját nagyjából a 50-es, 60-as években dolgozták ki [18]. Azóta széles körben alkalmazzák mechanikában, elektromosságban, hőterjedésben és még sorolhatnánk [27]. Elterjedését többek között annak köszönheti, hogy bármilyen geometriát képes pontosan követni, hatékonyan implementálható, és jól alkalmazható nemlineáris problémákra is.

Ebben a fejezetben bemutatom a végeelem módszer elméleti alapjait kiegészítve néhány praktikus, gyakorlati megfontolással. A fejezet alapját elsősorban a [35] irodalomban leírtak adják, de a felépítés inkább a saját gondolatmenetemet tükrözi.

A végeelem formalizmus alkalmazható bármilyen, differenciálegyenlettel leírható problémára. Egy általános differenciálegyenletet az alábbi formában írhatunk fel:

$$\mathfrak{L}\{u(\mathbf{r}, t)\} = f(\mathbf{r}, t) \quad (3.1)$$

ahol \mathfrak{L} egy tetszőleges differenciáloperátor, mely az u skalárfüggvényre hat. A jobb oldalon található f egy skaláris gerjesztő mennyiség. A végeelem módszer demonstrálására az előző fejezetben részletesen tárgyalt hullámeqyenletet fogom használni.

A hullámeqyenlet esetében \mathfrak{L} az ún. d'Alambert operátor:

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (3.2)$$

3.1. Hibaminimalizálás - Súlyozott residuum elv

Jóllehet közelítő megoldást keresünk, de fontos, hogy az minél kisebb hibájú legyen. Ezt hibaminimalizáló technikákkal érhetjük el. Itt az ún. súlyozott residuum elvét mutatom be.

Reprezentáció vektortérben

A differenciálegyenletben szereplő mennyiségek skaláris függvények, melyeket reprezentálhatunk vektortérben. A vektortér (függvénytér) az Ω tartományon értelmezett „jól viselkedő” függvények tere, melynek dimenziója végtelen. A megoldásfüggvény biztosan felírható valamilyen bázisfüggvények lineáris kombinációjaként:

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(\mathbf{r}, t) \quad (3.3)$$

Mivel $\mathcal{L}\{u\}$ is függvény, így az is felírható ugyanilyen formában:

$$\mathcal{L}\{u\} = \sum_{j=1}^{\infty} q_j w_j(\mathbf{r}, t) \quad (3.4)$$

Jelöljük u_h -val a közelítő megoldást. A közelítés adódjon abból, hogy végtelen dimenzió helyett csak véges dimenzióban reprezentáljuk a megoldásfüggvényt:

$$u \approx u_h := \sum_{i=1}^N c_i(t) \varphi_i(\mathbf{r}) \quad (3.5)$$

A felírásban immáron csak térbeli bázisfüggvények szerepelnek, míg az időfüggést a súlyozóegyütthatók fejezik ki. Ennek oka, hogy a véges elem módszert általában térbeli differenciálegyenletek megoldására alkalmazzák, az idő szerinti problémát más (például időlépéses) módszerekkel oldhatjuk meg.

Ha u_h véges dimenziójú akkor $\mathcal{L}\{u_h\}$ is véges dimenziójú:

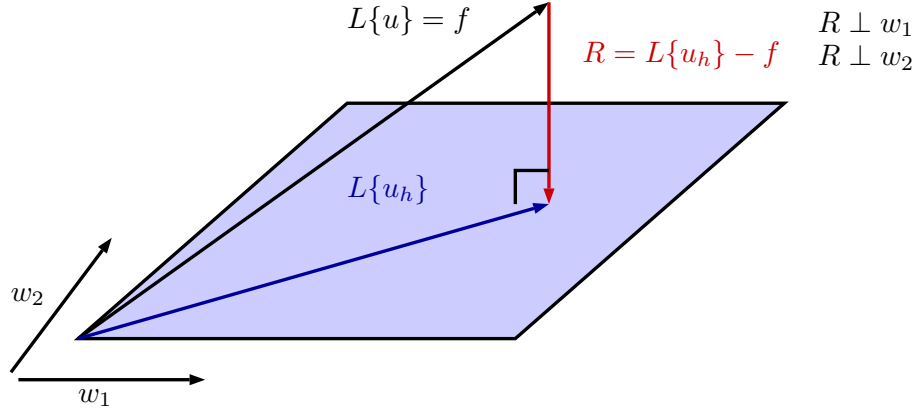
$$\mathcal{L}\{u_h\} = \sum_{j=1}^N q_j(t) w_j(\mathbf{r}) \quad (3.6)$$

Minimalizáljuk a véges dimenziójú közelítés hibáját. A bázisfüggvények szabadon megválaszthatók, de a súlyozó együtthatók optimális értékének megválasztásához valamilyen költségfüggvényre lenne szükség. Kézenfekvő lenne a $\|u - u_h\|$ minimalizálása, de ez nem tehető meg, hiszen u nem ismert. Minimalizálható azonban a differenciálegyenlet hibája.

A véges dimenziójú közelítés hibáját residuumnak nevezzük:

$$R = \mathcal{L}\{u_h\} - f \quad (3.7)$$

¹Részletesebben lásd a 3.5. fejezetben



3.1. ábra. A merőleges vetítés, mint hibaminimalizálás. Az ábrán $L\{\cdot\}$ az $\mathfrak{L}\{\cdot\}$ operátort jelöli.

Minimalizáljuk a residuum normáját a vektortérben, azaz

$$J = \int_{\Omega} R^2 d\Omega \rightarrow \min. \quad (3.8)$$

Írjuk be R definícióját, felhasználva a (3.6) egyenletet is:

$$J = \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^N q_j(t) w_j(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}, t) \right)^2 d\Omega \rightarrow \min. \quad (3.9)$$

Keressük az együtthatók optimális értékét, melyre ez a térbeli költségfüggvény minimális.

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial q_j} &= 2 \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^N q_j(t) w_j(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}, t) \right) w_j(\mathbf{r}) = \\ &= 2 \int_{\Omega} (\mathfrak{L}\{u_h\} - f) w_j d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ha az egyenlet teljesül $\forall j = 1 \dots N$ -re, akkor minimális hibájú megoldást kapunk.

A (3.10) egyenlet valójában a merőleges vetítést fejezi ki. Tekintsük a 3.1 ábrát. Az $\mathfrak{L}\{u\} = f$ vektort most háromdimenziós térben szemléltetem. A csonkított bázis a w_1, w_2 , az általuk kifeszített sík az a vektortér, amire hibát minimalizálunk. Látható az ábrán, hogy a (3.10) feltétel éppen azt fejezi ki, hogy minden bázisfüggvény merőleges a residuumra, azaz a közelítőmegoldás a tényleges megoldás merőleges vetítése a síkra.

A súlyozott residuum elv

A súlyozott residuum elv egy gyakran használt általánosa az előbbi gondolatmenetnek. Definíció szerint a súlyozott residuum az alábbi egyenlet, ahol $v(\mathbf{r})$ tetszőleges függvénye a vektortérnek.

$$\int_{\Omega} (\mathfrak{L}\{u_h\} - f) v(\mathbf{r}) d\Omega = 0 \quad (3.11)$$

Az egyenlet az alábbi két fontos tulajdonsággal rendelkezik:

- Ha v tetszőleges, akkor az integrál akkor és csak akkor lehet nulla, ha $\mathfrak{L}\{u_h\} - f = 0$, azaz a differenciálegyenlet kielégül. Más szóval, ha v tetszőleges, akkor a súlyozott residuum egyenlete ekvivalens a differenciálegyenlettel.
- Ha v csak egy véges dimenziójú altérben tekinthető tetszőlegesnek, akkor a súlyozott residuum minimális hibájú megoldást fejez ki. Ezt könnyedén beláthatjuk a $v = \sum_{j=1}^N q_j w_j$ helyettesítéssel:

$$\sum_{j=1}^N q_j \int_{\Omega} (\mathfrak{L}\{u_h\} - f) w_j d\Omega = 0 \quad (3.12)$$

Ha v tetszőleges egy véges dimenziójú altérben, akkor valójában a q_j együtthatók tetszőlegesek. Ez azt jelenti, hogy az egyenlet akkor és csak akkor lehet nulla, ha az összeg minden tagja nulla, azaz:

$$\int_{\Omega} (\mathfrak{L}\{u_h\} - f) w_j d\Omega = 0 \quad \forall j = 1 \dots N \quad (3.13)$$

Ez pontosan az a minimális hibájú megoldás, amit a (3.10) egyenletben levezettünk.

Bevezetünk egy kényelmes jelöléstechnikát. Rendezzük oszlopvektorba a bázisfüggvényeket, azaz

$$\mathbf{w} = [w_j]_{j=1}^N \quad (3.14)$$

Az (3.13) egyenletrendszer vektoros formában felírva:

$$\int_{\Omega} (\mathfrak{L}\{u_h\} - f) \mathbf{w} d\Omega = \mathbf{0} \quad (3.15)$$

3.2. Gyenge alak

A gyenge alak a súlyozott residuum átalakítása egy átalakításra, melyet a (2.16) hullámegyenlet alapján mutatok be. A súlyozott residuum egyenlete:

$$\int_{\Omega} \left(\Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - f \right) v = 0 \quad (3.16)$$

Használjuk az (2.8) parciális integrálás azonosságát:

$$\oint_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega = \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v d\Omega + \int_{\Omega} f v d\Omega. \quad (3.17)$$

Gyakori, hogy a gyenge alakot operátorok segítségével írják fel, az alábbi módon:

$$\mathfrak{B}(u, v) - \mathcal{K}(u, v) = \mathcal{M}(u, v) + \mathcal{F}(v) \quad (3.18)$$

ahol

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(u, v) &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega & \mathcal{M}(u, v) &= \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v d\Omega \\ \mathfrak{B}(u, v) &= \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v d\Gamma & \mathcal{F}(v) &= \int_{\Omega} f v d\Omega \end{aligned}$$

Ezt az egyenletet gyenge alaknak nevezzük, mégpedig azért, mert a térbeli deriváltak rendje egyel csökkent. Az eredeti differenciálegyenletben másodrendű deriváltak szerepeltek, itt már csak elsőrendűek. Azonban a v függvény tetszőlegessége miatt, ha a gyenge alak egyenlete teljesül, akkor az eredeti differenciálegyenlet is kielégül.

A \mathfrak{B} peremmenti integrált felbonthatjuk a Neumann és a Dirichlet típusú peremeken vett integrálok összegére. Előbbibe behelyettesíthetjük a Neumann típusú peremfeltételt, hiszen ezt ismerjük, elő van írva. Továbbá, a Dirichlet peremen írjuk elő, hogy $v = 0$, mely azt fejezi, hogy a Dirichlet perem mentén nem minimalizálunk hibát. Nincs is erre szükség, hiszen a megoldás (a peremfeltétel miatt) expliciten ismert.

Az eredményben megjelenik a Neumann típusú peremfeltétel ($\frac{\partial u}{\partial n} = \sigma$) érvényesítése is:

$$\int_{\Gamma_N} \sigma v d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega = \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v d\Omega + \int_{\Omega} f v d\Omega \quad (3.19)$$

Ez a gyenge alak tehát több, mint az erős alak (azaz a differenciálegyenlet), hiszen magában foglalja a Neumann típusú peremfeltétel érvényesítését is. Éppen ezért gyakori a Neumann peremfeltételt természetes peremfeltételnek nevezni.

A Dirichlet peremfeltételek még nem érvényesültek, és láthatjuk, hogy ezt nem is tudjuk olyan könnyedén („természetesen”) megtenni. Ezért gyakran esszenciális peremfeltételnek nevezik.

Érdeemes megnézni mi történik, ha az (2.8) parciális integrálás azonosságot visszafelé alkalmazzuk a (3.19) egyenletre, nem feledve el, hogy $v = 0$ a Dirichlet peremen:

$$\int_{\Omega} \left(\Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - f \right) v d\Omega + \int_{\Gamma_N} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - f \right) v d\Gamma = 0 \quad (3.20)$$

Ha v tetszőleges, akkor ez az egyenlet akkor és csak akkor lehet nulla, ha minden tényezője nulla, tehát a differenciálegyenlet mellett a Neumann peremfeltétel is teljesül.

Ha v csak egy véges bázisú altérben tetszőleges, akkor az egyenlet kifejezi a minimális hibát nemcsak a differenciálegyenletre, hanem a peremfeltételre is.

A végeelem módszer alkalmazása során a (3.19) gyenge alakot oldjuk meg, kihasználva azt, hogy a deriváltak rendje egyel csökkent.

A gyenge alak és az energiamérleg kapcsolata

Érdekes észrevenni, hogy a lemez gyenge alakja és energiamérlege között szoros összefüggés van. Ha a (3.17) gyenge alakban $v = \frac{\partial u}{\partial t}$ helyettesítést alkalmazunk, majd használjuk a (2.14) ill. (2.12) átalakításokat, megkapjuk a (2.20) energiamérleget. Ezen nem lepődünk meg, hiszen a gyenge alak és az energiamérleg levezetése során is parciális integrálást kell alkalmazni.

Valójában ennél többet jelent ez a kapcsolat: a gyenge alak a rendszer összenergiájának (mint funkcionálnak) az első variációja. Erre szemléletes példát tekinthetünk meg a [15] irodalomban.

3.3. Diszkretizáció

A végeelem módszer következő lépése, hogy a gyenge alakot diszkretizáljuk, azaz közelítjük a megoldásfüggvényt bázisfüggvények lineáris kombinációjaként:

$$u_h = \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i = \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{c} \quad (3.21)$$

Legyen v_h is véges dimenziójú:

$$v_h = \sum_{i=1}^N q_i w_i = \mathbf{q}^T \mathbf{w} \quad (3.22)$$

ahol $\boldsymbol{\varphi} = [\varphi_i]_{i=1}^N$ és $\mathbf{c} = [c_i]_{i=1}^N$ mindkettő oszlopvektorként reprezentálva. Ezzel a gyenge alak diszkretizációja

$$\mathfrak{B}(u_h, v_h) - \mathcal{K}(u_h, v_h) = \mathcal{M}(u_h, v_h) + \mathcal{F}(v_h) \quad (3.23)$$

Írjuk ki a diszkretizációt részletesen, és használjuk fel a (3.15)-ben bevezetett vektoros jelölést.

$$\int_{\Gamma_N} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{w} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{w} \nabla (\boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{c}) \, d\Omega = \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \mathbf{w} \frac{\partial (\boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{c})}{\partial t^2} \, d\Omega + \int_{\Omega} f \mathbf{w} \, d\Omega \quad (3.24)$$

Gyakori (és talán magától értetődő) választás, hogy $\varphi = \mathbf{w}$, melyet Galerkin módszernek nevezünk, és a dolgozat során végig ezt fogom használni. Más módszerek a [35] hivatkozásban tekinthetők meg. Ezzel a választással megkapjuk a következő egyenletet:

$$\int_{\Gamma_N} \sigma \mathbf{w} d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{w} \nabla \mathbf{w}^T d\Omega \mathbf{c} = \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \mathbf{w} \mathbf{w}^T d\Omega \frac{\partial^2 \mathbf{c}}{\partial t^2} + \int_{\Omega} f \mathbf{w} d\Omega \quad (3.25)$$

ahol $\nabla \mathbf{w}$ egy olyan $2 \times N$ -es vagy $3 \times N$ -es (2D ill. 3D-ban) mátrix melynek i . sora az i . bázisfüggvény gradiensét tartalmazza sorvektorként:

$$\nabla \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial x} & \frac{\partial w_1}{\partial y} \\ \frac{\partial w_2}{\partial x} & \frac{\partial w_2}{\partial y} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Így a $\nabla \mathbf{w} \nabla \mathbf{w}^T$ egy olyan mátrix, melynek i . sora és j . oszlopa éppen $\nabla w_i \cdot \nabla w_j$. Jól látható, hogy (3.25) egy egyenletrendszer a súlyozó-együtthatókra, mivel \mathbf{w} egy oszlopvektor, így $\mathbf{w} \mathbf{w}^T$ egy $N \times N$ -es mátrix. Felírhatjuk mátrixokkal a végeredményt:

$$-\mathbf{K} \mathbf{c} + \mathbf{b}_N = \frac{1}{c^2} \mathbf{M} \frac{\partial^2 \mathbf{c}}{\partial t^2} + \mathbf{f}, \quad (3.27)$$

ahol \mathbf{K} úgynevezett merevségi mátrix, \mathbf{M} pedig tömegmátrix².

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{w} \nabla \mathbf{w}^T d\Omega \quad \mathbf{M} = \int_{\Omega} \mathbf{w} \mathbf{w}^T d\Omega \quad (3.28a)$$

$$\mathbf{b}_N = \int_{\Gamma} \sigma \mathbf{w} d\Gamma \quad \mathbf{f} = \int_{\Omega} f \mathbf{w} d\Omega \quad (3.28b)$$

Foglaljuk össze a kapott egyenletrendszer néhány tulajdonságát:

- Mivel az eredeti parciális differenciálegyenlet időfüggő, és a diszkretizálást csak tér szerint végeztük, a kapott egyenletrendszer még idő szerinti deriválást tartalmaz. A térben diszkretizált időfüggő problémát különböző időlépéses módszerekkel szokás megoldani.
- Amennyiben a parciális differenciálegyenlet időfüggetlen, a hibaminimalizálás eredménye egy egyenletrendszer, amit számítógépest algoritmusokkal (például Gauss eliminációval) oldhatunk meg.
- Amennyiben lineáris differenciálegyenletet diszkretizálunk (mint például a hullám-egyenletet) a diszkretizálás eredménye szintén lineáris.

²Az elnevezések a mechanikából erednek

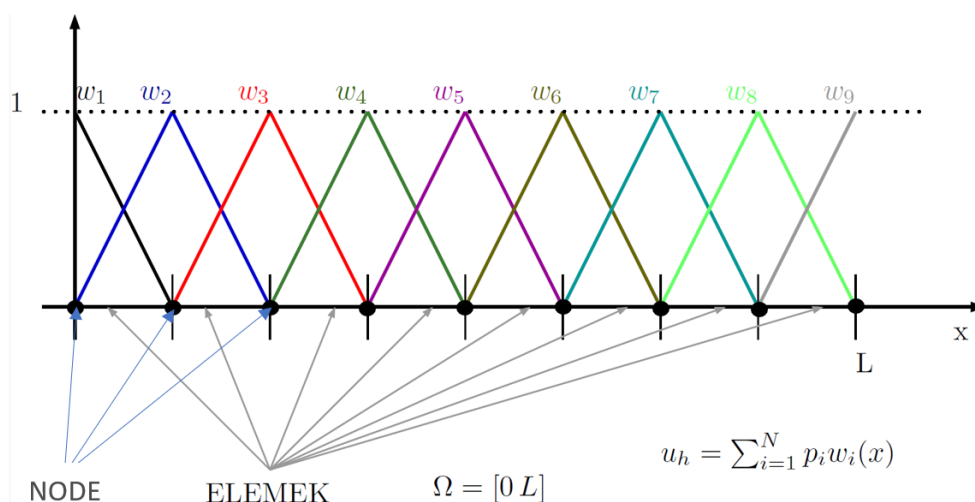
3.4. A végeelem bázisfüggvényei

A bemutatott hibaminimalizálási eljárás a parciális differenciálegyenletről egyenletrendszert készít, melyet számítógépes algoritmusokkal könnyedén meg lehet oldani. Ez egy általános módszer a bázisfüggvények megválasztásától függetlenül. Tetszőleges bázisfüggvényeket választhatunk, így például a módusokat is: ebben a hibaminimalizálás eredménye éppen a modális megoldás.

A végeelem módszer alkalmazása során lokális bázisfüggvényeket definiálunk. Ez azt jelenti, hogy minden bázisfüggvény a teljes tartomány csak egy kis részen vesz fel nullától különböző értéket. Ez lehetőséget biztosít arra, hogy tetszőleges geometriát lefedjünk, hatékonyan és pontosan modellezünk anyaginhomogenitásokat.

Egydimenziós bázisfüggvények

Egy egydimenziós bázisfüggvényrendszert mutat be a 3.2. ábra. Ez az egydimenziós példa nagyban segíti a végeelem módszer bázisfüggvényeinek megértését.



3.2. ábra. Egydimenziós kalapfüggvények.

Az ábrán látható bázisfüggvényrendszer az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

1. A tartományt kisebb résztartományokra bontjuk fel, ezeket **elemeknek** nevezzük.
2. A tartományon speciális pontokat jelölünk ki, ezeket **node**-oknak nevezzük. Az elemek határpontjain mindenképpen kijelölünk egy node-ot, de felvehetünk további node-okat is.
3. Nem szükséges, hogy az elemek azonos méretűek legyenek.
4. A bázisfüggvényeket a node-okhoz rendeljük, minden bázisfüggvény csak a hozzá tartozó node kis környezetében vesz fel nullától különböző értéket.

5. Minden node-ban kizárólag egy bázisfüggvény vesz fel nullától különböző értéket. Épp ezért ezt a bázisfüggvényt rendeljük a node-hoz.
6. Az előző pont miatt a node-hoz rendelt bázisfüggvény együtthatója egyben meg is határozza a végső megoldásfüggvény értékét abban a pontban. A node-ok között a megoldásfüggvény értékét a bázisfüggvényeknek megfelelő interpoláció határozza meg. Ez ki is használható a Dirichlet típusú peremfeltételek érvényesítésére.
7. Minden elem felett ugyanolyan függvényeket látunk: két, ellentétes meredekségű egyenest.

A bázisfüggvényrendszer egyik tulajdonságát külön is kiemelem, és kicsit jobban részletezem. Bármelyik elemre ránagyítva ugyanazokat a függvényeket látjuk: két lineárisan csökkenő függvényt.

Ha csak egy elem felett nézzük a bázisfüggvényeket, akkor **elemfüggvényeknek** nevezzük őket. Fogalmazhatunk úgy is, hogy az elemfüggvények két kritériumot teljesítenek:

- Az elem minden node-jához tartozik egy olyan elemfüggvény, melynek értéke a node-ban egységnyi.
- A node-hoz tartozó elemfüggvény az elem összes többi (jelen esetben egy darab) node-ján nulla értéket vesz fel.

Ezen kritériumokkal minden elemfüggvénynek két feltételt kell teljesíteni, melyek valóban egy-egy egyenessel kielégíthetőek.

Az egyenesek egyenletei:

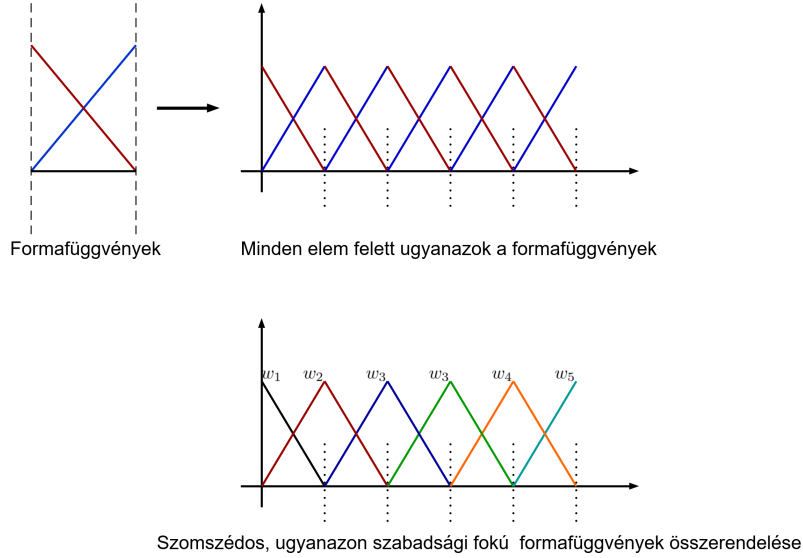
$$\begin{aligned} N_1(x) &= \frac{x_2}{x_2 - x_1} - \frac{x}{x_2 - x_1} \\ N_2(x) &= -\frac{x_1}{x_2 - x_1} + \frac{x}{x_2 - x_1} \end{aligned} \tag{3.29}$$

Könnyedén ellenőrizhető, hogy a függvények megfelelnek a fenti két kritériumnak az (x_1, x_2) elemen.

A két kritérium együttesen ún. **szabadsági fokokat** definiál, ugyanis az egyik node-hoz rendelt elemfüggvény súlyozó együtthatója meghatározza a megoldásfüggvény értékét abban a pontban. Az elemnek ebben az egydimenziós példában két szabadsági foka van: a megoldásfüggvény értéke az elem két határoló node-ján.

Azon szomszédos elemfüggvényeket, melyek ugyanazokat a szabadsági fokokat írják elő, összerendeljük, és ezzel biztosítjuk a megoldásfüggvény értékének folytonosságát. Így végül megkapjuk a 3.2. ábrán látható bázisfüggvényeket. A folyamatot a 3.3. ábra szemlélteti.

A szabadsági fokok fogalma tetszőlegesen extrapolálható, nemcsak függvény értékére, de például annak deriváltjaira, vagy bonyolultabb tulajdonságaira. A szabadsági fokok általánosan két kritériumot teljesítenek:



3.3. ábra. Az elemfüggvények összerendelése bázisfüggvényekké.

- Minden szabadsági fok (függvényérték, derivált, stb...) a hozzá tartozó node-ban egységnyi értékű.
- Minden szabadsági fok (függvényérték, derivált, stb...) az összes többi szabadsági fokban nulla értékű.

Tekintsünk most egy magasabb rendű példát, három szabadsági fokkal. Legyenek továbbra is ugyanazok az elemek, de mindegyik elem közepére vegyünk fel egy újabb node-ot és írjunk elő ott is egy szabadsági fokot. Három szabadsági fok lesz: az elem 3 node-ján az megoldásfüggvény értéke. Ezeket másodfokú polinomok képesek kielégíteni.

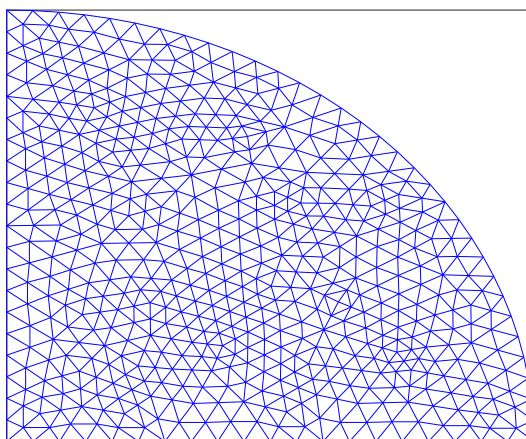
Az elemfüggvényeket az alábbi formában kereshetjük:

$$N_i = c_0 + c_1x + c_2x^2 \quad (3.30)$$

A szabadsági fokokra megfogalmazott feltételeket egy egyenletrendszer formájában írhatjuk fel. Jelöljük az elem határ node-jait x_i ill. x_{i+1} -el, az elem közepén található node-t pedig $x_{i+0.5}$ -el. Így

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i & x_i^2 \\ 1 & x_{i+0.5} & x_{i+0.5}^2 \\ 1 & x_{i+1} & x_{i+1}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Az együttható mátrix inverzének minden oszlopa egy-egy elemfüggvény polinomjainak együtthatóit tartalmazza. Ahogy korábban is, az azonos szabadsági fokot előíró, elemhatáron található elemfüggvényeket összerendeljük. Azonban az elem középpontjához rendelt elemfüggvény nem rendelendő össze semmilyen másikkal, csak az elem felett van értelmezve.



3.4. ábra. Az ún. végelem háló: a tartomány felosztása háromszögelemekre.

Megjegyzem, hogy az itt bemutatott gondolatmenetnek egydimenzióban nincs semmilyen hozadéka. A hibaminimalizálásban szereplő integrálokat ki tudnánk fejteni az elemfüggvények fogalmának bevezetése nélkül is. A gondolatmenetnek többdimenzióban van óriási előnye.

Kétdimenziós bázisfüggvények

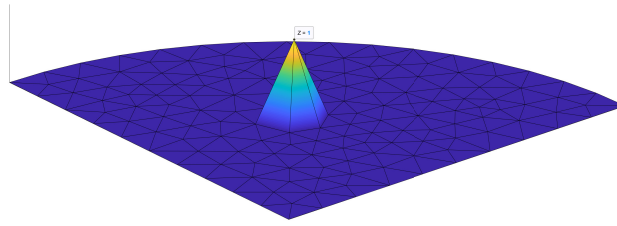
Az egydimenziós bázisfüggvény-rendszer megértése után nem nehéz kétdimenzióban ugyanezt elképzelni. Felosztjuk a tartományt kisebb résztartományokra (gyakori választást a háromszög), ezeket elemeknek nevezzük, míg a felosztást magát végelem-hálónak (lásd 3.4. ábra). A háromszögek csúcsai node-ok lesznek, de (ahogy egy dimenzióban is) további node-okat írhatunk elő akár az elemek határain, vagy azokon belül. A legegyszerűbb elemfüggvények esetében a háromszög minden pontjában előírunk egy szabadsági fokot a megoldásfüggvény értékére. Ez minden elemfüggvényre három megkötést jelent, mely egy síkkal teljesíthető:

$$N_i = c_0 + c_1x + c_2y \quad (3.32)$$

Az egyenletrendszer felírható ebben az esetben is. Jelölje a háromszög csúcsait $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1)$, $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2)$, $\mathbf{v}_3 = (x_3, y_3)$, ekkor az egyenletrendszer

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Most is a szomszédos elemek közös node-jain lévő elemfüggvényeket összerendeljük. Végül így is kalapszerű bázisfüggvényeket kapunk, lásd 3.5. ábra.

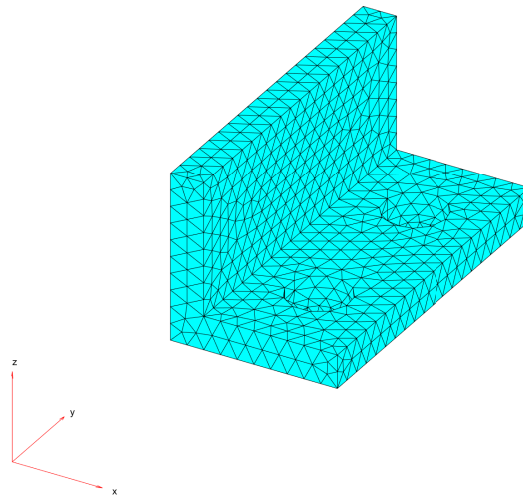


3.5. ábra. *Egyetlen, kétdimenziós kalapfüggvény.*

Kétdimenzióban már egyértelműen látható a véges elem módszer speciális bázisfüggvény-rendszerének legfontosabb előnye. A tartomány lefedésével bármilyen geometriát képesek vagyunk követni, annak minden pontján megfelelő számú szabadsági fokot előírni. Így a hibaminimalizálás mindenhova kiterjed.

Háromdimenziós bázisfüggvények

A háromdimenzió nagyon hasonlít a kétdimenzióhoz. A vizsgált tartományt például tetraéderekre bontjuk fel, és minden node-jában előírunk egy szabadsági fokot a megoldásfüggvény értékére. A tetraéderek közös node-jaihoz rendelt, azonos szabadsági fokú elemfüggvényeket összerendeljük. Ezen feltételek egy háromdimenziós hipersíkkal kielégíthetők. Az egyenletrendszer felírása ugyanúgy történik, mint az előző esetekben.



3.6. ábra. *Háromdimenziós véges elemháló.*

3.5. A Sobolev tér

Eddig mindösszesen feltételeztem, hogy a függvényeket valamilyen vektortérben reprezentálhatjuk. Ebben az alfejezetben pontosítom a definíciót.

Az L_2 tér

Az L_2 tér az Ω tartományon négyzetesen integrálható függvények vektortere, azaz

$$L_2(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\Omega} f^2 d\Omega < \infty \right\} \quad (3.34)$$

A vektortérben értelmezett belső szorzat a szokásos szorzatintegrál, mely egyben a normát is megadja.

A gyenge derivált

A gyenge derivált a hagyományos deriválás általánosítása. Legyen ψ egy tetszőleges, végtelenszer („hagyományosan”, azaz erősen) deriválható függvény, mely az Ω tartomány Γ peremén végig zérus értéket vesz fel.

Az u függvény x változó szerinti gyenge deriváltja v , ha

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \psi}{\partial x} d\Omega = - \int_{\Omega} v \psi d\Omega \quad \forall \psi \in C_0^{\infty} \quad (3.35)$$

Ebben a definícióban benne van az erős értelemben vett derivált fogalma is. Amennyiben u -nak létezik erős értelemben vett deriváltja, akkor az első tagot parciálisan integrálhatjuk:

$$\oint_{\Gamma} \psi v d\Gamma n_x - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \psi d\Omega = - \int_{\Omega} v \psi d\Omega \quad \forall \psi \in C_0^{\infty} \quad (3.36)$$

Mivel kikötöttük, hogy ψ értéke zérus a peremen, ezért a perem-menti integrál eltűnik, továbbá ψ tetszőlegessége miatt az egyenlőség akkor és csak akkor teljesülhet, ha $v = \frac{\partial u}{\partial x}$

A gyenge derivált értelmezéséhez most szorítkozzunk kizárólag a végelem módszer szempontjából fontos tulajdonságaira. Visszaemlékezhetünk, hogy a végelem módszer bázisfüggvényei kalapszerűek voltak, és a diszkretizációban az első deriváltjai szerepeltek. Az első derivált erős értelemben nem értelmezett a „kalap” töréspontjaiban, azonban ettől függetlenül integrálható. A gyenge derivált definíciója ennek ad matematikai értelmet: jól lehet a derivált nem értelmezhető bizonyos pontokban, de amíg integrál „mögött” található, addig elegendő, ha szakaszonként értelmezett.

A gyenge deriválnak egyéb tulajdonságai is vannak, és elkerülhetetlen a disztribúcióelmélet tárgyalása során. Jelen dolgozatban ennél részletesebben ezzel nem foglalkozunk.

A Sobolev tér definíciója

A Sobolev tér az L_2 tér altere, és azon függvényeket tartalmazza, melyek n . deriváltja is része az L_2 térnek.

Az elsőrendű Sobolev tér definíciója:

$$H_1(\Omega) = \left\{ f \in L_2(\Omega) \left| \frac{\partial f}{\partial x} \in L_2(\Omega), \frac{\partial f}{\partial y} \in L_2(\Omega) \right. \right\} \quad (3.37)$$

ahol a deriválást az előbb bevezetett definícióval, gyengén értelmezzük.

A másodrendű Sobolev tér definíciójára a lemez egyenleteinek felírásakor lesz szükség:

$$H_2(\Omega) = \left\{ f \in L_2(\Omega) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \in L_2(\Omega), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \in L_2(\Omega), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \in L_2(\Omega) \right. \right\} \quad (3.38)$$

A gyenge alakban u és v függvényeket a H_1 Sobolev tér részei, és a közelítő megoldásban u_h és v_h is.

A precíz definícióhoz hozzátartozik, hogy v ill. v_h is a H_1 tér olyan alterében vannak, mely a Γ peremen zérus. Továbbá figyelembe vehetjük, hogy a végeelem háló miatt az Ω tartomány nem pontosan ugyanaz diszkretizáció előtt és után. Ezen precizításoknak a végeelem módszer *alkalmazásának* szempontjából nincs kitüntetett jelentősége, így a továbbiakban eltekintek tőlük.

Amennyiben a közelítőmegoldás a megfelelő Sobolev térben van, a végeelem módszer helyessége egyszerűen bizonyítható. Ez az ún. Céa lemma.

Céa lemma

A Céa lemmát a [40, 41] irodalmak alapján mutatom be. Legyenek $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ és $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ olyan operátorok, amelyek a megoldandó differenciálegyenlet gyenge alakját fejezik ki. Például a hullámgyenlet esetében (3.19) alapján:

$$B(u, v) = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega - \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v \, d\Omega$$

$$L(v) = - \int_{\Gamma_N} \sigma v \, d\Gamma + \int_{\Omega} f v \, d\Omega$$

Az egzakt, pontos megoldást kifejező gyenge alak:

$$B(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V. \quad (3.39)$$

A közelítőmegoldást kifejező egyenlet pedig:

$$B(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \quad (3.40)$$

ahol $V_h \subset V$ véges dimenziójú altere V -nek.

A Céa lemma szerint, ha a $B(a, b)$ operátorra teljesül, hogy

- $B(a, b)$ bilineáris, azaz $B(a, b) = B(b, a)$ és $B(a, b_1 + b_2) = B(a, b_1) + B(a, b_2)$, és

- $B(a, b) \leq \gamma \|a\| \|b\| \quad \forall a, b \in V$, ahol $\gamma > 0$ konstans, és
- $B(a, a) \geq \alpha \|a\|^2 \quad \forall a \in V$, ahol $\alpha > 0$ konstans,

akkor

$$\|u - u_h\| \leq \frac{\gamma}{\alpha} \|u - v_h\| \quad \forall v_h \in V_h \quad (3.41)$$

Ez azt jelenti, hogy u_h a lehető legjobb közelítése u -nak a V_h térben lévő függvények közül. Az első feltétel éppen a vektortér függvényeinek folytonosságát fejezi ki. Tehát, ha a végelem bázisfüggvényei folytonosak (azaz a megfelelő Sobolev térben vannak), akkor a közelítőmegoldás optimális. A folytonossági feltételt épp akkor biztosítjuk, amikor a szomszédos elemek azonos szabadsági fokot előíró függvényeit összerendeljük: ekkor ez első derivált gyenge értelemben értelmezhető lesz.

A Céa lemma viszonylag könnyen bizonyítható. Először is használjuk ki, hogy $V_h \subset V$, így

$$B(u, v_h) = L(v_h) = B(u_h, v_h) \Rightarrow B(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h \quad (3.42)$$

Ezt kihasználva a bizonyítás:

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_h\|^2 &\leq B(u - u_h, u - u_h) = B(u - u_h, u - v_h) + B(u - u_h, v_h - u_h) \\ &= B(u - u_h, u - v_h) \leq \gamma \|u - u_h\| \|u - v_h\|, \end{aligned} \quad (3.43)$$

melyből a lemma egyszerű átrendezéssel megkapható.

3.6. A Dirichlet típusú peremfeltételek érvényesítése

A Neumann típusú peremfeltételek könnyedén érvényesíthetők, mert a (3.19) gyenge alakban megjelent $\frac{\partial u}{\partial n}$. A Dirichlet peremfeltételek nem érvényesíthetők ilyen könnyedén. Az alábbiakban bemutatok néhány lehetséges módszert.

Súlyozó együtthetők előírása

A Dirichlet peremfeltételek érvényesítésére a legkézenfekvőbb módszer a súlyozó együtthetők előírása. A végelem módszer bázisfüggvényrendszerének köszönhetően ez könnyedén megtehető, ugyanis bizonyos pontokban (a node-okban) előírható a megoldásfüggvény értéke a node-hoz tartozó súlyozó együtthetők értékének előírásával. Ehhez az egyenletrendszer mátrixait és vektorait kell módosítani. A node-okban előírt értékek között a bázisfüggvényeknek megfelelő interpoláció fog teljesülni³. A kalapszerű bázisfüggvények esetében például lineáris interpoláció fog megvalósulni.

³2 és 3 dimenzióban; 1 dimenzióban abszolút pontos a peremfeltétel-érvényesítés

Ha az i . node súlyozó-együtthatóját szeretnénk előírni akkor például a \mathbf{K} mátrix i . sorában minden elemet nullára írunk, kivéve az i . oszlopot. Továbbá az \mathbf{M} mátrix i . sorát kinullázzuk, a \mathbf{b}_N vektor i . elemét kinullázzuk és az \mathbf{f} vektor i . elemébe írjuk az előírni kívánt értéket. Lásd 3.7. ábra.

Lagrange Multiplikátor

A Lagrange multiplikátor feltételes szélsőérték-keresésre alkalmas eljárás. A végeelem módszer épp a hibaminimalizáláson alapul, ezért kézenfekvőnek tűnik a Lagrange multiplikátor használata.

A részletes levezetések megtalálhatók az [1] hivatkozásban, itt csak a legfontosabb összefüggéseket ismertetem. A peremfeltételt gyenge értelemben írjuk elő az az alábbi, peremmenti integrállal:

$$\int_{\Gamma_D} \mu(u - g) d\Gamma = 0 \quad (3.44)$$

Az előírandó peremfeltétel g , továbbá μ egy tetszőleges függvény - hasonlóan tesztelőfüggvény, mint korábban v volt. Értelemszerű, hogy ha μ tetszőleges, és az egyenlet teljesül, akkor a peremfeltétel is érvényesül. Ha μ csak egy véges bázisú altérben tetszőleges, akkor a peremfeltételt minimális hibával érvényesítettük. Az egyenletet diszkretizáljuk a korábban ismertetett módon. A μ tesztelőfüggvény kereshető ugyanabban a bázisban, mint u és v . A diszkretizáció után az eredmény egy mátrixegyenlet.

$$\mathbf{B}_D \mathbf{c} - \mathbf{g} = 0 \quad (3.45)$$

A \mathbf{B}_D mátrix több azonosan nulla sort is tartalmazhat. Ezek nem jelentenek további megkötéseket, nem járulnak hozzá a peremfeltétel érvényesítéséhez, így akár ki is vehetők a mátrixból.

3.7. ábra. Példa a Dirichlet peremfeltételek előírására: $c_1 = 5, c_3 = 8$. Az üresen hagyott rubrikákban tetszőleges érték szerepelhet.

Ezt Lagrange Multiplikátorral az eredeti (3.27) egyenlethez írhatjuk:

$$-\mathbf{K}\mathbf{c} + \mathbf{b}_N = \frac{1}{c^2}\mathbf{M}\frac{\partial^2\mathbf{c}}{\partial t^2} + \mathbf{f} + \lambda\mathbf{B}_D^T \quad (3.46a)$$

$$\mathbf{B}_D\mathbf{c} = \mathbf{g} \quad (3.46b)$$

A Lagrange multiplikátor bonyolultabb peremfeltételek előírására is alkalmas ellenben a súlyozó együtthatók előírásának módszerével. Előfordulhatnak olyan peremfeltételek, mely során nem értéket írunk elő, hanem valamilyen csatolást a perem különböző részei között. Persze ezek egyértelműségének vizsgálata mindig egy külön feladat. A Lagrange multiplikátor jelentős hátránya, hogy megnöveli az ismeretlenek számát, mégpedig Dirichlet peremen található bázisfüggvények számával.

Visszavezetés Neumann peremfeltételre

A Neumann peremfeltétel könnyen érvényesíthető, így kézenfekvő ötlet a Dirichlet feltételt valamilyen módon visszavezetni erre [2]. Tekintsük az alábbi peremfeltételt:

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial n} + u = g \quad (3.47)$$

Ez éppen az impedancia típusú peremfeltétel speciális esete (lásd 2.2.). Ha ε értéke kicsi, akkor jó közelítéssel Dirichlet peremfeltétel érvényesül. A (3.17) gyenge alak \mathfrak{B} peremmenti integráljába beírhatjuk ezt az összefüggést.

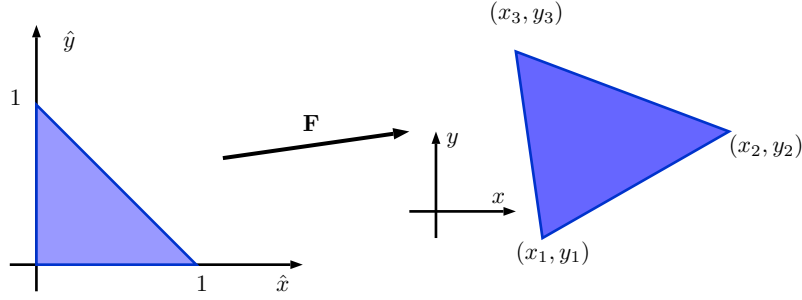
$$\oint_{\Gamma} v\frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma_N} v\sigma d\Gamma + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma_D} (g-u)v d\Gamma \quad (3.48)$$

Diszkretizálás után pedig megkapjuk:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_D &= \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma_D} \mathbf{w}\mathbf{w}^T d\Gamma \\ \mathbf{b}_D &= \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma_D} g\mathbf{w} d\Gamma \end{aligned} \quad (3.49)$$

Ezzel a megoldandó egyenletrendszer

$$-(\mathbf{K} + \mathbf{B}_D)\mathbf{c} + \mathbf{b}_N + \mathbf{b}_D = \frac{1}{c^2}\mathbf{M}\frac{\partial^2\mathbf{c}}{\partial t^2} + \mathbf{f} \quad (3.50)$$



3.8. ábra. Transzformáció a referenciatartomány és a globális tartomány között.

A módszer nehézsége éppen az ε érték optimális értékének meghatározása. Túl kicsi érték esetén a peremfeltételek nem teljesülnek pontosan, túl nagy érték esetén pedig a keletkező $(\mathbf{K} + \mathbf{B}_D)$ kondíciószáma lesz kedvezőtlen.

3.7. A referenciaelem

A korábbiakban bemutattam a végelem módszer bázisfüggvényinek konstrukcióját. A tartományt kisebb (egyforma alakú, de nem feltétlenül egyforma méretű) poligonokra bontjuk fel, és mindegyiken ugyanazon szabályok szerint definiálunk elemfüggvényeket. Ez a szabályszerűség kihasználható az egyenletrendszer integráljainak kifejtésénél [35].

Az (3.28) integrálok a teljes tartományra vonatkoznak, de elemenként is elvégezhetjük. Legyen

$$\Omega \approx \bigcup_{k=1}^E \Omega_k \quad (3.51)$$

ahol Ω_k egy résztartomány (például kétdimenzióban egy háromszög), E pedig az elemek száma. A mátrixok kifejtéséhez az elemenkénti integrálok összege szükséges, azaz

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^E \int_{\Omega_k} \mathbf{w}\mathbf{w}^T d\Omega_k \quad (3.52)$$

Transzformáció a referenciatartományba

Mivel minden elem felett ugyanazok a függvények láthatók (ezek voltak az elemfüggvények), az integrálást elvégezhetjük helyettesítéssel egy referenciatartományban. Példaként a kétdimenziós háromszögelemet használom.

A 3.8. ábrán látható transzformáció felírható az alábbi módon:

$$\mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

ahol x, y a globális koordináták, \hat{x}, \hat{y} a referenciatartomány lokális koordinátái. Könnyedén beláthatjuk, hogy a transzformáció a referenciaháromszög pontjait a globális háromszög pontjaiba képezi le - ez a három pont pedig egyértelműen meghatározza a globális háromszöget. A Jakobi mátrix értelemszerűen:

$$\mathbf{J}_k = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

A transzformációval a (3.52) egyenlet integráljai helyettesítéssel is kifejtethők az alábbi módon:

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^E |\det(\mathbf{J}_k)| \int_{\Omega_r} (\mathbf{w} \circ \mathbf{F}_k)(\mathbf{w}^T \circ \mathbf{F}_k) d\Omega_r \quad (3.55)$$

ahol Ω_r a referencia-elem. Mivel a Jakobi-determináns konstans, ezért kihozható az integrálásból. A diszkrétizált mátrix kiértékelését visszavezettük referenciatartományi integrálok kiértékelésére.

Valójában ennél még hatékonyabban generálhatók a mátrixok, ha bevezetjük az ún. elemenkénti mátrixokat.

Az elemenkénti tömeg és merevségi mátrix

A (3.52) összeg minden tényezője egy $N \times N$ -es mátrix. Ugyanakkor egy adott elem felett nézve a \mathbf{w} bázisfüggvények nagy része nulla (mert lokálisak), ezért a mátrixok elemeinek túlnyomó többsége is nulla.

Az elem felett nézve, kizárólag az elemfüggvények vesznek fel nullától különböző értéket - így például a kétdimenziós elemfüggvények esetében összesen 3 bázisfüggvény lesz nem nulla. Ezzel a (3.52) egyenlet minden tényezője egy olyan $N \times N$ -es mátrix, melyben összesen 9 elem nem nulla értékű.

Tekinthetünk erre a 9 elemre úgy is, mint az elemfüggvényekből alkotott elemmátrix. Az elemfüggvényeket korábban N_i -vel jelöltük. Jelölje a belőlük alkotott oszlopvektort \mathbf{N} .

Ezzel az elemenkénti tömegmátrix

$$\mathbf{M}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{N} \mathbf{N}^T d\Omega_e, \quad (3.56)$$

és természetesen hasonlóan az elemenkénti merevségi mátrix:

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} \nabla \mathbf{N} \nabla \mathbf{N}^T d\Omega_e \quad (3.57)$$

Az elemenkénti mátrix egyértelműen beilleszthető a globális mátrixba, hiszen minden elemfüggvényről pontosan tudjuk, hogy melyik bázisfüggvény részét képezi. Természetesen a szomszédos elemek azonos szabadsági fokot előíró elemfüggvényeit összerendeltük bázisfüggvényekké, az elemenkénti mátrix beillesztése során a tényezőket összeadjuk, akkor éppen a (3.52) egyenlet összegzését hajtjuk végre. Praktikusan a globális mátrix azonosan nulla értékekkel indul, és az elemenkénti mátrixokat összeadással illesztjük be a globális mátrixba.

Az elemenkénti mátrixok természetesen kifejthetők a referenciatartományban a transzformációt követően.

Vezessük be a **formafüggvények** fogalmát, melyek a referencia elem felett *ugyanazon* szabadsági fokok által meghatározott függvényeket jelentik. Jelöljük ezek oszlopvektorát $\hat{\mathbf{N}}$ -al. Például a kétdimenziós referencia-háromszög (lásd 3.8. ábra) felett az alábbi formafüggvények kielégítik a szabadsági fokokra vonatkozó két kritériumot.

$$\hat{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} 1 - \hat{x} - \hat{y} \\ \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

Az elemenkénti mátrixok kifejthetők a formafüggvények segítségével, ha feltételezzük, hogy $\mathbf{N} \circ \mathbf{F} = \hat{\mathbf{N}}$, azaz az elemfüggvények transzformáltjai megegyeznek a referencia elem formafüggvényeivel - melyeket ugyanazok a szabadsági fokok határoznak meg. Az elemenkénti tömegmátrix így:

$$\mathbf{M}_e = |\det(\mathbf{J}_k)| \int_{\Omega_r} \hat{\mathbf{N}} \hat{\mathbf{N}}^T d\Omega_r \quad (3.59)$$

Az integrál így már teljesen független a globális háromszög elhelyezkedésétől, hiszen a referenciatartományban értékelendő ki. Az integrált a globális háromszöget jellemző Jakobi mátrixszal (\mathbf{J}_k) kell megszorozni. Azonnal látszik a módszer előnye: nem szükséges minden háromszögelemre az integrálást elvégezni, elegendő csak egyszer megtenni. Ezzel a számítási igény drasztikusan lecsökken.

Az elemenkénti merevségi mátrix a tömegmátrixhoz hasonlóan kifejthető a referenciatartományban. Azonban a merevségi mátrix integrandusa deriválást is tartalmaz, így a transzformációhoz a láncszabály alkalmazása válik szükségessé:

$$\nabla_{xy} \hat{\mathbf{N}} = (\nabla_{\hat{x}\hat{y}} \hat{\mathbf{N}}) \mathbf{J}_k^{-1} \quad (3.60)$$

Az egyenletben a ∇ operátor alsó indexében jelöltem, hogy melyik tartományban értelmezendő. A „kalapos” tartomány a referencia, a „kalap nélküli” a globális. Így az elemenkénti merevségi mátrix:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_e &= |\det(\mathbf{J}_k)| \int_{\Omega_r} \nabla_{\hat{x}\hat{y}}(\hat{\mathbf{N}}\mathbf{J}_k^{-1})(\nabla_{\hat{x}\hat{y}}\hat{\mathbf{N}}\mathbf{J}_k^{-1})^T d\Omega_r = \\
&= |\det(\mathbf{J}_k)| \int_{\Omega_r} \nabla_{\hat{x}\hat{y}}\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{J}_k^T\mathbf{J}_k)^{-1}\nabla_{\hat{x}\hat{y}}\hat{\mathbf{N}}^T d\Omega_r
\end{aligned} \tag{3.61}$$

A Jakobi mátrix természetesen most is függ az globális háromszögelem elhelyezkedésétől, így első ránézésre ez az integrál nem fejthető ki előre. Átalakítható azonban előre kifejtendő mátrixok lineáris kombinációjára. Ezt később, az implementáció részleteinél mutatom be.

Fontos ismét hangsúlyozni, hogy a módszer feltétele, hogy $\mathbf{N} \circ \mathbf{F} = \hat{\mathbf{N}}$, azaz az elemfüggvények transzformáltjai megegyeznek a referencia elem formafüggvényeivel. Ez nincs feltétlenül így, és előrebocsátom, hogy pont olyan elemekre lesz szükség a cintányér szintéziséhez, ahol ez nem teljesül.

A $\mathbf{N} \circ \mathbf{F} = \hat{\mathbf{N}}$ feltétel egyébként minden olyan esetben teljesül, amikor a szabadsági fokok között csak függvényértékek szerepelnek [21]. Ez pedig minden másodfokú parciális differenciálegyenlet esetében elegendő a végeselem módszer alkalmazásához.

Az elemenkénti gerjesztővektorok

A (3.27) egyenletben szereplő gerjesztővektorok szintén összerakhatók elemenkénti vektorokból, utóbbiak pedig kifejtethetők a referenciatartományban is. Az elemenkénti gerjesztővektor:

$$\mathbf{f}_e = |\det(\mathbf{J}_k)| \int_{\Omega_r} (f \circ \mathbf{F})\hat{\mathbf{N}} d\Omega_r \tag{3.62}$$

A Neumann peremfeltételt érvényesítő \mathbf{b}_N gerjesztővektor peremmenti integrál kifejtését teszi szükségessé. A végeselem háló a peremet is résztartományokra, részperemekre osztja, így ugyanúgy résztartományonként kifejtethetjük az integrálokat. A peremmenti integrálok kiértékeléséhez a perem görbét paraméterezni kell. Ennek általános formája a következő:

$$\int_{\Gamma} f(x, y) d\Gamma = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \tag{3.63}$$

ahol $x(t), y(t)$ a görbe paraméterezése t változó szerint. A végeselemháló miatt a vizsgált tartomány pereme szakaszokból áll, így a görbe paraméterezését szakaszonként végezhetjük el. Egy (x_1, x_2) egyenes szakaszt a következőképpen paraméterezhetjük:

$$x(t) = (1 - t)x_1 + tx_2 \tag{3.64a}$$

$$y(t) = (1 - t)y_1 + ty_2 \tag{3.64b}$$

Ez a paraméterezés a szakaszt a $[0, 1]$ egydimenziós referenciatartományra képezi le. Ter-

mészetesen a \mathbf{b}_N vektorra is értelmezhetjük az elemvektorok fogalmát, mely az alábbi lesz:

$$(\mathbf{b}_N)_e = L_s \int_0^1 \sigma(x(t), y(t)) \mathbf{N}(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)) dt \quad (3.65)$$

ahol L_s a szakasz hossza. A (3.65) egyenletben még az elemfüggvények szerepelnek.

Beláthatjuk, hogy a (3.64) paraméterezés az \mathbf{F} transzformáció és az $\hat{y} = 0$ helyettesítés egymás utáni alkalmazása. Ezzel az elemenkénti vektor is felírható a formafüggvények segítségével, azaz:

$$(\mathbf{b}_N)_e = L_s \int_0^1 (\sigma \circ \mathbf{F}) \hat{\mathbf{N}} \Big|_{\hat{y}=0} d\hat{x} \quad (3.66)$$

Asszemblálás

A bevezetett elemenkénti mátrixokból és vektorokból összerakható a globális mátrix. Ezt a folyamatot asszemblálásnak nevezik az irodalomban. Az elemenkénti mátrixok és vektorok kiértékelése egyszerűbb mint a globálisoké, hiszen az integrálok egy része előre kifejthető a referenciatartományban.

Az asszemblálás, mint algoritmus ismertetésére a háromszögelemet használom. Az asszemblálás folyamata a következő:

1. Számozzuk a node-okat. A node-hoz tartozó bázisfüggvény is ezt a számot kapja.
2. Nullára inicializáljuk a globális mátrixok összes elemét.
3. Minden háromszögelemre:
 - (a) Meghatározzuk a háromszög node-jainak indexét. Jelölje ezek indexét i_1, i_2, i_3 .
 - (b) Meghatározzuk a Jakobi-mátrixot a háromszög pontjait ismerve.
 - (c) Kiértékeljük az elemenkénti mátrixot, felhasználva az előre kiszámolt integrálokat.
 - (d) Az indexek kijelölnek egy almátrixot a globális mátrixban: $\mathbf{K}(i = 1..3, j = 1..3)$.
 - (e) Az indexek által kijelölt almátrixhoz **hozzáadjuk** az elemenkénti mátrixot. Azért adjuk hozzá, mert az azonos szabadsági fokot előíró elemfüggvényeket összerendeltük bázisfüggvénnyé, így egy bázisfüggvény több elem felett is értelmezve van, és az elemenkénti integrálok összege adja a teljes integrál végső értékét.

Ez az asszemblálási procedúra nagyban megkönnyíti a globális egyenletrendszer megalkotását. Az elemenkénti mátrixok könnyedén, hatékonyan kifejthetők.

3.8. Megoldás időtartományban

A végeelem módszert alapvetően térbeli problémákra fejlesztették ki, és láthattuk, hogy a hibaminimalizálás csak térben történt meg. Ha a probléma időfüggő, akkor egy idő szerinti differenciálegyenlet-rendszer megoldása válik szükségessé. Ennek közelítő megoldására különböző időlépéses módszereket alkalmazhatunk, melyek közül most egyet mutatok be.

Mondanom sem kell, hogy számtalan módszer van, és mindegyiknek megvan a maga előnye. Ne felejtjük azonban el, hogy a végső cél a cintányér szintézise, ezért egy olyan módszert mutatok be, mely hasznos lesz annak szintézise során is.

Differencia-operátorok

Az időtartománybeli differenciálegyenlet időlépéses diszkrétizációjának kényelmes leírásához differenciaoperátorokat vezetek be. Legyen a diszkrét időlépés Δt , és legyen

$$\mathbf{c}_n = \mathbf{c}(t)|_{t=n\Delta t} \equiv \mathbf{c}(n\Delta t) \quad (3.67)$$

ahol n egész számot jelöl. Az alábbi differencia-operátorokat vezetjük be az időlépéses módszerek leírásához.

$$\delta_{t+}\mathbf{c} = \frac{1}{\Delta t}(\mathbf{c}_{n+1} - \mathbf{c}_n) \quad (3.68a)$$

$$\delta_{t-}\mathbf{c} = \frac{1}{\Delta t}(\mathbf{c}_n - \mathbf{c}_{n-1}) \quad (3.68b)$$

$$\delta_t\mathbf{c} = \frac{1}{2\Delta t}(\mathbf{c}_{n+1} - \mathbf{c}_{n-1}) \quad (3.68c)$$

$$\delta_{tt}\mathbf{c} = \frac{1}{\Delta t^2}(\mathbf{c}_{n+1} - 2\mathbf{c}_n + \mathbf{c}_{n-1}) \quad (3.68d)$$

A differencia-operátorok számos azonossággal rendelkeznek [6]. A linearitásuk mellett, az alábbi azonosságokra lesz szükség a későbbiekben:

$$(\delta_t\mathbf{c}^T)\mathbf{A}(\delta_{tt}\mathbf{c}) = \frac{1}{2}\delta_{t+}((\delta_{t-}\mathbf{c}^T)\mathbf{A}(\delta_{t-}\mathbf{c})) \quad (3.69a)$$

$$(\delta_t\mathbf{c}^T)\mathbf{A}\mathbf{c} = \frac{1}{2}\delta_{t+}(\mathbf{c}_n^T\mathbf{A}\mathbf{c}_{n-1}), \quad (3.69b)$$

ahol \mathbf{A} négyzetes, szimmetrikus mátrix. Az azonosságok beláthatóak a differenciaoperátorok definícióinak felhasználásával.

A véges differencia algoritmus

Tekintsük a (3.27) időfüggő differenciálegyenlet-rendszert. Egy lehetséges véges differencia diszkrétizáció a következő.

$$\frac{1}{c^2}\mathbf{M}\delta_{tt}\mathbf{c} + \mathbf{f}_n = -\mathbf{K}\mathbf{c}_n + (\mathbf{b}_N)_n \quad (3.70)$$

Ha beírjuk a differencia operátorok definícióját, és átrendezzük az algoritmust, akkor egy explicit időlépéses módszert kapunk.

$$\mathbf{c}_{n+1} = c^2 \Delta t^2 \mathbf{M}^{-1} (-\mathbf{K} \mathbf{c}_n + (\mathbf{b}_N)_n - \mathbf{f}_n) + 2\mathbf{c}_n - \mathbf{c}_{n-1} \quad (3.71)$$

Az algoritmust explicitnek nevezzük, mert az $(n+1)$. időpillanatbeli megoldás expliciten felírható az előző $(n, n-1)$ időpillanatbeli megoldásokból. A módszert gyakran nevezik Strömer-Verlet módszernek, de akár az előrelépő Euler módszer kiterjesztéseként is gondolhatunk rá.

Érdemes megfigyelni a kezdeti feltételek szükségességét. Az iterációt nem lehet elkezdni \mathbf{c}_0 és a \mathbf{c}_{-1} ismerete nélkül. Előbbi egyértelműen a függvény értékére vonatkozó kezdeti feltétel, utóbbi pedig a függvény első deriváltjára vonatkozó kezdeti feltételből határozható meg:

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t}(t=0) \approx \delta_{t-} \mathbf{c}|_{n=0} \equiv \frac{\mathbf{c}_0 - \mathbf{c}_{-1}}{\Delta t} \quad (3.72)$$

A véges differencia módszer mindig csak egy közelítő megoldása az eredeti, időfüggő differenciálegyenletnek. Persze a Δt csökkentésével a hiba is csökken, melynek tendenciáját Taylor sorfejtéssel megvizsgálhatjuk. A közelítés hibája Δt értékével négyzetesen csökken [6], azaz

$$\delta_{tt} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \mathcal{O}(\Delta t^2). \quad (3.73)$$

A különböző véges differencia algoritmusok átfogó, részletes analízise Bilbao [6] könyvében megtekinthető. Nem mellesleg ugyanebben a könyvben bemutatásra kerül a cintányér fizikai alapú szintézise véges differenciák módszerével.

3.8.1. Stabilitás

Az explicit véges differencia algoritmusok nagy előnye, hogy a következő időpillanatbeli megoldáshoz kizárólag az előző időpillanatbeli megoldásokon kell átalakításokat végrehajtani. Ez praktikus azt jelenti, hogy nem kell semmilyen egyenletrendszert megoldani, ez pedig egyenesen vezet a számítási igény drasztikus csökkenéséhez.

Minden előnynek van azonban árnyoldala. Az explicit véges differencia módszerek esetében az algoritmus instabillá válhat, azaz a „közelítő” megoldás divergens lesz. Mit is értünk stabilitás alatt? Praktikus azt mondhatjuk, hogy a rendszer véges gerjesztés esetén véges értékű választ ad minden diszkrét idejű időpillanatban.

Ennél egy pontosabb definíció a rendszer aszimptotikus stabilitása, melyet a gerjesztetlen rendszerre mondunk ki (azaz $\mathbf{b}_N = \mathbf{f} = 0$). A rendszert globálisan aszimptotikusan stabilisnak nevezzük, ha bármely kezdeti feltétel esetén a megoldás nullához tart⁴.

⁴Ez a definíció kissé pontatlan, de a stabilitás fogalmának lényegét helyesen szemlélteti

A (3.71) véges differencia algoritmus egy lineáris diszkrét idejű rendszert ír le. Ennek stabilitási feltételei könnyedén megadhatók frekvenciatartománybeli analízisekkel [6], ugyanakkor nemlineáris rendszerek esetében (mint például a cintányér) ez már sokkal körülményesebb.

Éppen ezért érdemes (diszkrét) időtartományban vizsgálni a rendszer stabilitását. A továbbiakban az ún. Lyapunov módszerrel adok kritériumot a véges differencia algoritmus stabilitására [19].

A Lyapunov stabilitás kritériumai

Tekintsünk egy gerjesztetlen rendszert, melynek állapotátmenetét egy tetszőleges (nem feltétlenül lineáris) függvény adja meg.

$$\mathbf{x}_{n+1} = f(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n-1}, \dots) \quad (3.74)$$

A rendszer Lyapunov szerint globálisan aszimptotikusan stabilis, ha létezik olyan

$$\mathfrak{h}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n-1}, \dots) \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.75)$$

függvény melyre a következő feltételek teljesülnek [19].

1. $\mathfrak{h}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots) = 0$
2. $\mathfrak{h}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n-1}, \dots) > 0 \quad \forall \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n-1}, \dots \neq \mathbf{0}$ (azaz \mathfrak{h} pozitív definit)
3. Ha $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$, akkor $\mathfrak{h} \rightarrow \infty$
4. $\mathfrak{h}_{n+1} - \mathfrak{h}_n \leq 0 \quad \forall \mathbf{x}$

A kritériumok matematikai értelmezése mellett érdemes fizikai interpretációt is adni nekik. Tekintsünk \mathfrak{h} -ra úgy, mint a DI rendszerben tárolt energia egy adott időpillanatban. Az energia természetesen nulla, ha az állapotváltozók értéke nulla (1. kritérium). Az energia mindig pozitív mennyiség (2. kritérium). Az energia végtelenhez tart, ha az állapotváltozó vektorainak hossza a végtelenhez tart (3. kritérium). Végül (talán a legfontosabb), hogy a rendszer energiája vagy megmarad, vagy csökken (4. kritérium) de gerjesztés nélkül nem növekszik.

A stabilitás vizsgálatához olyan függvényt kell találni, mely teljesíti a fenti kritériumokat. Szerencsére valós rendszerek véges differencia diszkrétizációja során a diszkrét idejű energia hasonló formát ölt, mint a folytonos idejű energia.

A DI rendszer energiamérlege

A véges differencia algoritmus által reprezentált DI rendszer gerjesztés nélkül az alábbi formában írható fel:

$$\delta_{tt} \mathbf{M} \mathbf{c} = -\mathbf{c}^2 \mathbf{K} \mathbf{c} \quad (3.76)$$

Célunk egy olyan energiafüggvényt találni, amely teljesíti a Lyapunov stabilitás kritériumait. Egy ilyen energiafüggvény könnyedén megtalálható, ha felírjuk a DI rendszer energiámérlegét - hasonlóan, mint FI esetben. Szorozzuk be az egyenlet mindkét oldalát $\delta_t \mathbf{c}^T$ -al, és alkalmazzuk a (3.69a) és (3.69b) azonosságokat, ismerve, hogy \mathbf{K} és \mathbf{M} szimmetrikus mátrixok. Ezzel

$$\delta_{t+} \mathfrak{h}_{lin} = 0, \quad (3.77)$$

ahol

$$\mathfrak{h}_{lin} = \frac{1}{2} \delta_{t-} \mathbf{c}^T \mathbf{M} \delta_{t-} \mathbf{c} + \frac{c^2}{2} \mathbf{c}_n \mathbf{K} \mathbf{c}_{n-1} \quad (3.78)$$

Ez a diszkrét idejű rendszer energiámérlege. Egyértelműen teljesül Lyapunov 1. kritériuma, továbbá a (3.77) egyenlet önmagában kifejezi a Lyapunov stabilitás 4. kritériumát. A rendszer veszteségmentessége miatt az egyenlőség áll fenn. Az energiafüggvény pozitív definitése csak megfelelő Δt érték mellett teljesül, így épp ez adja a stabilitási feltételt is. Belátható (lásd F.2), hogy az energiafüggvény akkor pozitív definit, ha a

$$\mathbf{K} \mathbf{c} = \lambda \mathbf{M} \mathbf{c} \quad (3.79)$$

általánosított sajátértékprobléma legnagyobb λ_{max} sajátértékére fennáll a

$$\Delta t < \frac{2}{\sqrt{\lambda_{max}}} \quad (3.80)$$

feltétel.

3.9. A húr végeelem modellje

A szintézismódszereket bevezető fejezetben a húr modelljét használtam példaként. A (2.16) hullámegyenlet egydimenziós esete éppen a húr legegyszerűbb, lineáris modelljét adja meg.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.81)$$

Legyen a vizsgált tartomány $\Omega = [0, L]$. A gyenge alak a (2.7) parciális integrálással állítható elő, és az alábbi, egyszerű formát ölti:

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} v \right]_{x=0}^{x=L} - \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx = \frac{1}{c^2} \int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v dx \quad (3.82)$$

Legyen a húr mindkét vége rögzítve, azaz a $u = 0$ peremfeltételt alkalmazzuk. Ha most $u \approx u_h$ és $v \approx v_h$, és u_h -t és v_h -t is ugyanabban a bázisban keressük, a diszkrétizáció a

következő lesz ⁵:

$$\mathbf{M} \frac{\partial^2 \mathbf{c}}{\partial t^2} = -c^2 \mathbf{K} \mathbf{c} \quad (3.83)$$

ahol

$$\mathbf{M} = \int_0^L \mathbf{w} \mathbf{w}^T dx \quad \mathbf{K} = \int_0^L \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial x} dx \quad (3.84)$$

A mátrixok asszemblálásához az elemenkénti mátrixok ismerete szükséges. A referenciatartomány legyen a $[0, 1]$ szakasz, ezzel egy tetszőleges (x_1, x_2) elem transzformációja:

$$F = x = (x_2 - x_1) \hat{x} + x_1 \quad (3.85)$$

ahol a kalapos változó ismét a referenciatartományban értendő. A transzformáció Jakobi determinánsa $x_2 - x_1$, azaz az elem hossza.

Alkalmazzuk a 3.2. ábra kalapszerű bázisfüggvényeit. Az ehhez tartozó formafüggvények a referenciatartomány felett:

$$\hat{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} 1 - \hat{x} \\ \hat{x} \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

Az elemenkénti tömegmátrix

$$\mathbf{M}_e = L_e \int_0^1 \hat{\mathbf{N}} \hat{\mathbf{N}}^T d\hat{x} = \frac{L_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

ahol L_e az elem hossza. Az elemenkénti merevségi mátrix integrálja egydimenziós esetben könnyedén kifejezhető előre, mert a Jakobi „mátrix” konstans:

$$\mathbf{K}_e = \frac{1}{L_e} \int_0^1 L_e \frac{\partial \hat{\mathbf{N}}}{\partial \hat{x}} \frac{1}{L_e} \frac{\partial \hat{\mathbf{N}}}{\partial \hat{x}} \frac{1}{L_e} d\hat{x} = \frac{1}{L_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

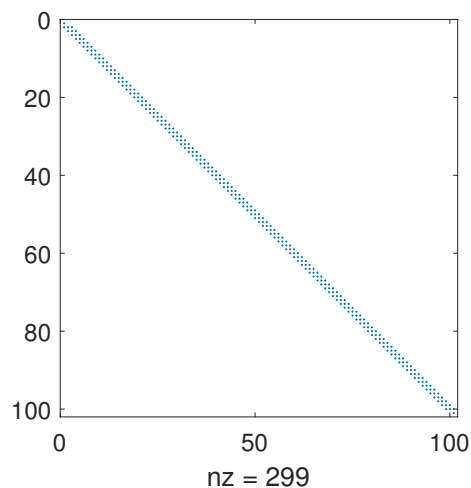
Érdemes megfigyelni a mátrixok kitöltöttségét a 3.9. ábrán. Mivel a bázisfüggvények lokálisak a keletkező mátrixok közel diagonálisak lesznek. Éppen ezért MATLAB implementáció során érdemes a **sparse** mátrixokat alkalmazni. Ekkor a MATLAB csak a nem-nulla értékű tagokat (és azok pozícióját) tárolja el, ezzel nagy, de hiányos mátrixok esetében jelentősen csökkenti a memóriaigényt.

Modális megoldás

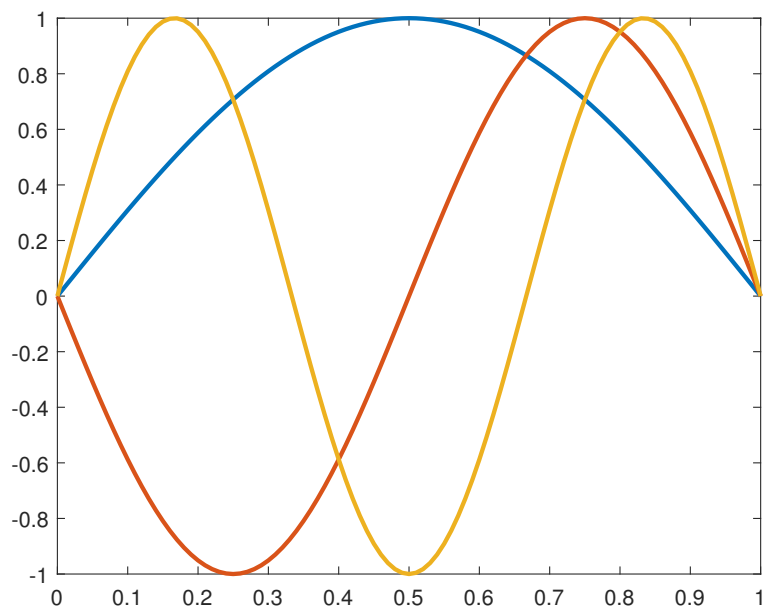
A modális megoldás a diszkrétizált egyenletrendszerrel is megadható. Belátható, hogy a modális megoldás az alábbi, általánosított sajátértékproblémára vezet [6]:

$$\mathbf{K} \mathbf{c} = k^2 \mathbf{M} \mathbf{c} \quad (3.89)$$

⁵A $\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=0}^{x=L}$ értéke zérus lesz, mert előírjuk, hogy $v = 0$ a Dirichlet peremen



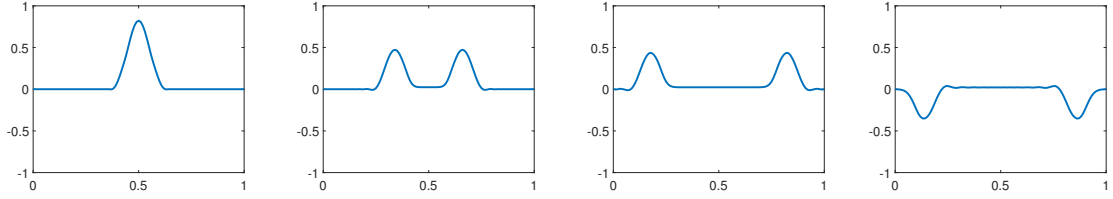
3.9. ábra. A \mathbf{M} és \mathbf{K} mátrixok kitöltöttsége. Az ábrán minden nem nulla elemet pont jelöl.



3.10. ábra. A húr első három módusa. A tartomány 100, egyforma méretű elemre van osztva, a húr a szélein rögzítve van.

Ez MATLAB-ban például az `eigs` függvénnyel oldható meg. A peremfeltételek érvényesítéséhez \mathbf{K} , \mathbf{M} mátrixok megfelelő elemeit módosítani kell.

A 3.10. ábrán látható a numerikus modális megoldás eredménye, mely megfelel a vártaknak. Olyan szinuszhullámokat kaptunk, melyek értéke nulla a peremen, azaz az intervallum határpontjaiban.



3.11. ábra. Pillanatképek az emelt koszinusszal inicializált húr kitéréséről. Jól azonosítható a balra jobbra haladó hullámkomponens.

Időtartománybeli megoldás

Az időtartománybeli megoldáshoz alkalmazzuk a véges differenciák módszerét:

$$\delta_{tt}\mathbf{M}\mathbf{c} = -\mathbf{K}\mathbf{c} \quad (3.90)$$

Az 3.11. ábrán látható szemléletes példában a húr u -ra vonatkozó kezdeti feltétele egy emelt koszinuszfüggvény éppen a húr közepén. Továbbá a $\frac{\partial u}{\partial t}(t=0) = 0$ kezdeti feltételt érvényesítettem, azaz $\mathbf{c}_0 = \mathbf{c}_{-1}$. Az időtartományi szimulációban jól látszik, ahogy a hullámcsomag szétválik egy balra és egy jobbra haladó hullámkomponens szuperpozíciójára. Ez a felismerés adja a waveguide módszerek alapját.

3.10. A membrán végeelem modellje

Az 2. fejezetben bemutattam a membrán analitikus megoldásait. Ebben az alfejezetben bemutatom a végeelem alapú megoldást mind frekvenciatartományban, mind időtartományban.

Az implementáció MATLAB-ban történik, így igyekeztem mátrixegyenletekre optimalizálni a kódot. Az elemenkénti tömegmátrix integrális tényezője előre kifejthető, mert csak a referenciatartomány formafüggvényeitől függ:

$$\mathbf{M}_e = |\det(J_k)| \int_0^1 \int_0^{1-\hat{y}} \mathbf{N}\mathbf{N}^T d\hat{x}d\hat{y} = \frac{|\det(J_k)|}{24} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

Az elemenkénti merevségi mátrix már nem ilyen egyszerű, hiszen az integrandusban szerepel a Jakobi mátrix. Adja magát a lehetőség, hogy a Jakobi-mátrix elemeit paraméterként bevezetve kifejtsük a (3.60) integrált. Bemutatok most egy másik megoldást is, mely nemcsak elegáns, de hatékonyan fut a MATLAB mátrix-alapú környezetében.

Jelöljük a (3.60) egyenletben a $\mathbf{C} = (\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1}$. A \mathbf{C} mátrix szimmetrikus, melynek elemei:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

Az elemenkénti merevségi mátrix nm . eleme természetesen:

$$[K_e]_{nm} = |\det(\mathbf{J}_k)| \int_{\Omega_r} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_n}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial N_n}{\partial \hat{y}} \\ c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_m}{\partial \hat{x}} \\ \frac{\partial N_m}{\partial \hat{y}} \end{bmatrix} d\hat{x}d\hat{y} \quad (3.93)$$

A mátrixszorzásokat kifejtve az alábbi eredményt kapjuk:

$$K_{enm} = |\det(\mathbf{J}_k)| \int_{\Omega_r} \left(c_{11} \frac{\partial N_n}{\partial \hat{x}} \frac{\partial N_m}{\partial \hat{x}} + c_{12} \frac{\partial N_n}{\partial \hat{y}} \frac{\partial N_m}{\partial \hat{x}} + c_{12} \frac{\partial N_n}{\partial \hat{x}} \frac{\partial N_m}{\partial \hat{y}} + c_{22} \frac{\partial N_n}{\partial \hat{y}} \frac{\partial N_m}{\partial \hat{y}} \right) d\hat{x}d\hat{y} \quad (3.94)$$

Ez alapján pedig látható, hogy az elemenkénti merevségi mátrix négy mátrix lineáris kombinációjaként állítható elő:

$$\mathbf{K}_e = |\det(\mathbf{J}_k)| [c_{11}\mathbf{K}_{xx} + c_{12}(\mathbf{K}_{xy} + \mathbf{K}_{xy}^T) + c_{22}\mathbf{K}_{yy}] \quad (3.95)$$

ahol

$$\mathbf{K}_{xx} = \int_0^1 \int_0^{1-\hat{y}} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial \hat{x}} d\hat{x}d\hat{y} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.96a)$$

$$\mathbf{K}_{xy} = \int_0^1 \int_0^{1-\hat{y}} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial \hat{y}} d\hat{x}d\hat{y} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.96b)$$

$$\mathbf{K}_{yy} = \int_0^1 \int_0^{1-\hat{y}} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial \hat{y}} d\hat{x}d\hat{y} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.96c)$$

Ez a felírás kedvez a mátrixműveleteken szoftvereknek. Később, bonyolultabb merevségi mátrix felírásánál ez a megközelítés nagyságrendekkel gyorsabb asszemblálást fog eredményezni.

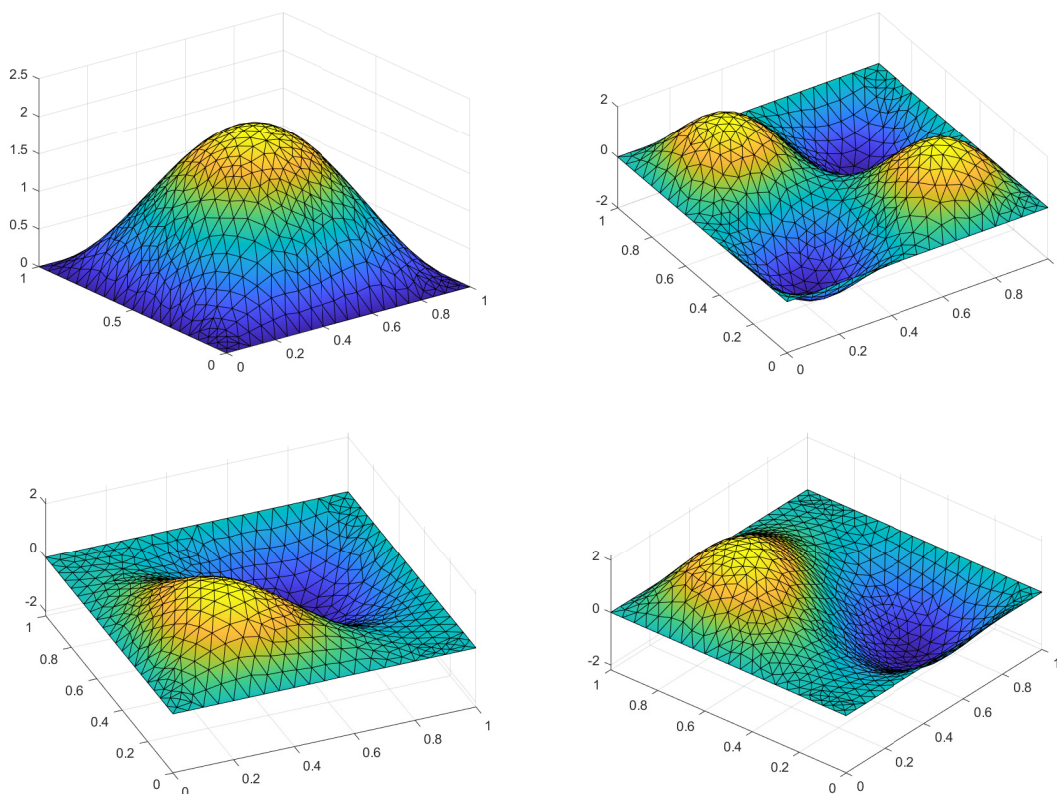
Az asszemblálás MATLAB-ban könnyedén megtehető, ha bevezetünk index vektorokat. Az alábbi kódrészletben az `indexer` változó az aktuális háromszög pontjainak (és ezáltal a hozzárendelt bázisfüggvények) indexeit tartalmazza. A `K`, `M` változók a globális mátrixok, a `Ke`, `Me` változók az elemenkénti mátrixok, a `2*A` a Jakobi determináns abszolút értéke⁶.

```
indexer = [i1 i2 i3];
K(indexer, indexer) = K(indexer, indexer) + Ke*2*A;
M(indexer, indexer) = M(indexer, indexer) + Me*2*A;
```

Frekvenciatartománybeli megoldás

A modális megoldás ismét a (3.89) általánosított sajátértékproblémára vezet. A 3.12 ábrán láthatók a numerikusan kapott módusok. A felső sorban látható módusalakok megfelelnek

⁶A jakobi determináns abszolút értéke a háromszög területének kétszerese.



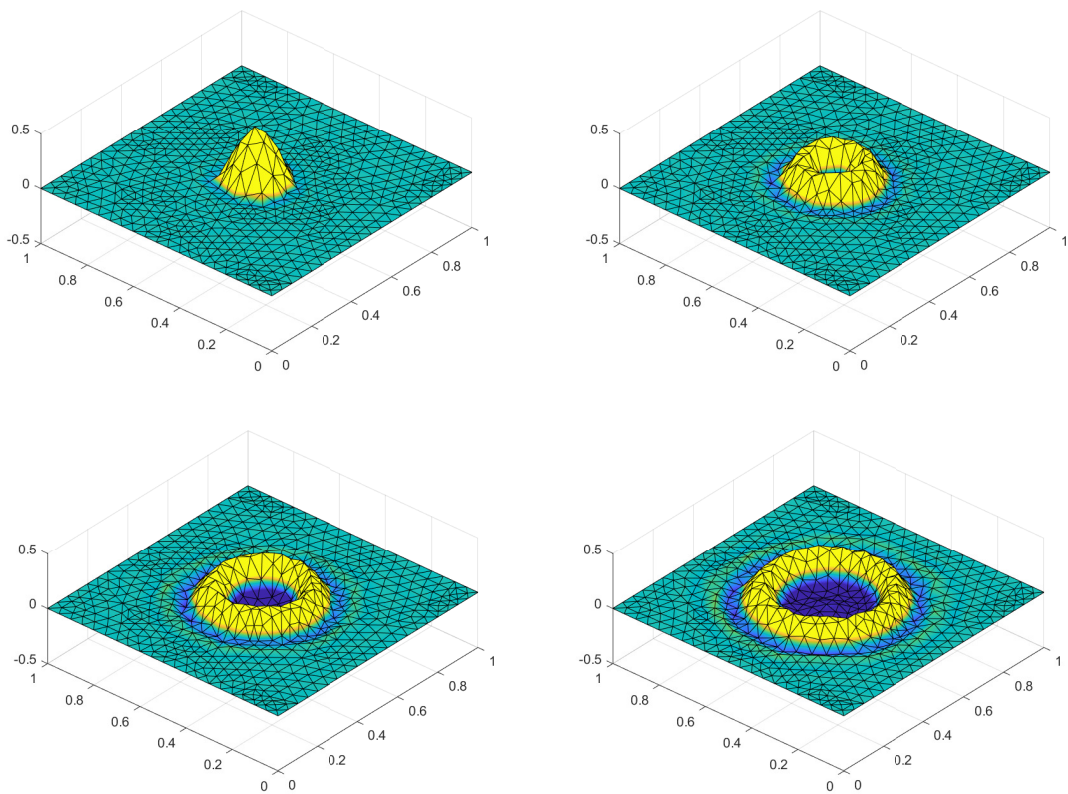
3.12. ábra. A szélein rögzített membrán négy módusa végeelem módszerrel. A háló 1248 elemet tartalmaz.

a 2. fejezetben analitikusan kiszámolt módusoknak. Az alsó kettő azonban nem. Ezek az $n = 1, m = 2$ ill. a $n = 2, m = 1$ módusai a membránnak, emiatt pedig sajátfrekvenciájuk megegyezik. Az analitikusan meghatározott módusalakok ortogonálisak egymásra, azonban az algoritmus ezt nem képes megtalálni. Ettől függetlenül két, lineárisan független módust talál meg, ami a modális dekompozícióhoz elegendő. Ez a jelenség csak a kétszeres multiplicitású sajátfrekvenciákhoz tartozó módusok esetében lép fel, az egyszeres módusok helyes alakját képes megtalálni az algoritmus.

Időtartományi szimuláció

Az időtartományi szimuláció néhány időpillanatát a 3.13. ábra szemlélteti. Ebben az esetben is a kitérést egy emelt koszinuszfüggvénnyel, a sebességet zérus kezdeti értékkel inicializáltam.

Érdeemes megfigyelni, hogy a 3.13. ábrán a hullám terjedése diszperzív, azaz a rövidebb hullámhosszú komponensek gyorsabban terjednek, a hullámfront szétcusúszik. Ez az explicit véges differencia módszer hibája, és éppen ezért numerikus diszperzióknak nevezzük. A numerikus diszperzió hatása nem csökkenthető csupán a háló sűrítésével, azonban magasabb rendű bázisfüggvények választásával igen. A 3.14. ábrán látható szimulációban egy bonyolultabb elemmel valósítottam meg a membrán modelljét. A használt elemnek 6 szabadsági foka van: a függvény értéke a háromszög csúcsiban, és a háromszög éleinek felezőpontjá-

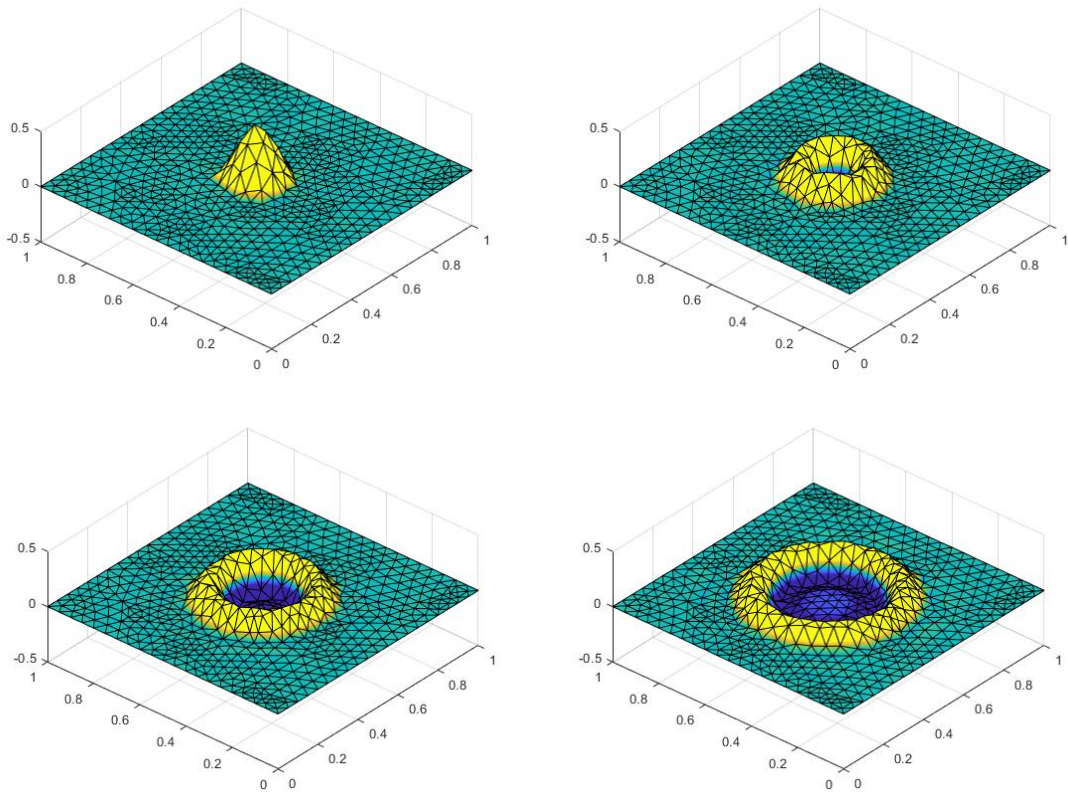


3.13. ábra. *Pillanatképek a membrán kitérésének időbeli alakulásáról. A színskálát ± 0.05 -re szaturáltam annak érdekében, hogy a numerikus diszperzió jól látható legyen. A háló 1248 elemet tartalmaz.*

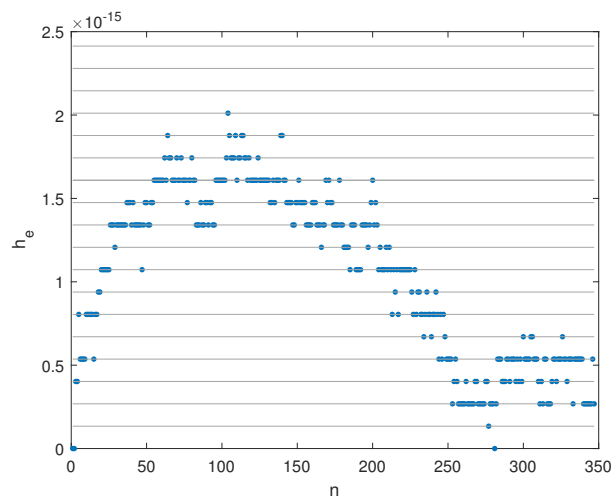
ban. Ez kétdimenziós másodfokú polinomokkal valósítható meg. Látható, hogy a numerikus diszperzió hatása csökkent (élesebb szemmel azért még láthatjuk apróbb jeleit), de ennek persze komoly ára volt: a számítási igény többszörösére növekedett.

A 3.15. ábrán megfigyelhetjük a numerikus energia időbeli változását. A numerikus energia kifejezése a (3.78) egyenletben látható. Jóllehet a numerikus energia elméletileg megmarad, a véges számábrázolási pontosság miatt ez csak közelítőleg teljesül. Az energia variációja kifejezetten kicsi, mindösszesen néhány bit értéket változik.

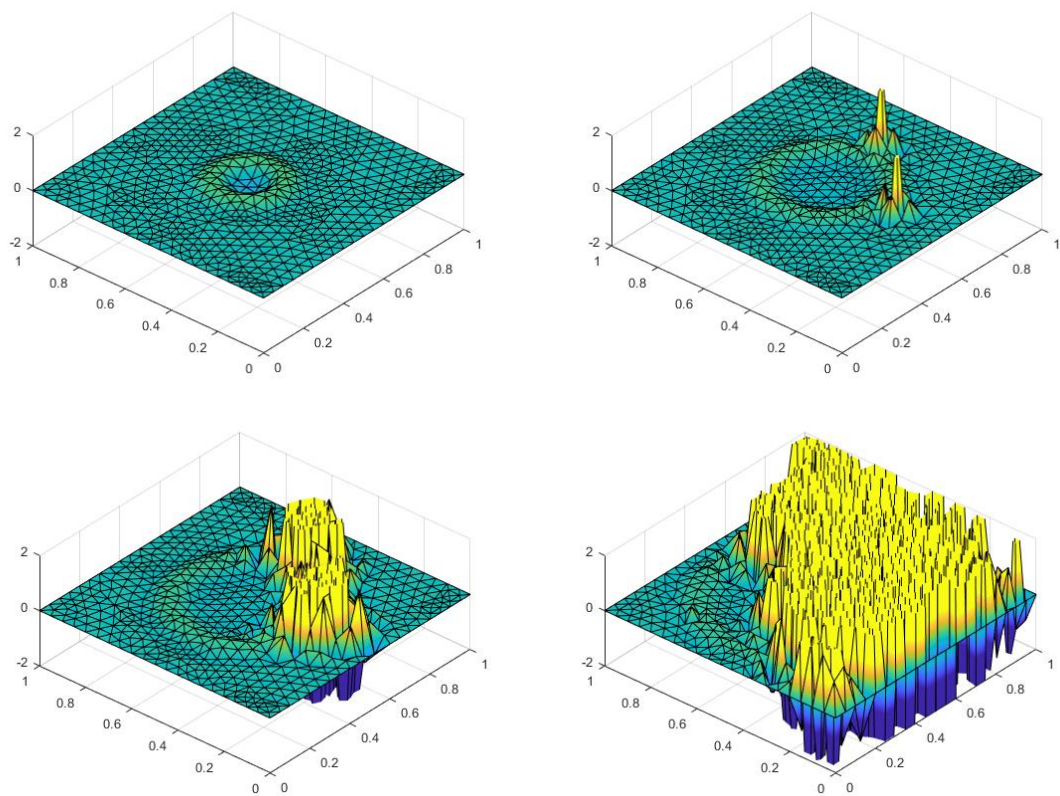
A 3.16. ábrán megfigyelhetjük az instabil viselkedést. A membránt ugyanúgy emelt koszinuszfüggvénye gerjeszti. A folyamat látszólag ugyanúgy indul, mint az előző esetben. Jól megnézve a 2. időpillanatot már felfedezhetők az instabilitás első apró jelei. Ezt követően a rendszer jól láthatóan instabilis lesz, végül teljesen eltorzul.



3.14. ábra. Pillanatképek a membrán kitérésének időbeli alakulásáról 6 szabadsági fokú háromszögelemekkel. A színskálát ± 0.05 szaturáltam annak érdekében, hogy a numerikus diszperzió jelensége jól látható legyen. A háló 1248 elemet tartalmaz.



3.15. ábra. Az energia változása a minták függvényében. Az y tengelyen pontokkal jeleztem a normált energiaváltozást: $h_e = (\hbar_0 - \hbar_n)/\hbar_0$. Szürke vízszintes vonalakkal az egy-bit variáció kvantált értékei láthatók.



3.16. ábra. Pillanatképek a szélein rögzített membrán kitérésének időbeli alakulásáról. A mintavételi periódusidő éppen a stabilitáshoz szükséges periódusidő 1.1-szerese: $\Delta t = 1,1 \frac{2}{\lambda_{max}}$. A háló 1248 elemet tartalmaz.

4. fejezet

A Kirchhoff féle lineáris lemez végeelem modellezése

Az előző fejezetekben bemutattam a peremértékfeladatokat és a végeelem módszer alkalmazását. Mindez jó előkészítése volt a végső feladatnak; rátérek a cintányér fizikai alapú szintézisének rögzös útjára. Első megálló a lineáris lemez Kirchhoff-féle modellje, melynek alapját a lineáris, rugalmas deformáció fizikája adja [16]. Ha feltételezzük, hogy a vizsgált lemez vastagsága sokkal kisebb, mint szélessége, akkor a vékony lemez kétdimenziós parciális differenciálegyenletekkel írható le. Ha a lemez deformációja (méreteihez képest) kis mértékű, a keletkező egyenlet lineáris lesz - ez a Kirchhoff féle lineáris lemezmodell. Az egyenlet jellegre nagyon hasonlít a membránhoz, szintén hullámterjedést ír le, azonban negyedrendű parciális deriváltakat tartalmaz. Jelen dolgozatban a lineáris lemez alapegyenletének levezetésétől eltekintek, az érdeklődő Olvasó számára a [26, 35, 42] irodalmakat javaslom.

Ebben a fejezetben először bevezetek néhány jelölést és fizikai paramétert, melyek segítségével a differenciálegyenletek és peremfeltételek kompaktabb formában leírhatók. Ezt követően felírom magát az egyenletet, majd alkalmazom rá a végeelem módszer korábban megismert lépéseit: tárgyalom a lehetséges peremfeltételeket, levezetem a gyenge alakot és az energiamérleget, a gyenge alakot diszkretizálom, bázisfüggvényeket választok (és feloldom az ezzel kapcsolatos komplikációkat), majd bemutatom az eredményeket: a modális megoldás sajátfrekvenciáit és sajátfüggvényeit összehasonlítom az irodalmi és analitikus adatokkal.

4.1. Anyagparaméterek és fizikai változók

Ebben az alfejezetben összegyűjtöm a használt anyagparamétereket és fizikai mennyiségeket. Noha ezen mennyiségeknek fontos fizikai jelentése van, jelen dolgozatban inkább jelölésként tekintek rájuk. Mindezt azért tesszem, hogy jelölésrendszerem konzisztens legyen az irodalommal, azonban eltekintek a háttérben lévő fizika precíz ismertetésétől [26, 35, 42].

Anyagparaméter szimbóluma	Anyagparaméter neve	Mértékegysége
ν	Poisson állandó ($\nu < 0.5$)	-
E	Young modulus	Pa
h	Lemezvastagság	m
ρ	Lemez anyagának sűrűsége	kg/m ³

4.1. táblázat. A lemez anyagparaméterei

Anyagparaméterek

A 4.1. táblázat összefoglalja a lemezek leírásához szükséges anyagparamétereket.

Az anyagparaméterek az ún. hajlítómerevségben foglalhatók össze, mely definíció szerint

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}. \quad (4.1)$$

Forgatónyomaték

A forgatónyomaték egy 2x2-es tenzor formájában írható fel.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_x & M_{xy} \\ M_{xy} & M_y \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

A tenzor egyes elemei és a lemez vertikális u kitérése között az alábbi összefüggések állnak fenn.

$$M_x(u) = -D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (4.3)$$

$$M_y(u) = -D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad (4.4)$$

$$M_{xy}(u) = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad (4.5)$$

Az forgatónyomaték iránymenti vetületét \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 irányokban az alábbi módon definiáljuk [42].

$$M_{v_1 v_2} = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{M} \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1^T (\mathbf{M} \mathbf{v}_2) \quad (4.6)$$

A peremfeltételek kifejezésénél használni fogjuk a normális irányú vetületet, azaz

$$M_{nn} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{M} \mathbf{n} = M_x n_x^2 + M_y n_y^2 + 2M_{xy} n_x n_y \quad (4.7)$$

ahol $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ a peremmenti normálvektort jelöli. Szintén a peremfeltételek kifejezésénél használjuk az alábbi iránymenti vetületet:

$$\mathbf{M}_{ns} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{M} \mathbf{s} = (M_y - M_x) n_x n_y + M_{xy} (n_x^2 - n_y^2) \quad (4.8)$$

ahol $\mathbf{s} = (-n_y, n_x)$ a peremmenti tangenciális vektor.

Transzverzális nyíróerő

A transzverzális nyíróerő kapcsolata a transzverzális kitéréssel a következő:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

ahol

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \equiv -D \frac{\partial}{\partial x} \Delta u, \quad (4.10)$$

$$Q_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \equiv -D \frac{\partial}{\partial y} \Delta u. \quad (4.11)$$

A normális irányú transzverzális nyíróerő természetesen

$$Q_n = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{n} = Q_x n_x + Q_y n_y. \quad (4.12)$$

4.2. A Kirchhoff lemez egyenlete

A Kirchhoff lemez egyenlete kompakt formában felírható az előző fejezetben bevezetett jelölésekkel [6, 26, 35].

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + f_{exc} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4.13)$$

ahol f_{exc} a gerjesztő erő. Ha beírjuk M_x , M_y , M_{xy} kifejezését (4.13) egyenletbe, akkor a ν -t tartalmazó tagok kiejtik egymást, és egy még kompaktabb alakot kapunk [6, 26, 35]:

$$-\kappa^2 \Delta^2 u + f_{exc} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4.14)$$

ahol

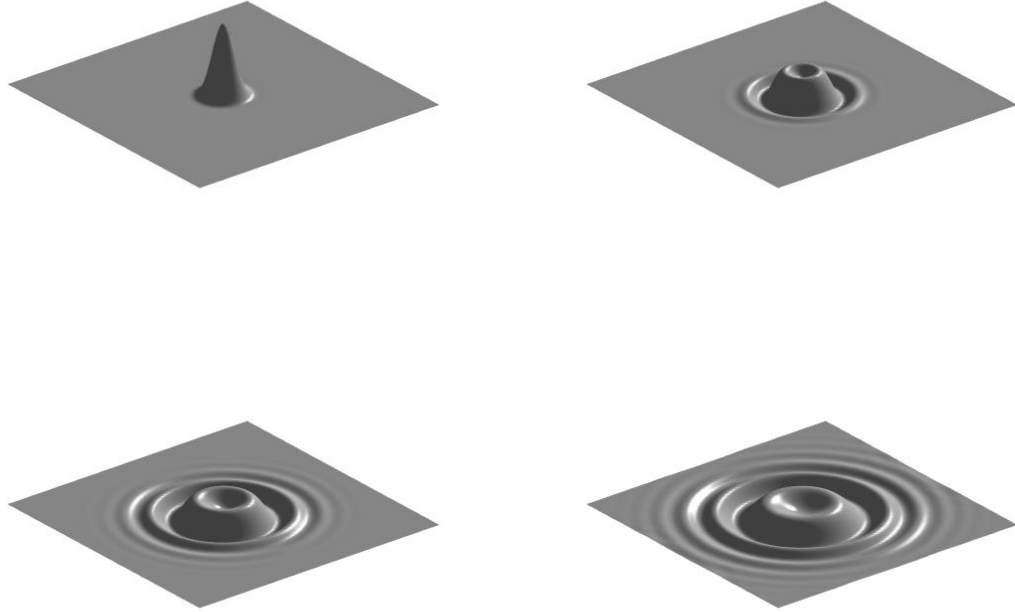
$$\kappa = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (4.15)$$

A (4.14) egyenlet a Kirchhoff lemez klasszikusnak mondható parciális differenciálegyenlete. A dolgozatban hátralévő részében gyakran ezt az alakot fogom használni, de a gyenge alak és energiamérleg felírása során az első, (4.13) egyenlet sokkal praktikusabb lesz. Ennek oka a peremfeltételek kifejezésében rejlik.

Diszperzió

A fejezet bevezetője során röviden megemlítettem, hogy a lineáris lemez egyenlete is hullámterjedést ír le. Ezt be is láthatjuk, ha az

$$u'(x, y, t) = A \cos(k_x x) \cos(k_y y) \cos(\omega t + \varphi) \quad (4.16)$$



4.1. ábra. A lemez egy kétdimenziós Gauss impulzussal inicializálva. A hullámfront most nem határozott, diszperziót figyelhetünk meg.

hullámterjedést leíró függvényt helyettesítjük be a (4.14) egyenletbe:

$$-\Delta\Delta u' = (k_x^2 + k_y^2)\Delta u' = \frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} \quad (4.17)$$

Átrendezve éppen a 2. fejezetben részletesen bemutatott hullámegyenletet kapjuk:

$$\Delta u' = \frac{1}{\kappa^2 |\mathbf{k}|^2} \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2}, \quad (4.18)$$

ahol $|\mathbf{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ a hullámszám. A (4.18) hullámegyenlet a terjedési sebessége nem állandó, függ a hullámszámtól - tehát a hullámhossztól is.

Ezek ismeretében kimondhatjuk, hogy a lemez teljesen általános megoldása ismét felírható u' jellegű tagok lineáris kombinációjaként¹. Ugyanakkor a különböző hullámkomponensek eltérő sebességgel terjednek: a rövidebb hullámhosszú komponensek gyorsabban. Más szóval természetes, fizikai eredetű diszperziót figyelhetünk meg [6]. A jelenséget a 4.1. ábra szemlélteti, ahol láthatjuk, hogy a rövidebb hullámhosszú komponensek gyorsabban elhagyják a forrás helyét. Érdeemes a 4.1. ábrát összehasonlítani 2.5 ábrával.

¹Ezek nem egyeznek meg a lemez módusaival, így ez még nem módus szerinti sorfejtés! Gyakori, hogy a módusokat épp az u' jellegű tagok lineáris kombinációjaként keresik numerikus módszerekkel [26].

4.3. Peremfeltételek

Több, matematikailag helyes peremfeltétel felírható, azonban fizikai szempontból három, speciális peremfeltételt szokás tárgyalni [6, 26, 42]:

- Szabad perem (free)
- Szabadon forgó perem, avagy csuklós támasz (simply supported)
- Rögzített (befogott) perem (clamped)

A továbbiakban az angol elnevezéseket is használni fogom.

Mindhárom (és általában az összes, egyértelmű megoldást adó) peremfeltételre igaz, hogy a peremen egyszerre két feltételnek kell teljesülnie. A továbbiakban csak olyan esetekkel foglalkozunk, amikor a lemez szélén végig, egészében ugyanaz a peremfeltétel adott. Természetesen (ahogy korábban is) a peremfeltételeket kombinálhatjuk, azaz a perem egy része lehet rögzített, míg a többi például szabadon hagyva.

A szélein rögzített (clamped) lemez

A szélein rögzített lemez peremfeltételeinek kifejezése a legegyszerűbb. A transzverzális kitérés értéke és annak normális irányú deriváltja nulla kell legyen [42], azaz

$$u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \forall (x, y) \in \Gamma \quad (4.19)$$

A szélein szabadon forgó (simply supported) lemez

A peremfeltétel szemléletesen azt jelenti, hogy a lemez kitérése a szélén ugyan nulla, de szabadon képes forogni. Szokták a peremfeltételt csuklós támasznak is nevezni. A szélein csuklós lemez esetében a transzverzális kitérés továbbra is zérus. Emellett a normális irányú forgatónyomaték $M_{nn} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{Mn}$ értéke is zérus [42], azaz

$$u = 0 \quad \forall (x, y) \in \Gamma \quad (4.20a)$$

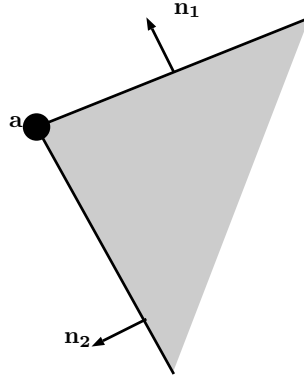
$$M_{nn} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{Mn} = M_x n_x^2 + M_y n_y^2 + 2M_{xy} n_x n_y = 0 \quad \forall (x, y) \in \Gamma \quad (4.20b)$$

A szélein szabadon rezgő (free) lemez

A szélein szabadon rezgő lemez peremfeltételei a legbonyolultabbak, és sokáig a fizikusoknak is komoly fejtörést okozott [15]. Szintézis szempontjából azonban éppen erre lesz a legnagyobb szükségünk. A lemez a szélein szabadon rezeg, ha a következő feltételek teljesülnek [42]:

$$M_{nn} = 0 \quad \forall (x, y) \in \Gamma \quad (4.21a)$$

$$Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = 0 \quad \forall (x, y) \in \Gamma \quad (4.21b)$$



4.2. ábra. A sarok-feltételek értelmezése. A tartomány határának kis részét a vastag vonal szemlélteti, **a** pedig egy sarokpont.

ahol $\frac{\partial}{\partial s}$ a felületi tangenciális irányú deriváltat jelöli.

A fenti feltételek csak abban az esetben igazak, ha a lemez pereme „sima”, azaz nincsenek benne törések. Ez egy valóságos lemez esetében természetesen teljesül is. Azonban a végeelem módszer alkalmazása során a vizsgált tartomány határát szakaszok közelítik (a háromszögháló miatt), így azon törések keletkeznek, tehát - a végeelem modell miatt - kénytelenek vagyunk foglalkozni az ilyen kontúrokkal is.

Amennyiben a perem legalább tartományonként sima, akkor törések vannak benne. A sima tartományokra továbbra is a (4.21) peremfeltételek igazak, azonban a töréspontokra (sarkokra) más feltételeket kell előírunk. Már csak azért is, mert a normális irányú derivált nem értelmezhető ezen pontokban, hiszen a két oldali „sima” peremszakasz eltérő normálvektorral fut be a sarokpontba.

A sarokpontokra felírandó feltétel általános alakját nem találtam meg az irodalomban, de a [15] irodalomban bemutatott módszerrel levezethető. Tekintsük az 4.2 ábrát, ahol **a** pont a sarokpont. Ekkor a szabad rezgés peremfeltétele a sarkokra

$$M_{ns}^{(1)} \Big|_a - M_{ns}^{(2)} \Big|_a = 0, \quad (4.22)$$

ahol $M_{ns}^{(1)}$ ill. $M_{ns}^{(2)}$ az \mathbf{n}_1 ill. \mathbf{n}_2 normálvektorokkal értelmezett M_{ns} érték. Lásd (4.8).

4.4. Gyenge alak és energiamérleg

Az előző fejezetben láthattuk, hogy a végeelem módszer alkalmazása során érdemes az ún. gyenge alakot megoldani, mely egyszerre fejezi ki a pontos és a minimális hibájú megoldást. Azt is láttuk, hogy a rendszer energiamérlege és a gyenge alakja között szoros összefüggés van. Ebben az alfejezetben először levezetem a gyenge alakot, majd abból felírom az energiamérleget. Az energiamérleg segítségével belátható, hogy az előző alfejezetben megadott peremfeltételekkel a tartomány pereme veszteségmentes - és így a peremértékfeladat egyértelműen megoldható.

A lemez analízise során legtöbbször a (4.14) alakot használják - és a dolgozat során én is így fogok tenni, - azonban a gyenge alak felírásához azonban érdemes a (4.13) alakból kiindulni. A levezetést [35] alapján, annál kissé részletesebben mutatom be. Szorozzuk meg az egyenlet residuumát egy v tesztelőfüggvénnyel, és integráljuk a vizsgált tartományon.

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - f_{exc} \right) v \, d\Omega = 0 \quad (4.23)$$

Az egyenlet tagjait parciálisan integráljuk a (2.9) és (2.10) azonosságok többszöri alkalmazásával. Az első tagot kétszer egymás után x szerint:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} v \, d\Omega = \oint_{\Gamma} \frac{\partial M_x}{\partial x} v n_x \, d\Gamma - \oint_{\Gamma} M_x \frac{\partial v}{\partial x} n_x \, d\Gamma + \int_{\Omega} M_x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \, d\Omega \quad (4.24)$$

A (4.23) egyenlet második tagját kétszer egymás után y szerint:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 M_y}{\partial x^2} v \, d\Omega = \oint_{\Gamma} \frac{\partial M_y}{\partial y} v n_y \, d\Gamma - \oint_{\Gamma} M_y \frac{\partial v}{\partial y} n_y \, d\Gamma + \int_{\Omega} M_y \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \, d\Omega \quad (4.25)$$

A (4.23) egyenlet harmadik tagját két részre bontjuk. Egyiket először x szerint majd utána y szerint parciálisan integráljuk:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} v \, d\Omega = \oint_{\Gamma} \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} v n_x \, d\Gamma - \oint_{\Gamma} M_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} n_y \, d\Gamma + \int_{\Omega} M_{xy} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \, d\Omega \quad (4.26)$$

A (4.23) egyenlet harmadik tagjának második felét először y szerint majd x szerint parciálisan integráljuk:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} v \, d\Omega = \oint_{\Gamma} \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} v n_y \, d\Gamma - \oint_{\Gamma} M_{xy} \frac{\partial v}{\partial y} n_x \, d\Gamma + \int_{\Omega} M_{xy} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \, d\Omega \quad (4.27)$$

A negyedik és ötödik tagot nem szükséges parciálisan integrálni. A parciális integrálások eredményeit összeadva megkapjuk a lineáris lemez egyenletének gyenge alakját:

$$-\mathcal{K}_{lin}(u, v) - \mathfrak{B}_{lin}(u, v) + \mathcal{F}(v) = \frac{1}{\kappa^2} \mathcal{M}(u, v), \quad (4.28)$$

ahol a $\mathcal{K}_{lin}(u, v)$, $\mathfrak{B}_{lin}(u, v)$, $\mathcal{M}(u, v)$ operátorok tetszőleges u, v függvényekre az alábbi

módon definiáltak [35, 15]:

$$\mathcal{K}_{lin}(u, v) = \int_{\Omega} \Delta u \Delta v - (1 - \nu) \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] d\Omega \quad (4.29a)$$

$$\mathcal{M}(u, v) = \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v d\Omega \quad (4.29b)$$

$$\mathcal{F}(v) = \int_{\Omega} f_{exc} v d\Omega \quad (4.29c)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_{lin}(u, v) = & - \oint_{\Gamma} v \left[\left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) n_x + \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \right) n_y \right] d\Gamma + \\ & \oint_{\Gamma} \left[\frac{\partial v}{\partial x} (M_x n_x + M_{xy} n_y) + \frac{\partial v}{\partial y} (M_{xy} n_x + M_y n_y) \right] d\Gamma \end{aligned} \quad (4.29d)$$

A peremmenti integrálok tovább egyszerűsíthetők, ha a peremen áttérünk Descartes koordinátarendszertől a perem pontjain lokálisan értelmezett normális-tangenciális koordinátarendszerbe, azaz:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = n_x \frac{\partial f}{\partial n} - n_y \frac{\partial f}{\partial s} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = n_x \frac{\partial f}{\partial s} + n_y \frac{\partial f}{\partial n} \quad (4.30)$$

Ezzel a peremmenti integrálok a következő formára egyszerűsödnek [35]:

$$\mathfrak{B}_{lin} = - \oint_{\Gamma} v Q_n d\Gamma + \oint_{\Gamma} \left(\frac{\partial v}{\partial n} M_{nn} + \frac{\partial v}{\partial s} M_{ns} \right) d\Gamma \quad (4.31)$$

A szabad peremfeltételek érvényesítése érdekében érdemes a (4.31) peremmenti integrált még átalakítani. Ha alkalmazzuk az (2.11) azonosságot a második peremmenti integrál második tagjára, akkor megjelennek a szabadon rezgő lemez peremfeltételei. Amennyiben a perem végig sima, akkor a (2.11) egyenlet bal oldalán csak az integrális tag marad. Ezzel a peremmenti integrálok:

$$\mathfrak{B}_{lin} = - \oint_{\Gamma} v \left(Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \right) d\Gamma + \oint_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial n} M_{nn} d\Gamma \quad (4.32)$$

Ha perem csak szakaszonként sima (mint ahogy a végeselem-háló esetében) a (2.11) azonosságot szakaszonként alkalmazzuk. Ekkor a (2.11) egyenlet bal oldalán a „kollokációs” tagok (végpontokban vett értékek) is megmaradnak.

$$\mathfrak{B}_{lin} = - \oint_{\Gamma} v \left(Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \right) d\Gamma + \oint_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial n} M_{nn} d\Gamma + [v M_{ns}]_s \quad (4.33)$$

ahol $[v M_{ns}]_s$ a kollokációs tagok összességét jelöli.

Láthatjuk természetesen, hogy mindkét esetben megjelennek a szabadon rezgő lemez peremfeltételei, így azok érvényesítése esetén a peremmenti integrálok eltűnnek.

Gyenge alakot természetesen levezethetünk a (4.14) egyenletből is, az eredmény formailag más lesz², de átalakítható a (4.28) alakra.

Energiamérleg

A gyenge alak és az energiamérleg között szoros kapcsolat van lineáris differenciál-egyenletek esetében. Egyszerűen a (4.28) egyenletben $v = \frac{\partial u}{\partial t}$ helyettesítéssel és a (2.15) ill. (2.12) átalakítások többszöri alkalmazásával megkapjuk a lineáris lemez energiamérlegét [15], amely az alábbi formába alakítható át:

$$\frac{\partial \mathcal{W}_{kin}(u)}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{W}_{strain}(u)}{\partial t} + \mathcal{P}_{lin}(u) = \mathcal{P}_{exc}(u) \quad (4.34)$$

ahol

$$\mathcal{W}_{strain}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(|\Delta u|^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right) d\Omega \quad (4.35a)$$

$$\mathcal{W}_{kin}(u) = \frac{1}{2\kappa^2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 d\Omega \quad (4.35b)$$

$$\mathcal{P}_{lin}(u) = - \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial t} (Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s}) d\Gamma + \oint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial n} M_{nn} d\Gamma + [\frac{\partial u}{\partial t} M_{ns}]_s \quad (4.35c)$$

$$\mathcal{P}_{exc}(u) = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} f_{exc} d\Omega \quad (4.35d)$$

A \mathcal{W}_{kin} (ahogy a membrán esetében is) a rezgésben tárolt mozgási energiával arányos. A \mathcal{W}_{strain} az irodalomban gyakran deformációs energia (strain energy) néven fedezhető mennyiséggel arányos. Némi átrendezéssel - továbbá $(\frac{\nu}{2} \|\Delta u\|^2)$ hozzáadásával és kivonásával - a deformációs energia átalakítható [6], melyből azonnal látszik a nemnegativitása is (ismerve, hogy $0 < \nu < 1$).

$$\mathcal{W}_{strain} = \frac{1}{2} \left[\nu \|\Delta u\|^2 + (1-\nu) \left(\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\|^2 + 2 \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right\|^2 \right) \right] \quad (4.36)$$

4.5. Csillapítás

A fizikai pontosság érdekében lemeznél is figyelembe kell venni csillapítási tényezőket, hiszen az eddig felírt sémák (ahogy az energiamérlegből is látható) veszteségmentesek³.

A lineáris lemezt két veszteséges taggal egészíthetjük ki [6] az alábbi módon:

$$\frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\Delta^2 u - 2\sigma_0 \frac{\partial u}{\partial t} + 2\sigma_1 \frac{\partial}{\partial t} \Delta u \quad (4.37)$$

²A peremmenti tagokban nem jelennek meg a szabadon rezgő lemez peremfeltételei.

³Ez mindhárom, tárgyalt peremfeltétel esetén teljesül, hiszen ekkor $\mathcal{P}_{lin} = 0$.

ahol σ_0 és σ_1 a csillapításmodell tulajdonságait befolyásoló paraméterek. A σ_0 tag az ún. frekvenciafüggetlen csillapítás, melyet már a membránnál is megismerhettünk. Ez egy időben exponenciálisan lecsengő, csillapító burkolót biztosít minden térbeli pontban⁴. A második tag ún. frekvenciafüggő csillapítás, melynek részletes analizisét Bilbao könyvében [6] olvashatjuk.

Az energiamérleget ismét megkaphatjuk az eddig megismert módszerek alkalmazásával.

Az energiamérleg a σ_1 veszteségi tag parciális integrálását követően

$$\frac{\partial (\mathcal{W}_{strain} + \mathcal{W}_{kin})}{\partial t} = -\mathcal{P}_{loss} + \mathcal{B}_{loss} + P_{exc} - \mathcal{P}_{lin} \quad (4.38)$$

ahol az új tagok

$$\mathcal{P}_{loss} = 2\sigma_0 \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 + 2\sigma_1 \left\| \frac{\partial}{\partial t} \nabla u \right\|^2 \quad (4.39)$$

$$\mathcal{B}_{loss} = 2\sigma_1 \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma \quad (4.40)$$

Mivel \mathcal{P}_{loss} egyértelműen pozitív, a rendszer energiája folyamatosan csökken.

Ahhoz, hogy a perem veszteségmentes (és így a peremértékfeladat egyértelműen megoldható) legyen, a \mathcal{B}_{loss} peremmenti integrálnak is el kell tűnnie. Simply supported és clamped peremfeltételek esetében ez teljesül, mert $u = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = 0$. Szabad peremfeltételek esetén azonban nem, így ki azt kell egészíteni. Az irodalomban is fellelhető módosítás a következő [42]:

$$M_{nn} - 2\sigma_1 \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (4.41a)$$

$$Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = 0 \quad (4.41b)$$

Ezzel a választással a peremmenti integrál eltűnik és a perem veszteségmentes lesz.

4.6. Diszkretizáció

A végeelem modellezés következő lépése a (4.28) gyenge alak diszkretizációja. Keressük a megoldást ismét bázisfüggvények lineáris kombinációjaként

$$u_h(x, y, t) = \sum_{i=1}^N u_i(t) w_i(x, y), \quad (4.42)$$

illetve a tesztelőfüggvény legyen tetszőleges ugyanebben a bázisban.

$$v_h(x, y) = \sum_{j=1}^N q_j w_j(x, y). \quad (4.43)$$

⁴Ezt a szorzatszeparáció módszerével könnyedén beláthatjuk.

A diszkretizált gyenge alak így felírható a 75. oldalon definiált operátorok segítségével egyszerűen:

$$-\mathcal{K}_{lin}(u_h, v_h) - \mathfrak{B}_{lin}(u_h, v_h) + \mathcal{F}(v_h) = \mathcal{M}(u_h, v_h), \quad (4.44)$$

amely az előző fejezet példája alapján lineáris egyenletrendszerre vezet:

$$-\mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{f} = \frac{1}{\kappa^2} \mathbf{M} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (4.45)$$

ahol

$$\mathbf{K} = [\mathcal{K}(w_i, w_j)]_{ij} \quad (4.46a)$$

$$\mathbf{M} = \left[\int_{\Omega} w_i w_j d\Omega \right]_{ij} \quad (4.46b)$$

$$\mathbf{f} = [\mathcal{F}(w_j)]_j, \quad (4.46c)$$

ahol w_i ismét a bázisfüggvényeket jelöli.

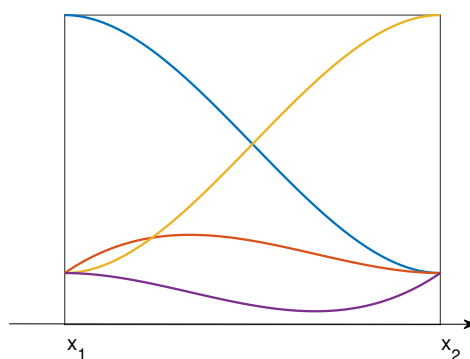
4.6.1. Konvergens bázisfüggvény-rendszerek

A bázisfüggvények megválasztása hasonlóan történik, mint 3.4 alfejezetben, ahol a hullámegyenlet végeelem-diszkretizációját mutattam be. Azonban a lemez egyenletének negyedrendű volta miatt az egyszerű, lineáris bázisfüggvények már nem elegendők. A gyenge alakban már másodrendű deriváltak szerepelnek, és a megoldásfüggvényt (első közelítésben) a H_2 Sobolev térben keressük. A lineáris bázisfüggvények ezen feltételeknek nem felelnek meg: az elemek határán már nem értelmezett a függvények második deriváltja (gyenge értelemben sem⁵). Továbbá az elemek felett végig nulla értékűek. Ezért már nem elegendő csupán az, hogy a bázisfüggvények értéke folytonos az elemek határán.

Szükséges immáron, hogy a bázisfüggvények első deriváltjai is folytonosak legyenek az elemek között, ugyanis ekkor gyenge értelemben értelmezhető a második derivált. Az ún. C^1 folytonosságú elemek ezt a feltételt teljesítik. Belátható, hogy ha a C^1 folytonosságú elemekkel diszkretizáljuk a (4.28) gyenge alakot, akkor a megoldás optimális (lásd [22] és 3.5.). Számtalan C^1 folytonos elem alkalmazható [32], ezek közül egyet, az ún. Argyris elemet mutatom be.

Fontos megjegyezni, hogy bizonyos, nem- C^1 folytonos elemek felhasználásával is születet konvergens megoldás [35]. Ekkor sem a bázisfüggvények, sem a végső megoldás nem részei H_2 Sobolev térnek, de részei L_2 -nek így annak normájával megmutatható a konvergencia; ez a bizonyítás azonban már nem olyan egyszerű [8]. A folytonossági feltétel sérülése ellenére az elemenkénti integrálok kifejtethetők, és a globális egyenletrendszer asszemblálható. Erre a Morley elemet hozom fel példaként.

⁵A lineáris bázisfüggvény második deriváltja egy Dirac-delta lenne a „kalap csúcsában”, mely nem része L_2 -nek. Szemléletes bizonyítás: $\int \delta(x - x_0) \delta(x - x_0) = \delta(x_0 - x_0) \rightarrow \infty$



4.3. ábra. A Hermite elemfüggvények.

A C^1 folytonosság teljesítéséhez az elem szabadsági fokai közé fel kell vennünk a függvény deriváltjait. Bevezetőként először tekintsünk egy egydimenziós példát, a Hermite elemet.

Az egydimenziós Hermite elem

Kanyarodjunk vissza az egydimenziós végelem módszer világába, ahol a vizsgált tartomány egy intervallum, az elemek pedig kisebb intervallumok ezen belül. Az egydimenziós Hermite elem egy olyan intervallum, melyen négy szabadsági fokot írunk elő. Az elem határpontjain szabadsági fokként írjuk elő a függvény értékét és annak első deriváltjait. Ilyen függvényeket harmadfokú polinom formájában kereshetünk:

$$N_i = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 \quad (4.47)$$

Az a négy polinom, mely a szabadsági fokokra vonatkozó két kritériumot (lásd 3.4.) teljesíti, az alábbi mátrixegyenlettel formalizálható:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^2 \\ 0 & 1 & 2x_2 & 3x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 & c_0 & c_0 & c_0 \\ c_2 & c_2 & c_2 & c_2 \\ c_3 & c_3 & c_3 & c_3 \\ c_4 & c_4 & c_4 & c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

ahol x_1 x_2 az elem határpontjai. Ismét az együtthatómátrix inverzének oszlopai tartalmazzák a négy polinom együtthatóit. A polinomok felírása helyett ábrázoltam őket a 4.3. ábrán. Jól látható, hogy a van két elemfüggvény, melyek értéke 1 az elem adott node-ján, de deriváltja 0. És vice versa, van két elemfüggvény, melyek értéke 0, de deriváltjuk 1 az elem egyik node-ján.

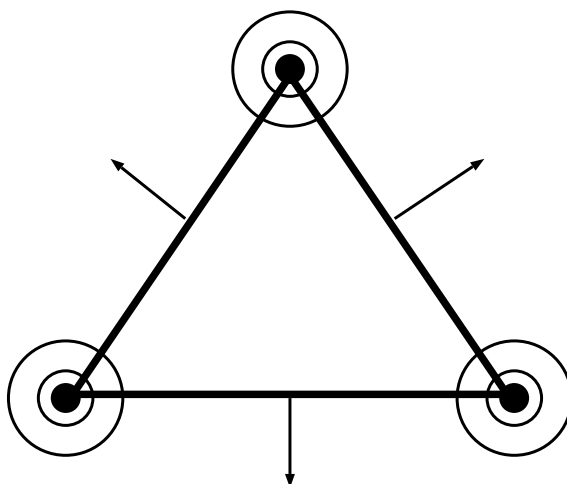
A Hermite elem egydimenzióban teljes értékű C^1 folytonos elem. Persze ez akkor teljesül, ha szomszédos elemek határain **ugyanazon** szabadsági fokokat előíró elemfüggvényeket bázisfüggvénnyé rendeljük össze.

Argyris elem

Az Argyris elem egy olyan háromszögelem, melynek az alábbi 21 szabadsági foka van:

- A függvény értéke a háromszög csúcsain (3 db)
- A függvény első deriváltjainak értéke a háromszög csúcsain (6 db)
- A függvény második deriváltjainak értéke a háromszög csúcsain (9 db)
- A függvény normális irányú deriváltjának értéke a háromszög éleinek felezőpontjában (3 db)

A kétdimenziós, ötödfokú polinomoknak épp 21 együtthatója van, így az Argyris elem egyértelműen megvalósítható velük. Az egyenletrendszer felírása ugyanúgy történik, mint az előző, egydimenziós példában, azonban terjedelmi okok miatt nem vetem papírra.



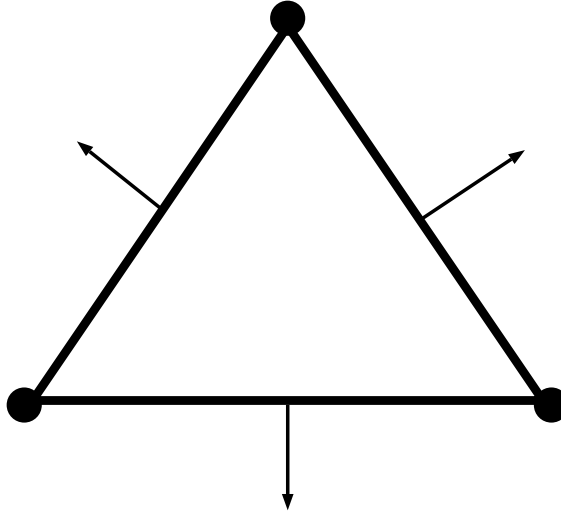
4.4. ábra. Az Argyris elem jellegzetes ábrázolása. A tömött pontok függvény értéket, mint szabadsági fokot jelölnek, az első körök az első deriváltakat, a második körök a második deriváltakat, a nyilak pedig a normális irányú deriváltakat a felezőpontokban.

Az Argyris elem kiváló konvergenciával rendelkező C^1 folytonosságú elem, [11, 22]. Hátránya, hogy bonyolult és nagyon sok szabadsági foka van, mely a végelem háló bővítésével a számítási igény ugrásszerű növekedéséhez vezet.

Morley elem

Az Argyris-nél egyszerűbb, de nem C^1 folytonosságú elem a Morley elem. Hat szabadsági fokkal rendelkezik, melyek a függvény értékei a háromszög csúcsaiban, illetve a normális irányú deriváltjai a háromszög éleinek felezőpontjában.

Ez az elem még a háromszögek határpontjaiban sem C^1 folytonos. Ennek ellenére konvergens megoldást ad a lineáris lemez problémájára [8, 22].



4.5. ábra. Az Morley elem jellegzetes reprezentálása. A tömött pontok függvény értéket, mint szabadsági fokot jelölnek, a nyilak pedig a normális irányú deriváltakat a felezőpontokban.

4.6.2. Asszemblálás

Az asszemblálás alapvetően a 3.7. fejezetben bemutatott módon történik. Ehhez azonban két problémát fel kell oldanunk.

A lokális és globális formafüggvények kapcsolata

A 3.7 fejezetben az asszemblálás folyamata azon alapult, hogy az integrálásokat elemenként, transzformációval végezzük el. Kihasználtuk, hogy $\hat{\mathbf{N}} = \mathbf{N} \circ \mathbf{F}$, azaz a referenciaelemen, ugyanazon szabadsági fokokkal előírt formafüggvények megegyeznek a globális elemfüggvények transzformáltjaival. Ahogy korábban is már rávilágítottam, ez nincs mindig így - és a C^1 folytonos elemek esetében sincs.

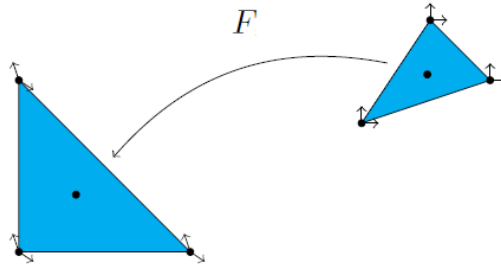
Ha deriváltak is szerepelnek a szabadsági fokok között, akkor a referenciatartományban lévő x ill. y szerinti derivált a transzformáció után nem x ill. y szerinti derivált lesz, hanem valamilyen iránymenti derivált - és persze vica versa. Ekkor két szomszédos elem nem ugyanazokat a szabadsági fokokat írja elő a node-okban: eltérő irányú deriváltakat írnak elő. Így a két függvény nem vonható össze egy függvénné - vagy ha meg is tesszük, a folytonossági feltétel biztosan nem teljesül. Kirby [21] általános megoldást adott a problémára. A lokális és globális függvények között egy mátrix teremt kapcsolatot, azaz

$$\mathbf{N} = \mathbf{C}(\hat{\mathbf{N}} \circ \mathbf{F}^{-1}), \quad (4.49)$$

avagy másképpen

$$\mathbf{N} \circ \mathbf{F} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{N}}, \quad (4.50)$$

ahol \mathbf{F} ismét (3.53) transzformáció. Természetesen a \mathbf{C} transzformációs mátrix értéke minden elem esetében más. A \mathbf{C} mátrix analitikusan felírható bizonyos esetekben (az Argyris és



4.6. ábra. A transzformáció hatására a deriváltak „elfordulnak”. Az ábra [21] irodalomból származik.

a Morley elem esetében is), itt azonban nem részletezem. Az Argyris elem transzformációs mátrixa megtalálható [11, 21] irodalmakban, a Morley elemé pedig a [21] irodalomban.

A transzformációs mátrix értéke meghatározható numerikusan is a (4.49) egyenlet megoldásával. Ehhez azonban meg kell határozni az egyenlet jobb oldalán lévő, globális elemfüggvényeket is, melyek ismeretére korábban nem volt szükség (és ezt ki is használtuk).

Jelölje \mathcal{X} a kétdimenziós polinom x, y tényezőinek oszlopvektorát a globális tartományban azaz

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ x^2 \\ y^2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

Ugyanígy jelölje a lokális tényezők oszlopvektorát $\hat{\mathcal{X}}$, azaz

$$\hat{\mathcal{X}} = \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{x}^2 \\ \hat{y}^2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

Jelölje \mathbf{E}_l a $\mathbf{C}(\hat{\mathbf{N}} \circ \mathbf{F}^{-1})$ polinom együtthatómátrixát, ahol minden sor egy lokális forma-függvény polinomjának együtthatóit jelöli. Jelölje ugyanígy \mathbf{E}_g a globális elemfüggvények együtthatómátrixát.

Ekkor a (4.49) egyenlet

$$\mathbf{E}_g \mathcal{X} = \mathbf{C} \mathbf{E}_l \hat{\mathcal{X}} \quad (4.53)$$

Az egyenletnek természetesen $\forall x, y, \hat{x}, \hat{y}$ -ra teljesülnie kell. Mivel \mathcal{X} és $\hat{\mathcal{X}}$ is ugyanazokat a polinomtényezőket tartalmazzák (csak más tartományban értelmezve), ezért teljesülnie kell a

$$\mathbf{E}_g = \mathbf{C} \mathbf{E}_l \quad (4.54)$$

egyenletnek. Ebből a transzformációs mátrix:

$$\mathbf{C} = [\mathbf{E}_l \mathbf{E}_g^{-1}]^{-1} \quad (4.55)$$

Észrevehetjük, hogy a zárójelben a globális együtthatómátrix inverze szerepel. Kézenfekvő, hogy a globális együtthatómátrixnak csak az inverze kell (például (4.48) egyenlet mátrixának transzponáltja), ezáltal háromszögenként mindösszesen egy inverziót kell végrehajtani.

Az \mathbf{E}_l együtthatómátrix meghatározásához végre kell hajtani az \mathbf{F}^{-1} transzformációval adott függvénykompozíciót. Ennek hatékony implementáláshoz segítségül hívhatók a szimbolikus számítások.

Ez a módszer egy teljesen általános megoldás a transzformációs mátrix meghatározására, cserébe minden elemre további számítások és egy mátrixinverzió végrehajtását igényli, mely megnöveli az asszemblálás számítási igényét.

A deriváltak transzformálása

Az elemenkénti merevségi mátrix meghatározásához ismét szükség van a deriváltak transzformációjára, melyhez ismét a láncszabályt alkalmazzuk. A második deriváltak transzformációjához a Jakobi-hoz hasonló mátrix meghatározására van szükség.

A láncszabály kétszer egymás utáni alkalmazásával belátható [21], hogy

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \Theta \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\hat{x},\hat{y})}{\partial \hat{x}^2} \\ \frac{\partial^2 f(\hat{x},\hat{y})}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} \\ \frac{\partial^2 f(\hat{x},\hat{y})}{\partial \hat{y}^2} \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

ahol

$$\Theta = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \hat{x}}{\partial x}\right)^2 & 2 \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} & \left(\frac{\partial \hat{y}}{\partial x}\right)^2 \\ \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} \\ \left(\frac{\partial \hat{x}}{\partial y}\right)^2 & 2 \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} & \left(\frac{\partial \hat{y}}{\partial y}\right)^2 \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

Észrevehetjük, hogy a Θ mátrix a Jakobi mátrix inverzének elemével előállítható. Ha $\mathbf{B} =$

\mathbf{J}^{-1} , akkor

$$\Theta = \begin{bmatrix} B_{11}^2 & 2B_{11}B_{21} & B_{21}^2 \\ B_{12}B_{11} & B_{12}B_{21} + B_{11}B_{22} & B_{21}B_{22} \\ B_{12}^2 & 2B_{22}B_{12} & B_{22}^2 \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

Ezzel a globális deriváltak transzformálhatók a lokális tartományba, és az elemenkénti merevségi mátrix is kifejthető. Az elemenkénti merevségi mátrix meghatározására a 4.8. fejezetben egy hatékony algoritmust mutatok be.

4.7. A peremfeltételek érvényesítése

Emlékezzünk vissza, hogy (4.28) gyenge alak peremmenti integráljait kétféleképpen írtuk fel.

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_{lin} = & - \oint_{\Gamma} v Q_n d\Gamma + \oint_{\Gamma} \left(\frac{\partial v}{\partial n} M_{nn} + \frac{\partial v}{\partial s} M_{ns} \right) d\Gamma = \\ & - \oint_{\Gamma} v \left(Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \right) d\Gamma + \oint_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial n} M_{nn} d\Gamma + [v M_{ns}]_s \end{aligned} \quad (4.59)$$

A peremfeltételek érvényesítésére alkalmazhatjuk a 3.6. fejezetben bemutatott módszereket. Ha a peremfeltételt Neumann típusúra vezetjük vissza, akkor a megoldandó mátrixegyenlet kiegészül egy peremmenti taggal:

$$-(\mathbf{K} + \mathbf{B})\mathbf{u} + \mathbf{f} = \frac{1}{\kappa^2} \mathbf{M} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (4.60)$$

Szabad peremfeltételek érvényesítése

Jóllehet a szélein szabadon rezgő lemez peremfeltételei a legbonyolultabbak, érvényesítésük a legegyszerűbb, hiszen minden peremmenti tag eltűnik. Emiatt tekinthetünk a szabad peremfeltételekre úgy, mint a lemez Neumann típusú peremfeltételére.

$$\mathfrak{B}_{lin}^{(f)} = 0 \quad \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (4.61)$$

Simply supported peremfeltételek

Ebben az esetben a (4.59) alsó sorát érdemes nézni, melynek második tagja a peremfeltételek értelmében nulla. A fennmaradó, $u = 0$ peremfeltételt kézenfekvő a Neumann peremfeltételre visszavezetni, azaz érvényesítsük a

$$\varepsilon_1 \left(Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \right) - u = 0 \quad (4.62)$$

peremfeltételt. Ezen megfontolásokkal a peremmenti integrálok⁶

$$\mathfrak{B}_{lin}^{(ss)}(u, v) = \frac{1}{\varepsilon_1} \oint_{\Gamma} uv \, d\Gamma \quad \mathbf{B} = [\mathfrak{B}_{lin}^{(ss)}(w_i, w_j)]_{ij} \quad (4.63)$$

Clamped peremfeltételek

Ebben az esetben is kézenfekvő a visszavezetni Neumann peremfeltételre. Érvényesítsük az alábbi peremfeltételeket:

$$\varepsilon_1(Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s}) - u = 0 \quad (4.64)$$

$$\varepsilon_2(M_{nn}) + \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (4.65)$$

Ezzel a peremmenti tagok

$$\mathfrak{B}_{lin}^{(c)}(u, v) = \frac{1}{\varepsilon_1} \oint_{\Gamma} uv \, d\Gamma + \frac{1}{\varepsilon_2} \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial v}{\partial n} \, d\Gamma \quad \mathbf{B} = [\mathfrak{B}_{lin}^{(c)}(w_i, w_j)]_{ij} \quad (4.66)$$

Érdemes megfigyelni ($v = \frac{\partial u}{\partial t}$ helyettesítéssel), hogy csak ebben az esetben kapunk a peremén veszteségmentes rendszert, és kapunk helyes peremfeltételt.

Lagrange Multiplikátor

A Lagrange Multiplikátor természetesen a lineáris lemez esetében is alkalmazható (lásd 3.6). A peremfeltételt érvényesítő mátrixokat a fent definiált \mathbf{B} mátrixokból megkaphatjuk, ha az ε paraméterek mellett az azonosan nulla sorokat is elhagyjuk.

Tapasztalataim alapján a Lagrange multiplikátor módszere modális megoldás keresésére nem alkalmas, ugyanakkor ennek okára nem jöttem rá. Az időtartományi szimulációk esetében azonban kiválóan, a fenti módszereknél sokkal jobb eredménnyel alkalmazható - ennek ára persze az ismeretlenek számának növekedése.

4.8. Implementáció

Az lineáris lemez végelem modelljét MATLAB környezetben implementáltam négyzet és a kör alakú geometriákra. Ez utóbbi a cintányér modellezése szempontjából fontos. A hálógeneráláshoz a MATLAB PDE Toolbox nevű beépített add-on-t használtam. A programból a háló paraméterei (x,y koordináták, háromszögek, peremelemek) kiexportálhatók és felhasználhatók.

A tartományi integrálok kiértékelése

A tartományi integrálok kiértékeléséhez az asszemblálás (lásd 3.7.) módszerét használhatjuk. Ehhez az elemenkénti mátrixok kiértékelése szükséges.

⁶Megjegyzem, hogy a (4.59) egyenletben szereplő kollokációs tagokat elhagytam. Az elhanyagolás ellenére jó eredményeket kaptam.

Az elemenkénti tömegmátrix könnyedén, kompakt formában felírható, mert nem tartalmaz deriválást.

$$\mathbf{M}_e = |\det(\mathbf{J})| \mathbf{C} \left(\int_{\Omega_r} \hat{\mathbf{N}} \hat{\mathbf{N}}^T d\Omega_r \right) \mathbf{C}^T \quad (4.67)$$

ahol $\hat{\mathbf{N}}$ ismét a referencia elem felett értelmezett formafüggvények oszlopvektora. Az integrál a referenciatartomány felett értelmezett, tehát előre kiértékelhető, és az asszemblálás minden iterációjában felhasználható. A transzformációs mátrix és a Jakobi determináns minden háromszögre más, ezért az elemenkénti mátrix asszemblálása előtt a szorzásokat el kell végezni.

Az elemenkénti merevségi mátrix

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{C} [\mathcal{K}(N_i, N_j)]_{ij} \mathbf{C}^T. \quad (4.68)$$

ahol N_i ismét a **globális** háromszög elem feletti elemfüggvényeket jelölik. Ha visszatekintünk \mathcal{K} definíciójára, és némileg átrendezzük azt, az alábbi praktikus formát kapjuk [15]:

$$\mathcal{K}(u, v) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + 2(1 - \nu) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad (4.69)$$

A $\mathcal{K}(N_i, N_j)$ diszkrétizálását követően az elemenkénti merevségi mátrix négy mátrix lineáris kombinációjaként állítható elő.

$$\mathbf{K}_e = |\det(\mathbf{J})| \mathbf{C} (\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 + \nu(\mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_3^T) + 2(1 - \nu)\mathbf{K}_4) \mathbf{C}^T \quad (4.70)$$

ahol

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= \int_{\Omega_e} \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}^T}{\partial x^2} d\Omega_e & \mathbf{K}_2 &= \int_{\Omega_e} \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}^T}{\partial y^2} d\Omega_e \\ \mathbf{K}_3 &= \int_{\Omega_e} \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}^T}{\partial y^2} d\Omega_e & \mathbf{K}_4 &= \int_{\Omega_e} \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \mathbf{N}^T}{\partial x \partial y} d\Omega_e \end{aligned}$$

Ezek még mindig globális tartományi elemeken vett integrálok, de a membránál bemutatott módszer (lásd ásd 3.10.) kiterjesztésével ismét lokális tartományban kifejthető mátrixok lineáris kombinációját kapjuk.

Példaként bemutatom \mathbf{K}_1 kiértékelését. A deriváltak transzformálásához a (4.56) egyenlet

Θ mátrixának első sorára van szükség, melyet jelöljön Θ_1^T . Ezzel \mathbf{K}_1 ij . eleme:

$$[\mathbf{K}_1]_{ij} = \int_{\Omega_r} \Theta_1^T \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \hat{N}_i}{\partial \hat{x}^2} \\ \frac{\partial^2 \hat{N}_i}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} \\ \frac{\partial^2 \hat{N}_i}{\partial \hat{y}^2} \end{bmatrix} \Theta_1^T \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \hat{N}_j}{\partial \hat{x}^2} \\ \frac{\partial^2 \hat{N}_j}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} \\ \frac{\partial^2 \hat{N}_j}{\partial \hat{y}^2} \end{bmatrix} d\Omega_r = \quad (4.71)$$

$$\int_{\Omega_r} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \hat{N}_i}{\partial \hat{x}^2} & \frac{\partial^2 \hat{N}_i}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} & \frac{\partial^2 \hat{N}_i}{\partial \hat{y}^2} \end{bmatrix} \underbrace{\Theta_1 \Theta_1^T}_{\mathbf{T}} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \hat{N}_j}{\partial \hat{x}^2} \\ \frac{\partial^2 \hat{N}_j}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} \\ \frac{\partial^2 \hat{N}_j}{\partial \hat{y}^2} \end{bmatrix} d\Omega_r \quad (4.72)$$

A mátrixszorzásokat elvégezve az alábbi terjedelmes, de praktikusán használható kifejezést kapjuk \mathbf{K}_1 -re.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= T_{11} \mathbf{K}_{\hat{x}\hat{x},\hat{x}\hat{x}} \\ &+ T_{21} (\mathbf{K}_{\hat{x}\hat{x},\hat{x}\hat{y}} + \mathbf{K}_{\hat{x}\hat{x},\hat{x}\hat{y}}^T) \\ &+ T_{31} (\mathbf{K}_{\hat{x}\hat{x},\hat{y}\hat{y}} + \mathbf{K}_{\hat{x}\hat{x},\hat{y}\hat{y}}^T) \\ &+ T_{22} \mathbf{K}_{\hat{x}\hat{x},\hat{x}\hat{y}} \\ &+ T_{32} (\mathbf{K}_{\hat{x}\hat{y},\hat{y}\hat{y}} + \mathbf{K}_{\hat{x}\hat{y},\hat{y}\hat{y}}^T) \\ &+ T_{33} \mathbf{K}_{\hat{y}\hat{y},\hat{y}\hat{y}} \end{aligned} \quad (4.73)$$

ahol

$$\mathbf{K}_{\alpha\beta,\gamma\delta} = \int_0^1 \int_0^{1-\hat{y}} \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{N}}}{\partial \alpha \partial \beta} \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{N}}^T}{\partial \gamma \partial \delta} d\hat{x} d\hat{y} \quad (4.74)$$

Ezen mátrixok már a referenciatartományban kifejtett integrálok eredményei, így előre kiszámolhatók, és az asszembblálás során felhasználhatók. Természetesen a többi mátrix (\mathbf{K}_2 , \mathbf{K}_3 , \mathbf{K}_4) is ugyanezzel a módszerrel, hasonló formában írható fel. Ekkor a Θ mátrix többi sorát kell felhasználni.

A peremmenti integrálok kiértékelése

Peremmenti integrálok kiértékelésére clamped és simply supported peremfeltételek esetében van szükség. A tartomány pereme ismét szakaszokkal (peremelemekkel) közelíthető, és az integrálok peremelemenkénti kifejtése lehetséges.

Ismét kihasználható, hogy a szakaszon vett integrál paraméterezése az \mathbf{F} transzformáció és az $\hat{y} = 0$ helyettesítés egymás utáni alkalmazása. Ezzel simply supported peremfeltétel elemenkénti \mathbf{B}_e mátrixa

$$\mathbf{B}_e^{(ss)} = \frac{1}{\varepsilon_1} \mathbf{C} \int_0^1 \hat{\mathbf{N}} \hat{\mathbf{N}}^T \Big|_{\hat{y}=0} d\hat{x} L_s \mathbf{C}^T \quad (4.75)$$

ahol L_s a szakasz hossza és \mathbf{C} a korábban bevezetett transzformációs mátrix.

A clamped peremfeltételhez a láncszabály alkalmazása szükséges, azaz

$$\nabla_{xy} f = \mathbf{J}^{-T} \nabla_{\hat{x}\hat{y}} f. \quad (4.76)$$

Ha $\mathbf{B} = \mathbf{J}^{-1}$, akkor

$$\frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} n_x^2 B_{11}^2 + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} B_{21} B_{12} n_x n_y \quad (4.77)$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} B_{21} B_{12} n_x n_y + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} B_{22}^2 n_y^2 \quad (4.78)$$

Ezzel a clamped peremfeltételt érvényesítő elemenkénti mátrix

$$\mathbf{B}_e^{(c)} = \mathbf{B}_e^{(ss)} + L_s \frac{1}{\varepsilon_2} \mathbf{C} [\mathbf{B}_{xx} n_x^2 B_{11}^2 + (\mathbf{B}_{xy} + \mathbf{B}_{xy}^T) B_{21} B_{12} n_x n_y + \mathbf{B}_{yy} B_{22}^2 n_y^2] \mathbf{C}^T \quad (4.79)$$

ahol

$$\mathbf{B}_{xx} = \int_0^1 \frac{\partial \hat{\mathbf{N}}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{\mathbf{N}}^T}{\partial \hat{x}} \Big|_{\hat{y}=0} d\hat{x} \quad (4.80a)$$

$$\mathbf{B}_{xy} = \int_0^1 \frac{\partial \hat{\mathbf{N}}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{\mathbf{N}}^T}{\partial \hat{y}} \Big|_{\hat{y}=0} d\hat{x} \quad (4.80b)$$

$$\mathbf{B}_{yy} = \int_0^1 \frac{\partial \hat{\mathbf{N}}}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{\mathbf{N}}^T}{\partial \hat{y}} \Big|_{\hat{y}=0} d\hat{x} \quad (4.80c)$$

A fenti mátrixok már kizárólag a referenciatartományban vannak, így előre kiértékelhetők.

Az $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ határérték

A Neumann peremfeltételre való visszavezetés esetében az ε_1 ill. ε_2 változók nulla értéke esetén pontosan érvényesülnének a peremfeltételek. Ekkor azonban egy végtelen nagy értékeket tartalmazó mátrixot adnánk hozzá a \mathbf{K} -hoz.

Nézzük meg mi történik valójában amikor a $\mathbf{K} + \mathbf{B}$ műveletet végrehajtjuk. A \mathbf{K} mátrix önmagában a szabad peremfeltételek érvényesítését írja elő. A \mathbf{B} elemei nagyságrendekkel nagyobbak, mint a \mathbf{K} -ban azonos helyen lévő értékek. Tehát \mathbf{B} hozzáadásával felülírjuk a szabad peremfeltételek érvényesítését.

Ehhez persze az is szükséges, hogy \mathbf{M} mátrixban ugyanezek az elemek szintén elhanyagolhatóan kicsik legyenek a \mathbf{B} hozzáadott elemeihez képest.

A határérték teljesítéséhez tehát a \mathbf{B} mátrix nem-nulla sorait beírjuk \mathbf{K} azonos sora helyére, miközben az adott sort \mathbf{M} -ben kinullázzuk. Észrevehetjük, hogy ez nem más, mint

a súlyozó együtthatók előírásának módszere! A súlyozó együtthatókra vonatkozó feltételeket gyengén, a $\oint_{\Gamma} uv d\Gamma = 0$ és a $\oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial v}{\partial n} d\Gamma = 0$ egyenletek felírásával találjuk meg. A v tetszőlegességéből ismét következik, hogy ezek minimális hibával érvényesítik a peremfeltételeket.

Fontos, hogy ez kizárólag a clamped peremfeltételek esetén működik. A simply supported esetében az M_{nn} érvényesítése benne van a \mathbf{K} mátrixban, ezt egészíti ki a \mathbf{B} mátrix hozzáadása. Ha az M_{nn} érvényesítését is megszüntetjük, akkor nem kapunk egyértelműen megoldható feladatot. Elképzelhető, hogy a simply supported esetre is van hasonló megoldás, de a dolgozat elkészültének időpontjáig erre nem jöttem rá.

4.9. Eredmények

Két geometriára végeztem frekvencia-, és időtartományi szimulációkat: a négyzet alakú és kör alakú lemezekre. Ez utóbbi kiindulási alapja a cintányér szintézisének. Az eredmények ellenőrzésének módja a sajátfrekvenciák összehasonlítása. Leissa [26] minden vizsgált esetre tartalmazza a helyes sajátfrekvenciákat, így minden esetben ezt tekintettem referenciának. A modális megoldás során a

$$\Delta^2 U = \left(\frac{\omega}{\kappa}\right)^2 U \quad (4.81)$$

egyenlet nemtriviális megoldásait keressük.

4.9.1. A négyzet alakú lemez

A négyzet alakú lemez különös figyelmet kapott az irodalomban [26]. A háromfajta peremfeltétel tetszőlegesen permutálható a négy oldalon ezzel összesen 21 különböző eset vizsgálható. Ezek nagy részét Leissa [26] részletesen analizálta.

Ebben a dolgozatban a négy oldalon simply supported, illetve szabadon rezgő lemez esetét mutatom be.

A legegyszerűbb, analitikusan is könnyedén megoldható eset a simply supported. A (4.20) peremfeltételek a speciális elrendezésben a $u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ -ra egyszerűsödnek a függőleges oldalakon, illetve $u = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ -ra a vízszintes oldalakon. Az analitikus megoldás [26]

$$U = A \sin \frac{m\pi}{a} \sin \frac{n\pi}{a} \quad (4.82)$$

ahol a a négyzet alakú lemez oldalának hossza, m, n egész számok. A sajátfrekvenciák pedig

$$\omega = \kappa \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \right] \quad (4.83)$$

A végeelem implementáció során a (4.63) módszert alkalmaztam a peremfeltételek érvényesítésére. A sajátfrekvenciákat a MATLAB `eigs` függvényével határoztam meg. Az ε_1

n	m	$\omega a^2/\kappa$	Morley	Hiba [%] (Morley)	Argyris	Hiba [%] (Argyris)
1	1	19.7392	19.6600	0.4013	19.7392	1.18E-05
2	1	49.3480	48.8790	0.9504	49.3480	1.01E-05
2	2	78.9568	77.5863	1.7358	78.9568	1.93E-05
3	1	98.6960	96.8100	1.9110	98.6960	1.12E-05
3	2	128.3049	125.3050	2.3381	128.3048	1.42E-05
3	3	177.6529	172.1690	3.0869	177.6528	4.46E-05
4	1	167.7833	162.4300	3.1906	167.7833	6.45E-06
4	2	197.3921	190.1300	3.6790	197.3920	2.01E-05

4.2. táblázat. *A simply supported peremfeltételek Morley, illetve Argyris elemek esetében. A négyzet alakú lemez oldalának hossza a. A referenciaadatok [26] irodalomból származnak.*

paraméter megadására a következő, ad-hoc szabály megfelelőnek bizonyult. Ha biztosítjuk, hogy a \mathbf{B} mátrix normája sokkal (2-3 nagyságrenddel) nagyobb, mint \mathbf{K} normája, akkor a peremfeltételek jól érvényesülnek. Túl magasra nem érdemes állítani ε_1 értékét, mert akkor a keletkező $(\mathbf{K} + \mathbf{B})$ mátrix rosszul kondicionált lesz. Az eredményeket a 4.2. táblázat foglalja össze. Feltüntettem a Morley és az Argyris elemek eredményeit ugyanazon háló felhasználásával.

Láthatjuk, hogy az Argyris elemek kifejezetten pontos eredményt adnak. Ennek ára pedig a megnövekedett számítási igény (az Argyris elemnek közel 3x annyi szabadsági foka van). A Morley elem viszont annak ellenére ad jó megoldást, hogy nem teljesíti a C^1 folytonossági feltételt.

Szabad peremfeltételek esetén egyszerűen $\mathfrak{B}(u, v) = 0$ teljesül, és az általánosított peremértékfeladat a

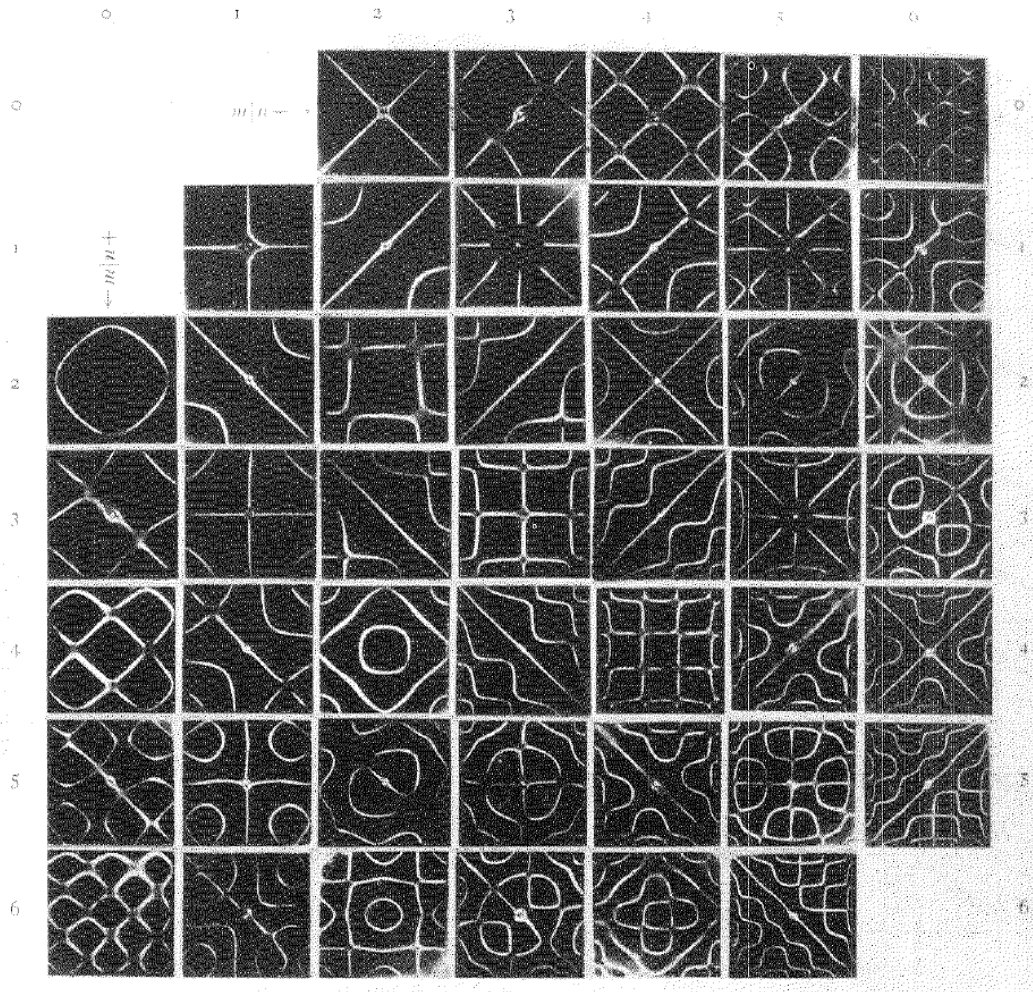
$$\mathbf{K}\mathbf{c} = \left(\frac{\omega}{\kappa}\right)^2 \mathbf{M}\mathbf{c} \quad (4.84)$$

egyszerű formát ölti. Az eredményeket a 4.3. táblázat foglalja össze.

Érdemes megfigyelni, hogy a paraméterek ν értékétől függenek. Láthatjuk, hogy ebben az esetben nincs számottevő különbség a Morley és az Argyris elem sajátfrekvenciának pontossága között. Ez részben betudható annak, hogy az irodalmi adatok sem feltétlenül pontosak, mert ott is numerikus módszert alkalmaztak. A kapott sajátfrekvenciák azonban

$\omega^2 a^4/\kappa^2$	Morley	Hiba (Morley) [%]	Argyris	Hiba (Argyris) [%]
12.43	12.437	0.0562	12.4540	0.1929
26.4	25.87	2.0075	25.9700	1.6288
35.73	35.44	0.8116	35.6347	0.2666
80.8	80.36	0.5507	80.8957	0.1184
237.1	231.56	2.3365	235.3539	0.7365
266	262.31	1.3883	269.3284	1.2513
316.1	315.52	0.1834	320.6849	1.4505

4.3. táblázat. *A szélein szabadon rezgő négyzet alakú lemez sajátfrekvenciái $\nu = 0.225$ esetén. A négyzet alakú lemez oldalának hossza a. A referenciaadatok [26] irodalomból származnak.*



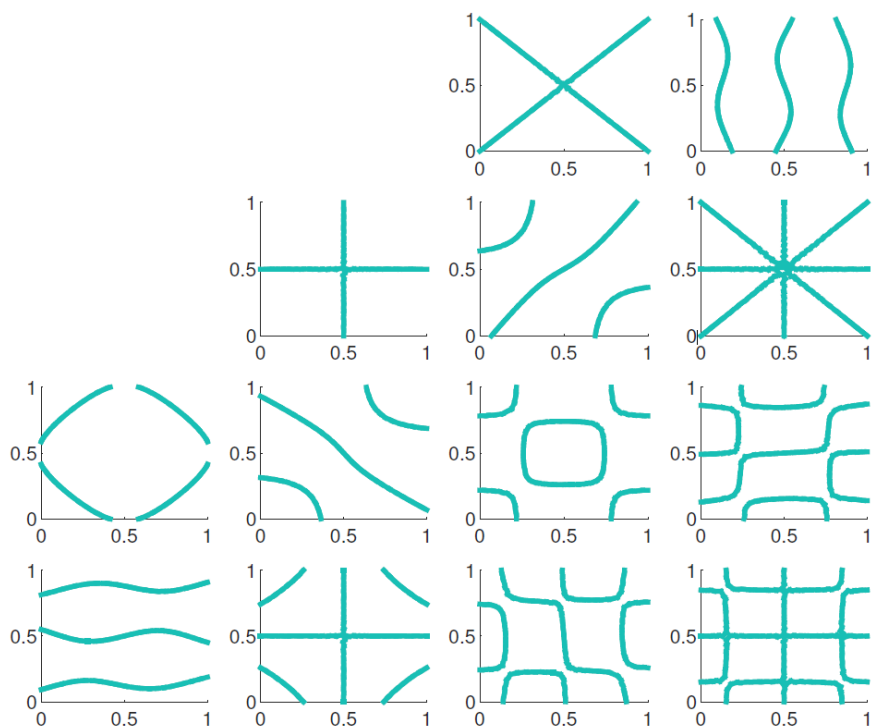
4.7. ábra. A híres Chladni ábrák - a szabadon rezgő lemez módusalakjai

megfelelni látszanak az irodalmi adatoknak, így a bemutatott végeelem-implementáció elfogadható.

A négyzetes lemez szabad rezgésénél mindenképpen érdemes megemlíteni az ún. Chladni ábrákat. A német fizikus, Chladni egy érdekes kísérletet végzett el. Homokot szórt egy vékony, szélein szabadon hagyott lemezre, és hegedűvonóval hozta rezgésbe azt. A rezgetés hatására különleges formák rajzolódtak ki a lemezen (4.7. ábra). A jelenségre ugyan nem tudott magyarázatot adni, de felkeltette több fizikus érdeklődését is. Chladni kísérlete készítette Kirchhoff-ot az addig ismert lemezmodell pontosítására [15].

A Chladni ábrák valójában a módusalakok nullátmenetei: ha sikerül a lemezt egy szűk frekvenciasávban gerjeszteni, akkor kizárólag egy módus képes rezegni. A módusalak nem rezeg a nullátmenetek mentén, így ott a homok megmarad, míg többi, rezgő helyről „elugrál”. Előbb utóbb a homok felgyülemlik a nullátmenetek környékén és az ábrák kirajzolódnak.

Nézzük meg, hogy a végeelem modellel kapott módusalakok nullátmeneti hogyan néznek ki. Az ábrázolásnál kihasználhatjuk, hogy a node-okban az értéket előíró bázisfüggvény súlyozóegyütthetója meghatározza a megoldásfüggvény értékét is. A 4.8 ábrán láthatóak a módusalakok nullátmenetei. Láthatjuk, hogy több esetben megkapjuk a kísérleti Chladni



4.8. ábra. A szabadon rezgő négyzetes lemez módusainak nullátmenetei, avagy a Chladni ábrák reprodukálása végelelem módszerrel.

ábrákat. Eltérések természetesen vannak, de ne felejtünk el két dolgot: egyrészt a valós kísérleti elrendezésben a lemez valahogyan rögzítve van - például középen, másrészt a kétszeres multiplicitású sajátfrekvenciák módusalakjai nem egyértelműek. Ezt a jelenséget már a membránnál is megfigyelhettük.

4.9.2. A kör alakú lemez

A cintányér szintézise a kör alakú lemez modelljén alapul. Ismét összehasonlítom a kapott módusfrekvenciákat az irodalmi eredményekkel.

A simply supported peremfeltételek esetében ismét (4.63) alkalmazható. Az eredményeket a 4.4. táblázat foglalja össze.

$\omega r^2/\kappa$	Morley	Hiba (Morley)	Argyris	Hiba (Argyris)
4.977	4.928	0.985%	4.941964	0.704%
13.94	13.7678	1.235%	13.90244	0.269%
25.65	25.1365	2.002%	25.58054	0.271%
29.76	29.074	2.305%	29.68858	0.240%
48.51	46.7198	3.690%	48.33	0.371%
33.1	32.5906	1.539%	33.1145	0.044%

4.4. táblázat. A szélein szabadon rezgő lemez sajátfrekvenciái $\nu = 0.3$. A numerikus peremfeltétel érvényesítéséhez $\varepsilon_1 = 10^{-4}$ paramétert használtam. A kör alakú lemez sugara r . A referencia-adatok [26] irodalomból származnak.

A clamped peremfeltételek esetében a (4.66) alkalmazandó. Az eredményeket a 4.5. táblázat foglalja össze.

$\omega r^2/\kappa$	Morley	Hiba (Morley)	Argyris	Hiba (Argyris)
10.2158	10.156	0.582%	10.315	0.966%
21.26	20.78	2.255%	21.467	0.973%
34.88	33.574	3.743%	35.208	0.939%
39.771	38.503	15.581%	40.161	0.981%
51.04	48.543	24.564%	51.508	0.916%
33.1	32.591	1.539%	33.115	0.044%

4.5. táblázat. *A szélein rögzített lemez sajátfrekvenciái. A kör alakú lemez sugara r . A referenciaadatok [26] irodalomból származnak.*

A szabad peremfeltételek esetében egyszerűen $\mathbf{B} = \mathbf{0}$. Az eredményeket a 4.6. táblázat foglalja össze.

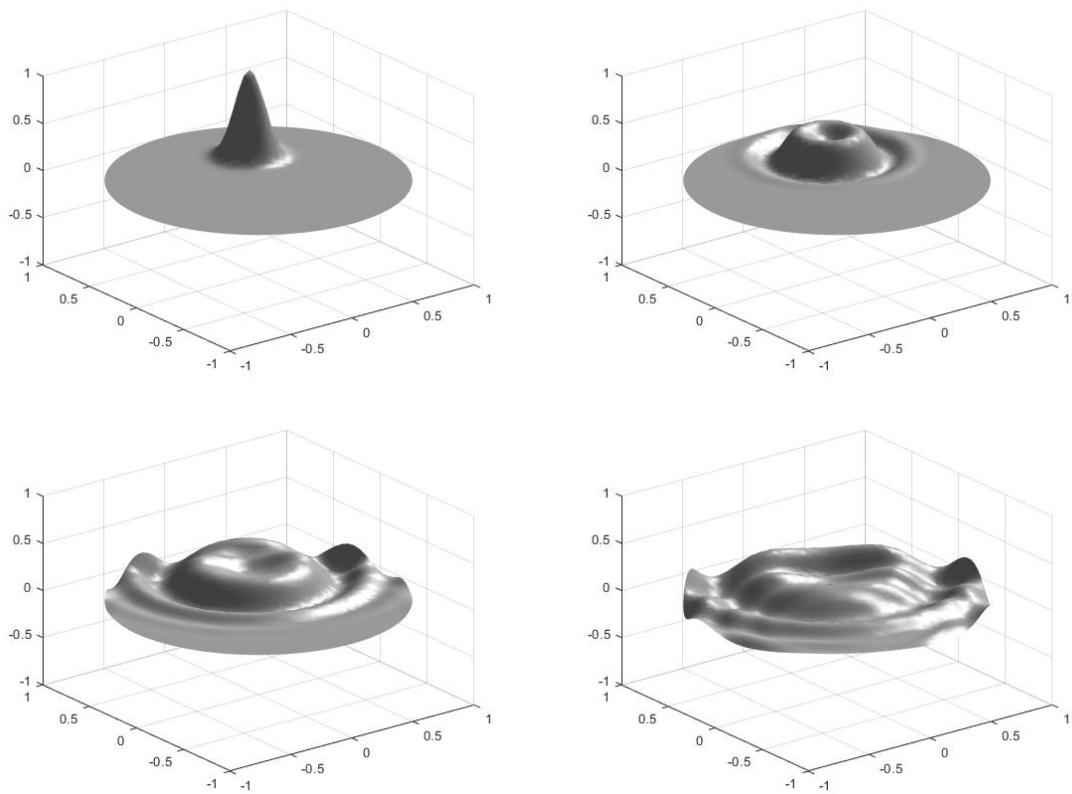
$\omega r^2/\kappa$	Morley	Hiba (Morley)	Argyris	Hiba (Argyris)
5.253	5.2634	0.198%	5.2704	0.331%
9.084	9.0463	0.415%	9.083	0.011%
12.23	12.2063	0.194%	12.2634	0.273%
20.59	20.2923	1.446%	20.546	0.214%
21.6	21.3642	1.092%	21.5615	0.178%
33.1	32.5906	1.539%	33.1145	0.044%

4.6. táblázat. *A szélein szabadon rezgő lemez sajátfrekvenciái. $\nu = 0.33$. A kör alakú lemez sugara r . A referenciaadatok [26] irodalomból származnak.*

Mindhárom peremfeltétel esetében kijelenthetjük, hogy a numerikusan kapott sajátfrekvenciák az irodalmi adatokkal egyezést mutatnak. Kiugró különbség csak a Morley elem esetében, clamped peremfeltétel mellett tapasztalható. Ez egy ilyen frekvenciatartománybeli analízis során jelentős eltérés, de az időtartományi szimulációk esetében a Lagrange multiplikátor használata garantáltan jobb eredményre vezet.

Időtartománybeli szimuláció

A végeelem diskretizáció során kapott egyenletrendszer formálisan megegyezik az előző fejezetben tárgyalt hullámeqyenletével. Emiatt a 3.8. fejezetben bemutatott időtartománybeli megoldás ugyanúgy alkalmazható, ugyanazzal a stabilitási feltétellel. A 4.9. ábrán a szélein szabadon rezgő lemez pillanatképei láthatóak. Ismét kiválóan látható a diszperzió jelensége, mely immáron nem numerikus eredetű.



4.9. ábra. *A szélein szabadon rezgő lineáris lemez pillanatképei. A kezdeti feltételt egy Gauss impulzus biztosítja. Az ábra elkészítéséhez használt végeselemháló 4128 Morley típusú háromszögelemet tartalmaz.*

5. fejezet

A gerjesztés és a hangsugárzás modellezése

A cintányér szintézisének legfontosabb eleme a rezgő lemez, azonban nem szabad megfeledkezni a gerjesztésről és a hangsugárzásról sem. Ebben a fejezetben egyszerű, könnyen implementálható, kis számításigényű modellt mutatok be mindkettőre.

5.1. A gerjesztés egyszerű tömeg-rugó modellje

A gerjesztés modellezésére legtöbb esetben alkalmas egy koncentrált paraméterű, nemlineáris tömeg-rugó elrendezés, más szóval oszcillátor. A gerjesztésmodell nemlinearitása részben annak köszönhető, hogy a dobverő csak akkor fejt ki erőt a lemezre, ha azok kontaktusban vannak. Ekkor energiát cserélnek egymás között, a kontaktus megszűnésével pedig „önálló” életet élnek. Ebben az alfejezetben bemutatott modell elősorban a [6] irodalomban leírtakra épül.

A gerjesztő erő térbeli eloszlása legegyszerűbb esetben pontszerűnek tekinthető, melyet matematikailag egy Dirac-deltával írhatunk le. Az x_0, y_0 pontban ható pontszerű gerjesztés az alábbi alakot ölti:

$$f(x, y, t) = f'(t)\delta(x - x_0, y - y_0) \quad (5.1)$$

A lemez egyenlete kiegészítve a teljes gerjesztésmodellel, az alábbi parciális differenciálegyenletek formájában írható fel¹:

$$\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -D\Delta^2 u + \delta(x - x_0, y - y_0)f'(t, u) \quad (5.2a)$$

$$f'(t) = -M_H \frac{d^2 u_H}{dt^2} = K_H([u_H - u(x_0, y_0)]^+)^{\alpha} \quad (5.2b)$$

¹A kétdimenziós Dirac-delta $\frac{1}{m^2}$ dimenziójú mennyiség.

ahol u_H a dobverőt reprezentáló tömeg kitérése, M_H a tömeg, a K_H pedig a rugó merevsége. Az α nemlineáris exponens jellemzően 1.5 és 3.5 közötti értéket vesz fel. A „pozitív rész” operátor $[\cdot]^+$ definíciója:

$$[a]^+ = \begin{cases} a & \text{ha } a > 0 \\ 0 & \text{ha } a \leq 0 \end{cases}$$

Érdemes némi átrendezéssel, és néhány új paraméter bevezetésével az (5.2) egyenletekben szereplő számos paramétert tömörebben és szemléletesebben összefoglalni. A (5.2a) egyenlet bal oldalán található ρh mennyiség a h vastagságú, vékony lemez felületegységre vonatkoztatott sűrűsége, így a lemez tömege $M_p = \rho h A_p$, ahol A_p a lemez kétdimenziós felülete. Elemi átalakításokkal az (5.2) egyenletek az alábbi formára hozhatók:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\kappa^2 \Delta^2 u + m F(t, u) \delta(x - x_0, y - y_0) \quad (5.3a)$$

$$F(t, u) = -\frac{d^2 u_H}{dt^2} = \omega_H^{1+\alpha} ([u_H - u(x_0, y_0)]^+)^{\alpha} \quad (5.3b)$$

ahol κ , m , ω_H és F paraméterek:

$$\begin{aligned} \kappa &= \sqrt{\frac{D}{\rho h}} & m &= A_p \frac{M_H}{M_p} \\ \omega_H &= \left(\frac{K_H}{M_H} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}} & F &= \frac{f'}{M_H} \end{aligned}$$

A gerjesztés folyamata

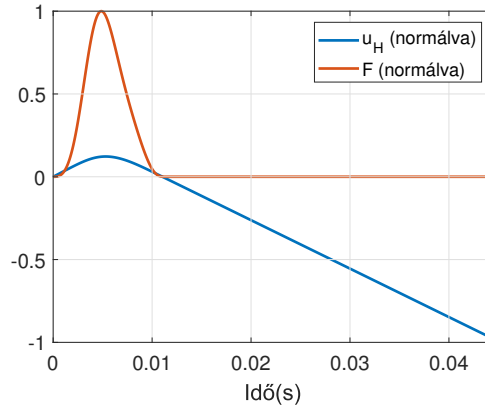
Ez a gerjesztésmodell egy egyszerű, nemlineáris tömeg-rugó elrendezést csatol a lemez egyenleteihez. Az (5.3b) egyenlet $[\cdot]^+$ operátora miatt csak akkor hat erő a két test között, ha kontaktusban vannak, azaz $u_H > u(x_0, y_0)$ fennáll². Amikor a dobverő kontaktusba kerül a lemezzel, akkor lokális deformációt okoz az ütés helyén, (x_0, y_0) pontban. Az $u_H - u(x_0, y_0)$ távolság növekedésével a dobverő eredeti végpontja egyre jobban belehatol a lemez anyagába; a kifejtett erő egyre nagyobb, míg a dobverő gyorsulása egyre negatívabb lesz, egyre több energiát veszít. Végül a kontaktus megszűnik, a dobverő eltávolodik a lemeztől. A folyamatot szimuláció segítségével az 5.1 ábra szemlélteti.

A rendszert az u_H -ra vonatkozó kezdeti feltételek indítják be. Amikor dobverővel megütünk egy lemezt, akkor a dobverő csúcsát modellező tömeg valamilyen mozgási energiával ütközik a lemeznek. Ezt a mozgási energiát a kezdeti feltételekkel adhatjuk a rendszerhez. Legyenek a kezdeti feltételek:

$$u_H(t = 0) = u(x_0, y_0) \quad \frac{\partial u_H}{\partial t} = v_0 \quad (5.4)$$

A dobverő kezdeti kitérését a lemez kezdeti kitérésével tesszük egyenlővé. Ez azt fejezi ki,

²Ebben a felírásban a lemezt tulajdonképpen alulról ütjük meg. Gyakorlatilag ez persze nem így van, de a modell akusztikai szemszögből invariáns erre.



5.1. ábra. A gerjesztő erő, és a dobverőt reprezentáló tömeg kitérése az idő függvényében. Az ábra a gerjesztés folyamatát szemlélteti. Az u_H és F görbék a vizsgált időtartományra normálva szerepelnek. Erre azért volt szükség, mert a gerjesztő erő több nagyságrenddel nagyobb, mint a dobverő kitérése.

hogy a tömeg-rugó rendszer éppen kontaktusban van a lemezzel, azaz a $t = 0$ időpillanat épp a dobverő és a lemez ütközésének időpontja.

Folytonos idejű energiamérleg

A gerjesztésmodellt akkor tekinthetjük helyesnek, ha megmutatható, hogy a rendszer teljes energiája (veszteségektől eltekintve) megmarad, és valamilyen módon megoszlik a dobverő és a lemez között. A rendszer beindításához szükséges energiát kezdetben a dobverő tárolja, és amikor a lemezzel kontaktusban van, energiát cserélnek.

Az energiamérleg felírásához szorozzuk meg az (5.3a) egyenlet mindkét oldalát $\frac{\partial u}{\partial t}$ -vel és integráljuk a vizsgált Ω tartományon. A gerjesztést nem tartalmazó tagok ugyanúgy átalakíthatók, mint a lineáris lemeznél (lásd 4.4), így természetesen megjelennek annak energiaviszonyai is. Különösebb figyelmet kizárólag a gerjesztő tag igényel:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{W}_{strain}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{W}_{kin}}{\partial t} &= m \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial t} F \\
&= m \frac{\partial (u(x_0, y_0) - u_H)}{\partial t} F + m \frac{\partial u_H}{\partial t} F \\
&\stackrel{(5.3b)}{=} -m\omega_H^{1+\alpha} \frac{\partial (u_H - u(x_0, y_0))}{\partial t} ([u_H - u(x_0, y_0)]^+)^{\alpha} - m \frac{\partial u_H}{\partial t} \frac{\partial^2 u_H}{\partial t^2} \\
&= -\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\left[\frac{m\omega_H^{1+\alpha}}{\alpha+1} ([u_H - u(x_0, y_0)]^+)^{\alpha+1} + \frac{m}{2} \left(\frac{\partial u_H}{\partial t} \right)^2 \right]}_{\mathcal{W}_{exc}}
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Az energiamérleg felírásában $\mathcal{P}_{lin} = 0$ -t, azaz a lemez veszteségmentességét feltételeztem. A gerjesztésmodell beiktatásával a (4.34) egyenletben $\mathcal{P}_{exc} = -\frac{\partial \mathcal{W}_{exc}}{\partial t}$ lesz. Szemléletesen

tehát azt írhatjuk, hogy

$$\frac{\partial \mathcal{W}_{strain}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{W}_{kin}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{W}_{exc}}{\partial t} = 0, \quad (5.6)$$

azaz a két, kölcsönös csatolásban lévő rendszer összenergiája mindig változatlan. Integráljuk az (5.6) egyenletet idő szerint 0-tól t -ig, és tételezzük fel, hogy a lemez összenergiája kezdetben nulla, így

$$\mathcal{W}_{strain}(t) + \mathcal{W}_{kin}(t) + \mathcal{W}_{exc}(t) = \mathcal{W}_{exc}(0). \quad (5.7)$$

Tehát, ha a lemez kezdetben energiamentes volt, akkor a rendszer teljes működése során a gerjesztésben tárolt kezdeti energiával „gazdálkodik” - éppen ezt szerettük volna belátni. Ha az (5.4) kezdeti feltételeket alkalmazzuk, akkor \mathcal{W}_{exc} kifejezésében csak a mozgási energia szerepel, azaz az $\frac{m}{2}v_0^2$ kezdeti energia egyben a veszteségmentes rendszer mindenkori összenergiája is.

Explicit diszkretizáció

A gerjesztés pontszerű térbeli eloszlása miatt egyszerűen diszkretizálható végeselem módszer alkalmazásával. Visszatekintve a 3. fejezetre, a gerjesztő tag térbeli végeselem diszkretizációja a bázisfüggvények és a gerjesztés térbeli eloszlásának szorzatintegrálja volt. Formálisan:

$$\mathbf{f} = \int_{\Omega} F(t, u_h) \delta(x - x_0, y - y_0) \mathbf{w} d\Omega = F(t, u_h(x_0, y_0)) \underbrace{\mathbf{w}(x_0, y_0)}_{\mathbf{I}_k}. \quad (5.8)$$

Továbbá a diszkretizálást követően

$$u_h(x_0, y_0) = \mathbf{I}_k^T \mathbf{u} \quad (5.9)$$

is teljesül. Abban a speciális (és gyakorlatban nagyon praktikus) esetben, amikor a gerjesztés éppen olyan node-ban hat, ahol a szabadsági fokként szerepel u_h kitérése, akkor \mathbf{I}_k mindösszesen egy darab 1-est tartalmaz a megfelelő indexen.

A térbeli diszkretizációt követően az időbeli diszkretizációt legegyszerűbb esetben az alábbi módon írható fel:

$$\delta_{tt} \mathbf{u} = -\kappa^2 \mathbf{K} \mathbf{u}_n + \mathbf{I}_k F_n \quad (5.10a)$$

$$F_n = -\delta_{tt} u_H = \omega_H^{1+\alpha} ((u_H)_n - \mathbf{I}_k^T \mathbf{u}_n)^+ \quad (5.10b)$$

Ebben a felírásban a második egyenlet jobb oldala expliciten ismert az n . időpillanattól, így F_n is expliciten kiszámítható. A gerjesztés számításának folyamata a következő:

1. Az (5.10b) egyenlet jobb oldalának felhasználásával F_n értéke expliciten kiszámítható.
2. Ezt követően az (5.10a) egyenletből \mathbf{u}_{n+1} értéke expliciten meghatározható.
3. Végül (5.10b) jobb és bal oldala segítségével $(u_H)_{n+1}$ értéke is expliciten kiszámítható. Ez a következő iterációban elengedhetetlen F_n kiszámításához.

A fenti diszkretizáció teljesen explicit, könnyedén implementálható, de stabilitása általánosan nem bizonyítható [6]. Ennek ellenére lassan változó gerjesztésekre ($F_n \approx F_{n-1}$) kifejezetten jól működik [4]. Olyannyira, hogy a saját végeelem szimulációim során nem tudtam instabil viselkedést elérni.

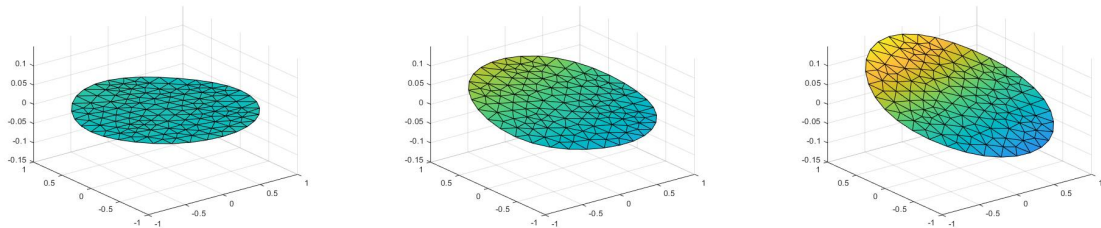
Merevtest-mozgás

A szélein szabadon rezgő lemez modellezi a test merev (deformáció nélküli) elmozdulását is [24]. A szabadon rezgő lemez modelljének három, merevtest-elmozdulást reprezentáló szabadsági foka van: elmozdulás függőleges irányban és elfordulás két tengelye mentén. A merevtest-elmozdulást reprezentáló módusalakok síkok, sajátfrekvenciájuk pedig nulla.

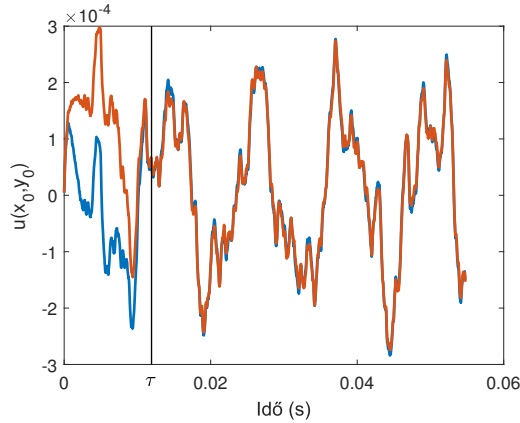
A lemez rezgésének eddigi analízise során nem szembesültünk ezzel a jelenséggel. Ennek oka, hogy korábbi szimulációs példákban a lemez gerjesztését kezdeti feltétel biztosította - például egy emelt koszinusz vagy egy Gauss impulzus. Amennyiben nulla kezdeti sebességet ($\frac{\partial u}{\partial t} = 0$) írunk elő a kezdeti kitérés mellé, akkor a merevtest módusok nem kapnak energiát.

A merevtest-mozgás akusztikai szempontból (DC módus lévén) érdektelen, azonban numerikus szimuláció esetében gondot okozhat. Egyrészt a merevtest elmozdulás amplitúdója olyan nagy mértékű, hogy a magasabb frekvenciájú rezgéseket elnyomja, így az időfüggvényeken, spektrumokon nem látszik az érdemi eredmény. Emellett később, a nemlineáris szimulációk esetében az időlépéses algoritmus instabilitását okozhatja.

A merevtest elmozdulás módusalakjai mindig síkok, így kiküszöbölésükre a legegyszerűbb megoldás, ha minden idő iterációban kivonjuk az előző időpillanat pontjaira illesztett síkot. Ez a megoldás nem befolyásolja érdemben a magasabb frekvenciájú, rezgő módusok viselkedését. Ezt az 5.3 ábra szemlélteti. A síkillesztés módszere expliciten adott gerjesztőfüggvény esetében nem befolyásolja érdemben a lemez rezgését. Ugyanakkor a fizikai alapú



5.2. ábra. Pillanatképek egy szélein szabadon rezgő, és a széle felé megütött lemez kitéréséről. A rezgésre szuperponálódó (vagy inkább fordítva) sík a merevtest-elmozdulás síkja.



5.3. ábra. A kör lemez egy előre meghatározott függvénnyel lett gerjesztve: emelt koszinusszal a lemez közepén. Az ábrán az $x_0 = -0.195$ $y_0 = 0.624$ node kitérése látható merevtestmozgással (piros) és merevtestmozgás kiküszöbölésével (kék). Mindkét kitérést ábrázolás előtt egy másodfokú, f_{min} frekvenciájú Butterworth felüláteresztő szűrte meg. f_{min} a lemez legalacsonyabb módus-frekvenciája ($\kappa = 100$). Az ábrán fekete, függőleges vonal jelöli a szűrő τ időállandóját.

gerjesztésmodell használata esetén már tapasztalnánk érdemi eltérést, hiszen $u_H - u(x_0, y_0)$ is megváltozik. Ennek esetleges akusztikai hatásait most nem vizsgáltam.

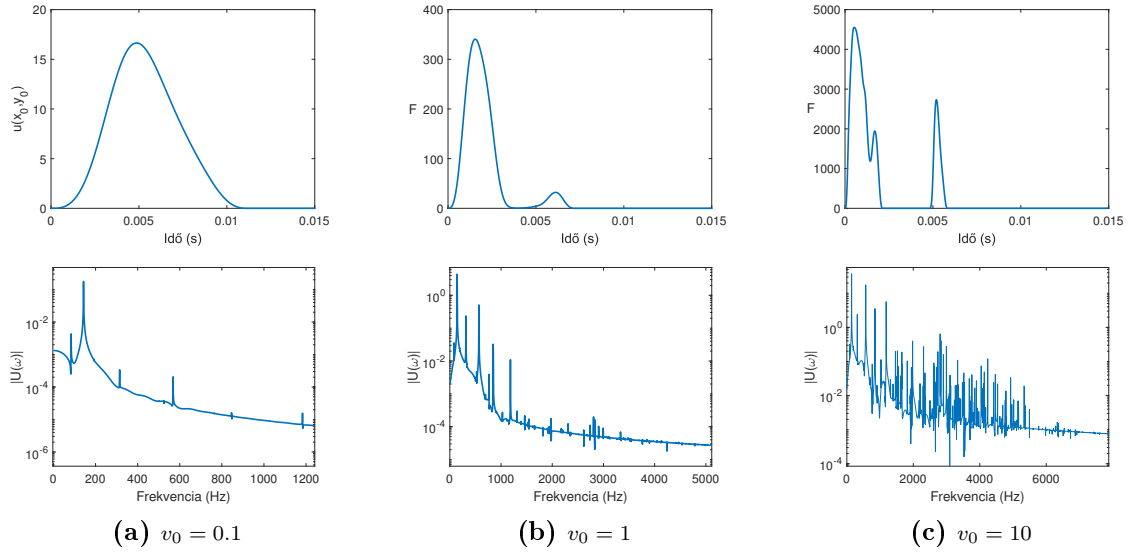
Szimulációk

A 5.4. ábrán néhány idő-, és frekvenciatartománybeli szimuláció eredménye tekinthető meg. Érdekes megfigyelni egy érdekes jelenséget, melyhez tekintsük a jobb oldali ábrát az időtartományban. Az első kontaktus felfutását követően a gerjesztő erő fokozatosan elkezd lecsengeni. Eközben az elinduló hullámok a lemez széléről visszaverődnek, melynek hatására rövid ideig ismét megnő az $u_H - u(x_0, y_0)$ távolság - ez a gerjesztő erő rövid ideig tartó, újbóli felfutását eredményezi. Az ábrán az is jól látható, hogy a gerjesztő erő első lecsengése után újra kontaktusba kerülhet a két objektum.

A kezdeti sebesség növelésével a kontaktus ideje egyre csökken, miközben egyre szélesebb frekvenciatartomány gerjesztődik. Ez egy egyszerű, lineáris modell esetében nem lenne így: a kezdeti sebesség növelésével a kontaktus ideje változatlan maradna, amplitúdója arányosan növekedne. A nemlineáris gerjesztésmodell élénkebb hangzást eredményez, és - nem mellesleg - érzékenyebben reagál a dobos különböző kézmozdulataira [6].

5.2. Hangsugárzás modellezése

Az akusztikus hullámterjedés bonyolult folyamat. A rezgő lemez az őt körül vevő levegő részecskéit is rezgésbe hozza, ezáltal egy nyomáshullámot indít el a levegőben. Ezt a hullámot képes az emberi fül hanggá, vagy egy mikrofon elektromos jellé alakítani. A 2. fejezetben felírtam a gerjesztett akusztikus tér választ, de arra nem adtam választ, hogy a lemez (vagy akármilyen más, rezgő objektum) vertikális kitérése milyen hullámot indít



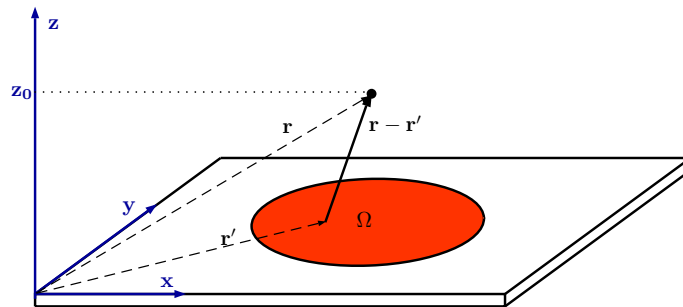
5.4. ábra. Néhány szimulációs példa idő-, és frekvenciatartományban. $m = 0.4$, $w_H = 1000$, $\alpha = 3$, a kezdeti sebesség pedig v_0 -val jelezve. A gerjesztés éppen a lemez közepén hat.

el a levegőben - más szóval mi kapcsolat a lemez rezgése és az akusztikus tér gerjesztése között.

A [7] irodalom alapján a hullámegyenlet gerjesztését éppen a rezgő test lokális gyorsulása okozza. A vékony lemez kétdimenziósnak tekinthető, így a (2.41) egyenletben az $f = \ddot{u}\delta(z - z_0)$ felírást használhatjuk. Az u továbbra is a lemez kitérése, \ddot{u} annak gyorsulása, és a kétdimenziós lemez az x, y síkban fekszik, z_0 magasságban. Ha a megfigyelési pont (emberi fül vagy mikrofon) a $\mathbf{r} = (x, y, z)$ pontban van, akkor a (2.41) egyenlet az alábbi formában írható fel:

$$p(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\ddot{u}(\mathbf{r}', \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^2\mathbf{r}' \quad (5.11)$$

ahol p a levegő nyomását jelöli. Ebben a megközelítésben csak a frontális hullámkomponenseket vesszük figyelembe, és a lemez hátoldala felől, a lemezt megkerülve érkező komponenseket elhagyjuk. Szemléletesen a lemez egy „falban” rezeg. Az elrendezést az 5.5. ábra szemlélteti.



5.5. ábra. A sugárzásmo­ dell akusztikai elrendezése. A fekete pont a megfigyelési pontot (emberi fül vagy mikrofon) jelöli.

Az integrálást tehát már csak a kétdimenziós Ω tartományon (a lemezen) kell elvégezni.

Az integrál kifejtését roppantul megkönnyíti a végeselem módszer által használt bázisfüggvényrendszer, ugyanis bizonyos node-okban a kitérés szabadsági fokként van előírva, azaz különösebb számítás nélkül ismert. Ha a gerjesztést a node-okba helyezett pontforrásokkal közelítjük, akkor lényegében a pontforrások gyorsulásainak lineáris kombinációja adja a megoldást. Formálisan:

$$\ddot{u}(x, y, t) \approx \sum_i \ddot{u} \delta(x - x_i, y - y_i), \quad (5.12)$$

ahol x_i, y_i a kollokációs pontokat jelölik, melyek legegyszerűbb (és legpraktikusabb) esetben éppen a node-ok koordinátái. Behelyettesítve (5.11) egyenletbe

$$\begin{aligned} p(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \sum_i \frac{\ddot{u}(\mathbf{r}', \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \delta(x - x_i, y - y_i) d^2\mathbf{r}' \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_i \frac{\ddot{u}(x_i, y_i, t - \frac{d_i}{c})}{d_i}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

ahol d_i az i . kollokációs pont és a vizsgálati pont távolsága. A sugárzásmodell legfontosabb tulajdonságai az alábbiakban foglalhatók össze:

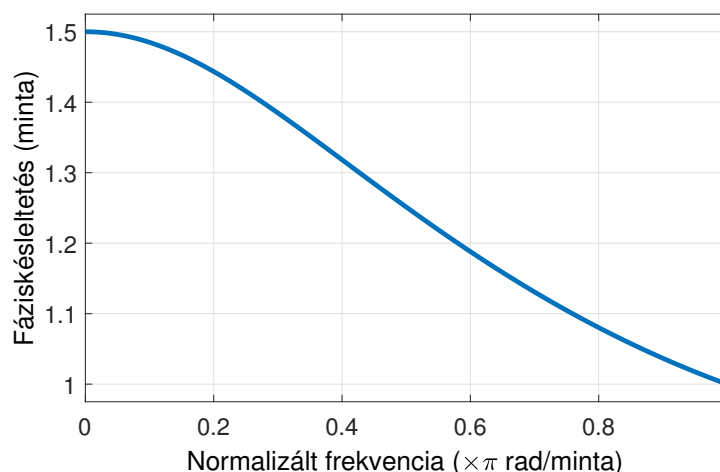
- A keletkező hangot a lemez rezgésének gyorsulása határozza meg.
- A lemez rezgését hanggenerálás céljából pontforrásokkal közelítjük.
- A pontforrások hozzájárulása a végső hanghoz a pontforrás és a megfigyelési pont közötti távolságtól függ.
- A pontforrások különböző fázisban, d_i/c késleltetéssel adódnak össze.

Az (5.13) egyenletet tovább egyszerűsíthető, ha a d_i távolságot állandónak tekintjük minden pontforrásra, így végső soron a keletkező hang a pontforrások gyorsulásának összege - mindenféle további feldolgozás nélkül. Ez az elhanyagolás csak abban az esetben tekinthető fizikailag is jogosnak, ha a d_i távolságok különbségei az akusztikai hullámhossznál sokkal kisebbek [20], mely egy valós cintányér méreteit, és szokásos mikrofonelrendezéseket figyelembe véve még csak közelítőleg sem teljesül. Ennek ellenére jól használható hanggenerálásra [17], de ebben a dolgozatban mégis inkább az (5.13) modell alkalmazására törekszem.

Törtrészkésleltető szűrő

Az (5.13) egyenletben szereplő késleltetéseket érvényesítéséhez, digitális jelfeldolgozási technikákhoz fordulhatunk. A törtrészkésleltető szűrőket a [25, 43] irodalmak alapján ismertetem.

A törtrészkésleltető szűrő lehetőséget ad arra, hogy a digitális világ $k\Delta t$ kvantumú késleltetése ne okozzon pontatlanságot - vagy ne kelljen indokolatlan mértékben növelni a



5.6. ábra. A törtrész-késleltető szűrő fáziskésleltetése.

mintavételi frekvenciát. Törtrész-késleltető szűrőt megvalósíthatunk IIR vagy FIR szűrő formájában.

- A FIR szűrő megtervezhető úgy, hogy fáziskarakterisztikája lineáris legyen a teljes frekvenciatartományon, így a törtrész-késleltetés mindig pontos. Cserébe amplitúdómenete alul-áteresztő jellegű lesz [25].
- Az IIR szűrő megtervezhető úgy, hogy amplitúdokarakterisztikája mindent-áteresztő legyen, azaz a teljes frekvenciasávban változatlan amplitúdóval továbbítja a jelet. Cserébe törtrész-késleltetése csak alacsony frekvencián lesz pontos. [25].

Legegyszerűbb esetben a törtrész-késleltető szűrőt egy elsőfokú IIR szűrőként valósíthatjuk meg - ezt használtam a hangszórázás modellezésére. Az [25] irodalom alapján a szűrő diszkrét idejű átviteli függvénye:

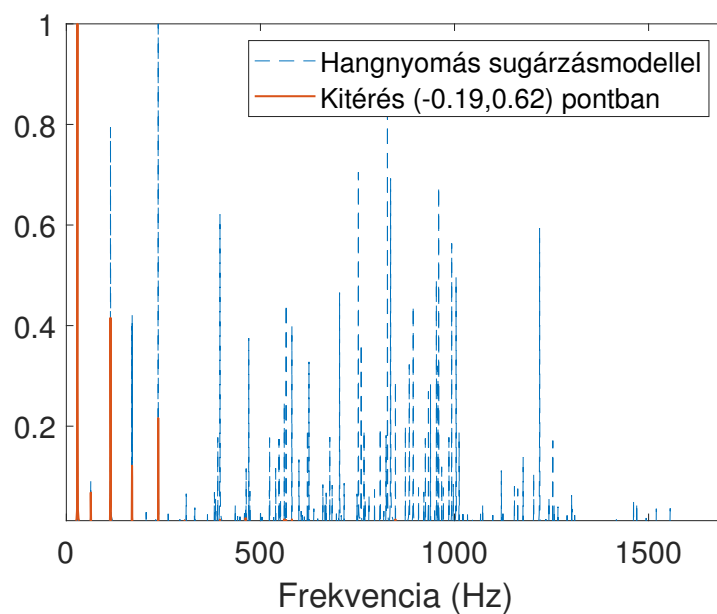
$$H(z) = \frac{a_1 + z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} \quad (5.14)$$

Az elsőfokú szűrő $D = 1 + d$ mintányi késleltetést képes megvalósítani; d a kívánt törtrész-késleltetés. Az a_1 szűrőegyüttható értéke:

$$a_1 = (1 - D)/(1 + D) \quad (5.15)$$

Az elsőfokú törtrész-késleltető szűrő fáziskésleltetése a 5.6 ábrán látható. A $d = 0.5$ értékű késleltetés mellett a szűrő még egy egész mintát késleltet. A frekvencia növekedésével a késleltetés hibája növekszik, mely magasabb fokú szűrő választásával enyhíthető [25].

A bemutatott sugárzásmo­dell hatása az 5.7. ábrán látható. A sugárzásmo­dellt tartalmazó és nem tartalmazó rendszer ugyanazokon a módusfrekvenciákon rezeg: a pontszerű források lineáris kombinációja nem változtatja meg a rezgési frekvenciákat. Mindenképpen feltűnő,



5.7. ábra. A sugárzásmodell hatása a kimeneti spektrumra. Az összehasonlíthatóság érdekében mindkét spektrum a maximumára van normálva.

hogy a sugárzásmodell eredménye egy magasabb frekvenciákban gazdagabb hang. A kitérés bizonyos frekvenciákon alig rezeg, de a sugárzásmodellben mégis megjelenik. Nem is meglepő ez, hiszen gyorsulást összegzünk, ami frekvenciatartományban a kitérés ω^2 -szerese.

6. fejezet

A von Kármán nemlineáris lemez végeelem modellezése

A cintányér hangjának jellegzetes tulajdonságait erős nemlineáris jelenségek okozzák. A bemutatott lineáris lemez analízise és végeelem modellezése kiválóan előkészíti a nemlineáris lemez modellezését. Ebben a fejezetben kísérletet teszünk a von Kármán féle lemez végeelem modellezésére.

6.1. A von Kármán egyenletek

A von Kármán lemezmodell két, szintén negyedrendű parciális deriváltakat tartalmazó, csatolt differenciálegyenlet [6, 42]:

$$\rho H \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -D \Delta^2 u + \mathcal{L}(\Phi, u) \quad (6.1a)$$

$$\Delta^2 \Phi = -\frac{EH}{2} \mathcal{L}(u, u), \quad (6.1b)$$

ahol Φ az ún. Airy feszültségfüggvény, mely a lemez belső rezgését reprezentálja (angolul „in-plane vibration”). Az $\mathcal{L}(\cdot, \cdot)$ operátor pedig tetszőleges u, v skaláris függvényekre

$$\mathcal{L}(u, v) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}. \quad (6.2)$$

A von Kármán egyenletek nemlineáris tulajdonságai az $\mathcal{L}(\cdot, \cdot)$ operátor jelenlétének köszönhetőek. Amennyiben az \mathcal{L} operátort elhagyjuk, a két egyenlet közötti csatolás megszűnik, és a (6.1a) egyenlet a lineáris lemez egyenletére egyszerűsödik.

Az \mathcal{L} operátor tulajdonságai

A nemlineáris operátort gyakran von Kármán operátornak nevezik, és a nemlineáris lemez

működésének alappillére. Az operátor bilineáris, azaz teljesülnek rá az alábbi tulajdonságok:

$$\mathcal{L}(a, b) = \mathcal{L}(b, a) \quad (6.3a)$$

$$\mathcal{L}(c_1 a_1 + c_2 a_2, b) = c_1 \mathcal{L}(a_1, b) + c_2 \mathcal{L}(a_2, b) \quad (6.3b)$$

A (6.3b) azonosság természetes teljesül a második argumentumra is.

Amennyiben a bilineáris operátor mindkét argumentuma ugyanaz a függvény, akkor teljesül egy, a (2.12) egyenlethez hasonló azonosság:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}(a, a) = \mathcal{L}\left(\frac{\partial a}{\partial t}, a\right) \quad (6.4)$$

A von Kármán operátor a fenti egyszerű azonosságokon túl egy harmadik, érdekes tulajdonsággal is rendelkezik. Angol irodalomban legtöbbször „triple self adjointness” néven illetik [5, 6, 42]. Nem lévén magyar megfelelője, a továbbiakban „hármás felcserélhetőség” néven fogom említeni. A felcserélhetőség csak integrális formában érvényes, az alábbi módon. Legyen a, b, c tetszőleges skaláris függvény az Ω tartományon. Ekkor

$$\int_{\Omega} c \mathcal{L}(a, b) d\Omega = \int_{\Omega} a \mathcal{L}(c, b) d\Omega + \mathcal{J} \quad (6.5)$$

ahol \mathcal{J} kizárólag peremmenti integrálok összegét tartalmazza. Ebben a dolgozatban \mathcal{J} általános felírásától eltekintek, ez megtekinthető Alberto Torin PhD disszertációjában [42]. Egy fontos tulajdonságára azonban hamarosan szükség lesz. Amennyiben a (azaz az operátorból kiemelt függvény) értéke, és normális deriváltja is nulla a tartomány Γ peremén, akkor \mathcal{J} is azonosan nulla. Formálisan,

$$a = \frac{\partial a}{\partial n} = 0 \quad \forall (x, y) \in \Gamma \Rightarrow \mathcal{J} = 0. \quad (6.6)$$

Ez a felcserélési azonosság hasonlít a lineáris operátorok - parciális integráláson alapú - átalakításaira. Azonban a (6.5) átalakításban azonban nem csökken a deriváltak rendje.

Skálázás

Numerikus szimuláció esetében előnyös, ha a rendszert leíró egyenletek minél kevesebb paramétert tartalmaznak. Ennek elérése érdekében skálázott paramétereket vezethetünk be, és felírhatjuk az egyenletet ezek segítségével. A von Kármán egyenletek egyszerűsítéséhez vezessük be az alábbi, skálázott változókat:

$$\Phi' = \frac{\Phi}{D} \quad u' = \frac{u}{H\sqrt{6(1-\nu^2)}} \quad (6.7)$$

A fenti egyenletekből kifejezve u -t és Φ -t, majd behelyettesítve a von Kármán egyenletekbe (6.1a), (6.1b), kihasználva a \mathcal{L} operátor bilineáris tulajdonságát az alábbi differenciálegyenlet-

rendszer adódik u' -re és Φ' -re [6]:

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} = -\kappa^2 \Delta^2 u' + \kappa^2 \mathcal{L}(\Phi', u') \quad (6.8a)$$

$$\Delta^2 \Phi' = -\mathcal{L}(u', u') \quad (6.8b)$$

ahol κ ismét

$$\kappa = \sqrt{\frac{D}{\rho H}} \quad (6.9)$$

Ezzel az átalakítással a rendszer mindösszesen egy paraméterrel jellemezhető, és az $u \leftrightarrow u'$ illetve $\Phi \leftrightarrow \Phi'$ közötti kapcsolatok kölcsönösen egyértelműek. A továbbiakban kizárólag ezt a skálázott variációt fogom használni (kivéve, ha külön jelzem), de a változók jelölésében a vesszőt elhagyom.

6.2. Energiamérleg és peremfeltételek

A nemlineáris rendszer energiamérlege a 2.3. alfejezetben bemutatott módon írható fel. A levezetést [42] alapján mutatom be. Szorozzuk meg a (6.8a) egyenlet mindkét oldalát $\frac{\partial u}{\partial t}$ -vel, osszuk el κ^2 -el, és integráljuk a vizsgált Ω tartományon.

A (6.1a) egyenlet lineáris részei ugyanazt az energiát adják, mint korábban a (4.34) egyenlet, így különösebb figyelmet és átalakításokat kizárólag a nemlineáris tag igényel:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{W}_{strain}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{W}_{kin}}{\partial t} + \mathcal{P}_{lin} = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} \mathcal{L}(\Phi, u) d\Omega = \\ & \stackrel{(6.5)}{=} \int_{\Omega} \Phi \mathcal{L}\left(\frac{\partial u}{\partial t}, u\right) d\Omega + \mathcal{J} = \\ & \stackrel{(6.4)}{=} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \Phi \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}(u, u) d\Omega + \mathcal{J} = \\ & \stackrel{(6.8b)}{=} -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \Phi \frac{\partial}{\partial t} \Delta^2 \Phi d\Omega + \mathcal{J} = \\ & \stackrel{(2.8)x2}{=} -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \Delta \Phi \frac{\partial}{\partial t} \Delta \Phi d\Omega + \mathcal{P}_{nl} + \mathcal{J} = \\ & \stackrel{(2.15)}{=} -\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\frac{1}{4} \int_{\Omega} (\Delta \Phi)^2 d\Omega}_{\mathcal{W}_{nl}} + \mathcal{P}_{nl} + \mathcal{J} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Az energiamérleg a szokásos módon kompakt formában felírható:

$$\frac{\partial \mathcal{W}_{strain}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{W}_{kin}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{W}_{nl}}{\partial t} = -\mathcal{P}_{lin} + \mathcal{J} + \mathcal{P}_{nl}, \quad (6.11)$$

ahol

$$\mathcal{P}_{nl} = - \oint_{\Gamma} \Phi \nabla(\Delta \Phi) \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \oint_{\Gamma} \Delta \Phi \nabla \Phi \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (6.12)$$

Az energiamérleg bal oldala ismét a rendszerben tárolt teljes energia megváltozását fejezi ki. A nemlineáris rendszer (energia szemszögéből nézve) a lineáris rendszer és egy nemlineáris, perturbáció szuperpozíciója. Ez a tulajdonság több nemlineáris, akusztikus rendszer esetében is megfigyelhető [6].

Az energiamérleg jobb oldalán található peremmenti integrálok vizsgálatával megkaphatjuk a helyes peremfeltételeket.

Peremfeltételek

Amennyiben a (6.11) egyenlet bal oldalán található peremmenti integrálok értéke zérus, a rendszer veszteségmentes peremfeltételei felírhatóak. A \mathcal{P}_{lin} tag ismét eltűnik, ha bármelyik, u -ra vonatkozó peremfeltételt alkalmazzuk a lineáris lemeznél megismertek közül. A szabadon rezgő lemezhez ismét a (4.21) feltétel alkalmazható.

Az Airy feszültségfüggvényre vonatkozó peremmenti integrálok (\mathcal{P}_{nl} és \mathcal{J}) zérus értékűek, ha a

$$\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad (6.13)$$

feltétel teljesül a peremen, így ez helyes peremfeltételnek tűnik. Az irodalomban gyakran találhatóunk más peremfeltételt a szabad lemez Airy feszültségfüggvényére [31, 45], azonban ezekről belátható, hogy ekvivalensek a (6.13) peremfeltétellel [6, 31]. A (6.13) *matematikailag* megegyezik a szélein rögzített lemez peremfeltételeivel [31].

6.3. Végeselem modell

A végeselem modell felírásához a gyenge alak levezetése, és a megoldás diszkretizációja szükséges. A von Kármán egyenletek lineáris tényezői nem igényelnek különösebb figyelmet, a 3. fejezetben leírtaknak megfelelően alakíthatók át. Kizárólag a nemlineáris \mathcal{L} operátor jelent újdonságot.

Gyenge alak és diszkretizáció

A gyenge alak levezetéséhez szorozzuk meg mindkét egyenletet egy tetszőleges v tesztelőfüggvénnyel, és integráljuk a vizsgált Ω tartományon. A lineáris tagok ugyanúgy alakíthatók át, mint a lineáris lemez esetében, így a von Kármán egyenletek gyenge alakja az alábbi

formában írható fel:

$$\mathcal{M}(u, v) = -\kappa^2 \mathcal{K}(u, v) + \kappa^2 \underbrace{\int_{\Omega} \mathcal{L}(\Phi, u) v \, d\Omega}_{\mathcal{N}(\Phi, u, v)} \quad (6.14a)$$

$$\mathcal{K}(\Phi, v) + \mathfrak{B}_{lin}^{(c)}(\Phi, v) = - \underbrace{\int_{\Omega} \mathcal{L}(u, u) v \, d\Omega}_{\mathcal{N}(u, u, v)} \quad (6.14b)$$

Az $\mathcal{M}(u, v)$ és $\mathcal{K}(u, v)$ operátorok definíciója megtekinthető a 75. oldalon. A $\mathfrak{B}_{lin}^{(c)}$ operátor a $\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial n}$ peremfeltétel érvényesítésére szolgál, és definíciója a (4.66) egyenletben található.

A diszkretizáláshoz legyen ismét $v_h \approx v$ tetszőleges egy véges bázisú térben, és legyen

$$u_h = \sum_{i=1}^N u_i w_i = \mathbf{w}^T \mathbf{u} \quad \Phi_h = \sum_{i=1}^N \varphi_i w_i = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\varphi} \quad (6.15)$$

Keressük tehát az u és Φ közelítő megoldását ugyanabban a bázisban, és ez a bázis egyezzen meg v bázisával is. Ezzel a választással két egyenletrendszert kapunk a súlyozó-együtthatókra:

$$\mathbf{M} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = -\kappa^2 \mathbf{K} \mathbf{u} + \kappa^2 \boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u}) \quad (6.16a)$$

$$\mathbf{K}_{\varphi} \boldsymbol{\varphi} = -\boldsymbol{\ell}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \quad (6.16b)$$

ahol az $\boldsymbol{\ell}(\cdot, \cdot)$ vektor-operátor az \mathcal{N} diszkretizációját jelöli, \mathbf{K}_{φ} pedig azt a merevségi mátrixot, melyben érvényesítésre került a Φ -re vonatkozó peremfeltétel. A \mathbf{K}, \mathbf{M} mátrixok a (4.46) egyenletben lettek felírva. A nemlineáris operátor tulajdonságait nézzük meg részletesebben.

A $\boldsymbol{\ell}$ operátor számítása

Az $\boldsymbol{\ell}$ vektoroperátor a nemlineáris csatolásokat leíró \mathcal{L} operátor diszkretizációjának tekinthető, és (6.14) gyenge alak alapján az alábbi módon írható fel:

$$\boldsymbol{\ell}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int_{\Omega} \mathbf{w} \mathcal{L}(\mathbf{w}^T \mathbf{u}, \mathbf{w}^T \boldsymbol{\varphi}) \, d\Omega \quad (6.17)$$

Ez az alak praktikusán nem használható jól. Gondoljunk bele abba, hogy végső soron az egyenletrendszert valamilyen időlépéses algoritmussal oldjuk meg, így minden időpillanatban el kellene végezni az integrálást. Ez pedig azt jelentené, hogy minden időpillanatban egy teljes asszemblálási folyamatot kellene végigcsinálni. Nyilvánvaló, hogy ez a számítás-igény elképesztő növekedéséhez vezetne.

Szerencsére, az \mathcal{L} operátor (6.3) bilineáris tulajdonsága miatt, az $\boldsymbol{\ell}$ operátor is könnyedén átalakítható. Az eredmény a [30] hivatkozásban is megtalálható, de itt a levezetést is

bemutatom. A $\boldsymbol{\ell}$ vektor k . eleme (6.17) egyenlet alapján:

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{\ell}(\mathbf{a}, \mathbf{b})]_k &= \int_{\Omega} w_k \mathcal{L} \left(\sum_i a_i w_i, \sum_j b_j w_j \right) d\Omega \stackrel{(6.3b)}{=} \int_{\Omega} w_k \sum_i a_i \mathcal{L} \left(w_i, \sum_j b_j w_j \right) d\Omega \\
&\stackrel{(6.3b)}{=} \int_{\Omega} w_k \sum_i a_i \sum_j b_j \mathcal{L}(w_i, w_j) d\Omega = \int_{\Omega} w_k \sum_i \sum_j a_i b_j \mathcal{L}(w_i, w_j) d\Omega \\
&= \sum_i \sum_j a_i b_j \underbrace{\int_{\Omega} w_k \mathcal{L}(w_i, w_j) d\Omega}_{E_{ijk}}
\end{aligned} \tag{6.18}$$

Ezzel az átalakítással az integrál kiértékeléséhez már csak a bázisfüggvények ismerete szükséges, így az időtartományi szimuláció megkezdése előtt kifejthető. Az integrális tag három indextől függ, így egy 3 dimenziós mátrix formájában tárolható el:

$$\mathbf{E} = [E_{ijk}]_{ijk} = \left[\int_{\Omega} w_k \mathcal{L}(w_i, w_j) d\Omega \right]_{ijk} \tag{6.19}$$

Az (6.18) egyenletet felírhatjuk egy mátrixszorzásként is [5], az alábbi módon:

$$\boldsymbol{\ell}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{L}(\mathbf{b})\mathbf{a} = \mathbf{L}(\mathbf{a})\mathbf{b}, \tag{6.20}$$

ahol a mátrixok:

$$\mathbf{L}(\mathbf{a}) = \left[\sum_j a_j E_{ijk} \right]_{ki} \qquad \mathbf{L}(\mathbf{b}) = \left[\sum_j b_j E_{ijk} \right]_{ki} \tag{6.21}$$

Az \mathbf{E} kiszámítása

Az E_{ijk} 3 dimenziós mátrix előre kifejthető, így az időlépéses iteráció során már nem szükséges integrálást elvégezni. A végeselem módszer helyes működéséhez célszerű C^1 folytonos elemeket használni, melyek garantáltan konvergens megoldást adnak [9], ugyanakkor a Morley elem ismételten egy egyszerű, de jól működő alternatívát biztosít [28].

Az \mathbf{E} háromdimenziós mátrix kiszámítására kiterjeszthető a lemeznél bemutatott algoritmus, melyet itt röviden részletezek. Az elemenkénti mátrix fogalma ebben az esetben is értelmezhető az alábbi módon:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_e &= \left[\int_{\Omega_e} N_k \mathcal{L}(N_i, N_j) d\Omega_e \right]_{ijk} \\
&\stackrel{(6.2)}{=} \left[\int_{\Omega_e} N_k \left(\frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 N_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \partial y} \right) d\Omega_e \right]_{ijk}
\end{aligned} \tag{6.22}$$

Az \mathbf{E}_e NxNxN-es háromdimenziós mátrix N darab NxN-es mátrixból alkotott „vektorként”

értelmezhető. Ennek a „vektornak” a k . mátrixa (6.22) alapján:

$$\mathbf{E}_e^k = \int_{\Omega_e} N_k \left(\frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}^T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}^T}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \mathbf{N}^T}{\partial x \partial y} \right) d\Omega_e \quad (6.23)$$

Ebben a felírásban az integrálás még a globális elem felett végzendő el. Az integrálást visszavezethetjük a referenciatartomány feletti integrálásokra a 4.8. fejezetben bemutatott módon. Ismét szükséges a \mathbf{C} transzformációs mátrix alkalmazása, és a deriválások transzformálása. Az eredmények megtekinthetők a Függelék F.3. fejezetében.

Az $\ell(\cdot, \cdot)$ operátor ellenőrzése

Az implementálást követően érdemes valamilyen kvantitatív módon meggyőződni a diszkretizáció helyességéről. Az $\ell(\cdot, \cdot)$ operátor az érvényesítendő peremfeltételektől független, így egy tetszőleges kétdimenziós próbafüggvénnyel ellenőrizhető.

Az $\ell(\cdot, \cdot)$ operátor ellenőrzéséhez válasszunk egy tetszőleges, könnyedén deriválható próbafüggvényt $u_t(x, y)$ -t. Fejtsük ki értékét, illetve deriváltjait a bázisfüggvények által meghatározott pontokban: például a Morley elem esetében határozzuk meg a próbafüggvény értékét a háromszögek csúcaiban, illetve a normális irányú deriváltakat az élek felezőpontjában. Ezzel megkapjuk a próbafüggvény közelítését a Morley elem által definiált bázisra.

Következő lépésben számoljuk ki az $\mathcal{L}(u_t, u_t)$ -t majd a fenti módon ezt is képezzük le a Morley elem által definiált bázisba. Az $\ell(\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t)$ operátort akkor tekinthetjük helyesnek, ha hasonló eredményt ad, mint $\mathcal{L}(u_t, u_t)$.

Nem szabad azonban elfelejtkezni arról, hogy a végelem módszer nem a differenciáloperátorokat diszkretizálja, hanem a megoldásfüggvényeket - és ezekre keres minimális hibájú megoldást. Ennek eredményeképp például u függvény diszkretizációja $\mathbf{M}\mathbf{u}$ vektor lesz, nem pedig \mathbf{u} .

Ha szeretnénk az operátorok diszkretizációját is értelmezni akkor rendezzük át úgy az egyenleteket, hogy az u differenciáloperátor diszkretizációja \mathbf{u} , illetve Φ diszkretizációja φ legyen.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\kappa^2 \Delta^2 u + \kappa^2 \mathcal{L}(\Phi, u) \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = -\kappa^2 \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{u} + \kappa^2 \mathbf{M}^{-1} \ell(\varphi, \mathbf{u}) \quad (6.24a)$$

$$\Delta^2 \Phi = -\mathcal{L}(u, u) \quad \longrightarrow \quad \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \varphi = -\mathbf{M}^{-1} \ell(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \quad (6.24b)$$

Ezzel az átalakítással az u differenciáloperátor diszkretizációja \mathbf{u} lesz, a Δ^2 operátor diszkretizációja $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}$. Ugyanígy látható, hogy $\mathcal{L}(\cdot, \cdot)$ operátor diszkretizációja nem $\ell(\cdot, \cdot)$ lesz $\mathbf{M}^{-1} \ell(\cdot, \cdot)$. Ezt figyelembe kell venni az eredmények összehasonlítása során. A 6.1. táblázatban a Morley elemmel megvalósított $\ell(\cdot, \cdot)$ operátor pontosságának eredményei láthatók. Láthatjuk, hogy a háló finomításával az RMS hiba csökken, az diszkretizáció valóban konvergens. Ezek ismeretében kijelenthetjük, hogy a végelem diszkretizáció jó eredményt ad. Nem melleleg az implementáció helyessége is ellenőrizhető így¹.

¹Megjegyzem, hogy az Argyris elemre nem tudtam ilyen táblázatot mutatni, ugyanakkor ennek oka

Háromszögelemek száma	RMS hiba
258	3.15E-3
1032	3.54E-4
4128	3.43E-5

6.1. táblázat. *A Morley elemmel megvalósított $\ell(\cdot, \cdot)$ operátor helyességének ellenőrzése $u_t = x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 + x^2 + y^2 + xy + 1$ tesztelőfüggvénnyel.*

6.4. Diszkretizálás időtartományban

A legegyszerűbb időbeli diszkretizáció az alábbi:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\delta_{tt}\mathbf{u} &= -\kappa^2\mathbf{K}\mathbf{u} + \kappa^2\ell(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{K}_\varphi\boldsymbol{\varphi} &= -\ell(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (6.25)$$

Az algoritmus explicit, rendkívül könnyedén implementálható, és alapvetően alkalmas a nemlineáris viselkedés legfontosabb tulajdonságának bemutatására.

Módusok közötti csatolódás

Nézzük meg a 6.1. ábrán mi történik a nemlineáris rendszerrel, ha egy lineáris módusából inicializáljuk. Ha módus amplitúdója kicsi (felső sor), akkor a módus szinuszosan kezd el rezegni - azaz visszakaptuk a lineáris lemezmodellt. A nemlineáris viselkedés kiváló példája, hogy a lineáris módussal inicializált lemez idővel más módusokat is rezgésbe hoz (második, harmadik sor). Az amplitúdó növelésével a hatás egyre erősebb. Ez a jelenség egy lineáris modell esetében teljességgel lehetetlen. A módusok közötti csatolódás vezet a cintányérok és gongok jellegzetes effektusaihoz. Például a „crash” során a lemezben hullámturbulencia alakul ki [12]: az alacsonyabb módusok fokozatosan átadják energiájuk nagy részét a magasabb módusoknak.

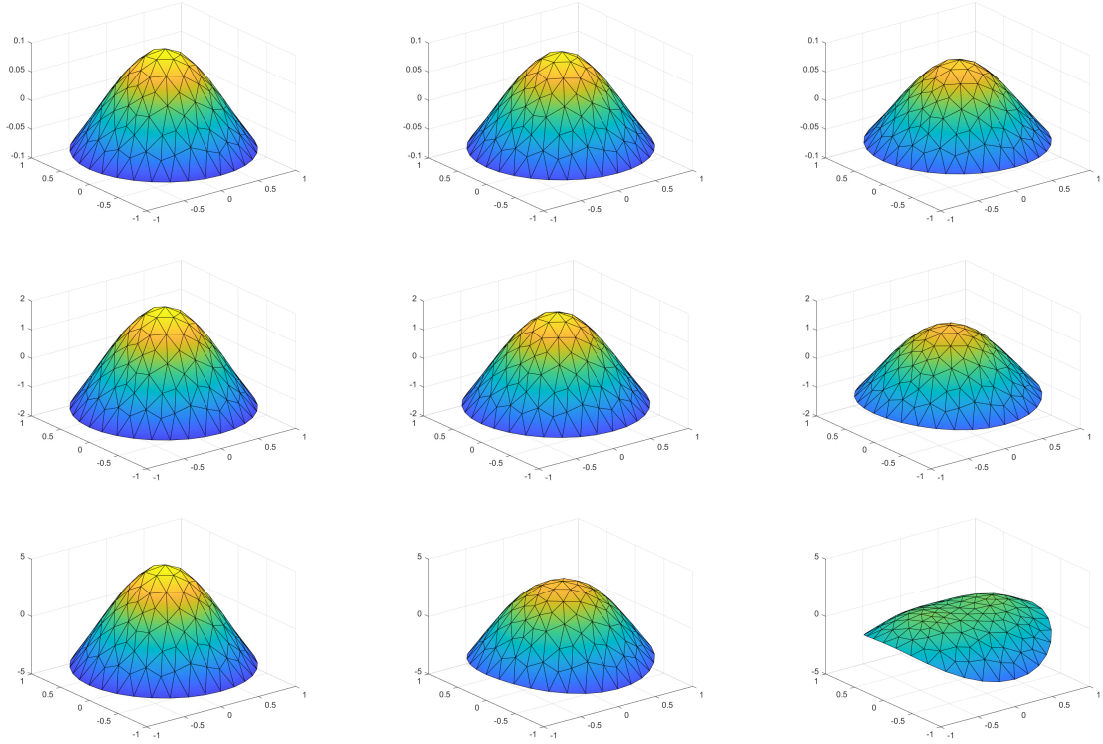
Implicit véges differencia diszkretizáció

A (6.25) véges differencia séma instabil, és nem alkalmas a fenti egyszerű példa bemutatásán kívül semmilyen szimulációra vagy hangszintézisre. Bilbao [5, 6] a saját térbeli véges differencia módszerére mutatott stabilis, időtartományi diszkretizációkat. Az egyik (várhatóan leghasznosabb) módszert megpróbáltam kiterjeszteni végeelem módszerre, az alábbi formában.

$$\delta_{tt}\mathbf{M}\mathbf{u} = -\kappa^2\mathbf{K}\mathbf{u}_n + \frac{\kappa^2}{2}\ell(\boldsymbol{\varphi}_{n+1} - \boldsymbol{\varphi}_{n-1}, \mathbf{u}_n) \quad (6.26a)$$

$$\frac{1}{2}\mathbf{K}_\varphi(\boldsymbol{\varphi}_{n+1} + \boldsymbol{\varphi}_{n-1}) = -\ell(\mathbf{u}_{n+1}, \mathbf{u}_n) \quad (6.26b)$$

minden bizonnyal nem elvi, hanem implementálási hiba.



6.1. ábra. Módusok közötti csatolódás. A lemezt egy lineáris módusából inicializáljuk 0.1 (felső sor), 2 (középső sor) és 5 (alsó sor) amplitúdóval.

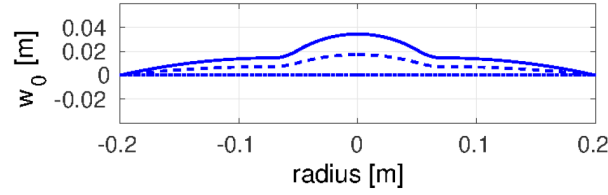
Ez a módszer alapvetően implicit, így jogosan várható a stabilitás javulása. Implicit jellege ellenére, éppen az \mathcal{L} (és ezzel az ℓ) operátor bilineáris tulajdonsága miatt lineáris egyenletrendszer megoldására vezet [6, 5]. Így nem szükséges Newton algoritmus vagy egyéb, nemlineáris egyenletrendszer megoldására alkalmas módszer használata.

Az módszert kiterjesztették a cintányér modális módszer esetére is [12]. Meggyőződésem, hogy végeelem módszerre is alkalmazható, azonban (sajnálatos módon) jelen dolgozat elkészültéig a fenti módszer stabilitására nem tudtam sem analitikus bizonyítást, sem számítógépes példát adni.

A stabilitás bizonyításának kulcsfontosságú lépése lenne a $\ell(\cdot, \cdot)$ operátor hármascserélhetőségi tulajdonsága, hasonlóan, mint a \mathcal{L} -nek a (6.5) egyenletben. A bizonyításhoz az alábbi, hármascserélhetőségi relációnak kellene teljesülnie:

$$\mathbf{u}^T \ell(\varphi, \mathbf{u}) \stackrel{?}{=} \varphi^T \ell(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \quad (6.27)$$

Az azonosság éppen a \mathcal{L} operátor hármascserélhetősége miatt teljesül abban az esetben, ha $\Phi_h = \frac{\partial \Phi_h}{\partial n} = 0$ avagy $\varphi^T \mathbf{w} = \varphi^T \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial n} = 0$. Ez éppen a Φ -re előírt peremfeltétel teljesülését teszi szükségessé. Azonban a 4. fejezetben is felhívtam rá a figyelmet, hogy a peremfeltételek nem teljesülnek pontosan, csak minimális hibával valamilyen bázisban - más szóval gyenge értelemben. A tapasztalatok alapján úgy tűnik, hogy ez a pontatlanság a peremfeltétel teljesülésében éppen elegendő ahhoz, hogy a véges differencia algoritmus instabilitását okozza.



6.2. ábra. Egy valós cintányér görbülete [30].

6.5. A modell további pontosításának lehetőségei

Az eddig bemutatott nemlineáris modell mindösszesen egy lapos lemez rezgéseit írja le. A modellt pontosíthatjuk, ha figyelembe vesszük a cintányér görbületét, és változó lemezvastagságát.

Görbület

A [30] referencia alapján egy görbülettel rendelkező lemez egyenletei az alábbi módon írhatók fel (skalázás nélkül):

$$\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -D \Delta^2 u + \mathcal{L}(u, \Phi) + \mathcal{L}(u_c, \Phi) \quad (6.28a)$$

$$\Delta^2 \Phi = -\frac{EH}{2} \mathcal{L}(u, u) - EH \mathcal{L}(u, u_c), \quad (6.28b)$$

ahol $u_c(x, y)$ egy előre meghatározott görbületi függvény. Ezért az \mathcal{L} operátor bilineáris tulajdonsága miatt az újonnan megjelenő tagok lineárisak lesznek, a nemlineáris csatolódások folyamatát ugyanazok a tagok írják le, mint korábban. A 6.2. ábrán egy valós cintányér körszimmetrikus görbületprofilja látható a [30] irodalomból.

A görbület végeelem modellezéséhez a bázisfüggvények roppant jól használhatók, ugyanis közelíthetjük a görbület u_c függvényét a végeelem bázisban.

$$u_c \approx \sum_i (u_c)_i w_i = \mathbf{u}_c^T \mathbf{w} \quad (6.29)$$

A bázis szabadsági fokokat ír elő bizonyos pontokban, így a $(u_c)_i$ együtthatókat könnyedén megkaphatjuk. A diszkrétizáció a (6.20) egyenlet értelmében egy immáron konstans mátrixot eredményez.

Már enyhe görbület hatására is a lemez körszimmetrikus módusai magasabb frekvenciára tolódnak. Ennek eredménye egy „fényesebb”, nagyfrekvenciás komponensekben gazdagabb hang, mely természetesen a nemlineáris csatolásnak köszönhetően intenzívebb „crash” jellegű hangzást eredményez [6, 30].

Változó lemezvastagság: inhomogén anyagjellemzők

Egy valós cintányér anyaga nem homogén: közepe felé az anyag vastagabb, mint a szélén.

Ez az anyaginhomogenitás helyfüggővé teszi a h és így a D anyagparamétert is, és jelentősen befolyásolja a végső hangzást [30]. Az anyaginhomogenitás (a görbülethez hasonlóan) általában körszimmetrikus.

Szintén a [30] irodalomra hivatkozva az inhomogén anyagjellemzőkkel rendelkező nemlineáris lemez egyenletei (görbülettel együtt) az alábbiak (skálázás nélkül).

$$\rho h(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\Delta D(x, y) \Delta u + (1 - \nu) \mathcal{L}(D(x, y), u) + \mathcal{L}(u, \Phi) + \mathcal{L}(u_c, \Phi) \quad (6.30a)$$

$$\Delta B(x, y) \Delta \Phi - (1 + \nu) \mathcal{L}(B(x, y), \Phi) = -\frac{1}{2} \mathcal{L}(u, u) - \mathcal{L}(u, u_c), \quad (6.30b)$$

ahol

$$D(x, y) = \frac{Eh(x, y)^3}{12(1 - \nu^2)} \quad B(x, y) = \frac{1}{Eh(x, y)}. \quad (6.31)$$

Az egyenletrendszer immáron terjedelmes, de az eddig bemutatott módszerekkel különösebb nehézségek nélkül implementálható. Az inhomogén anyagparaméterek, $h(x, y)$ és $D(x, y)$, (a görbülethez hasonló módon) kiválóan közelíthetők a végeselem módszer bázisfüggvényeivel. A hangzás tekintetében ugyanazt mondhatjuk el, mint a görbületnél: az anyaginhomogenitás nagyfrekvencián erősíti a módusok közötti csatolódást [30].

Összefoglalás és kitekintés

A dolgozat során kísérletet tettem a cintányér hangjának fizikai alapú szintézisére végeselem módszer alkalmazásával. Először általános betekintést nyújtottam a hullámjelenségek világába, majd bemutattam a végeselem módszer elméleti alapjait, implementációjának részleteit.

Dolgozatom legfontosabb részében a Kirchhoff féle lineáris lemez végeselem modellezését mutattam be. A módszert (az irodalomhoz képest kissé szokatlan módon) közvetlenül a negyedrendű parciális differenciálegyenletre alkalmaztam. Hatékony és általános algoritmusokat adtam a globális egyenlet asszemblálására, majd összevettem az irodalomban található sajátfrekvenciákat a numerikusan kiszámolt adatokkal.

Egyszerű, kis számításigényű modelleket alkalmaztam a gerjesztésre és a hangsugárzásra, melyeket a lineáris lemez végeselem modelljéhez csatoltam.

A lineáris lemez modelljét kiterjesztettem a von Kármán nemlineáris lemezmodellre is, majd időlépéses alakba hoztam, és bemutattam a nemlineáris viselkedés legfontosabb tulajdonságát, a módusok közötti csatolódást.

Az időtartománybeli megoldáshoz véges differenciák módszerét alkalmaztam, mely kiválóan működött a lineáris modellekre, azonban a nemlineáris modell esetében stabilitási problémák léptek fel. A nemlineáris problémára is léteznek stabilis időlépéses módszerek [5, 6, 12, 13], azonban ezeket eddig a végeselem módszerre nem alkalmazták. A kiterjesztés ugyan nem sikerült, azonban a probléma forrását feltártam.

További munkám első lépése olyan időlépéses módszer kidolgozása, mely kedvezőbb stabilitással rendelkezik, mint a dolgozatban bemutatott. Egy stabil véges differencia módszer ismeretében a cintányér végeselem modellje is továbbfejleszthető: figyelembe vehető a lemez görbülete és változó anyagvastagsága, melyek a hangzás szempontjából kulcsfontosságúak [30].

A végeselem modell terén is találhatunk fejleszteni valót. A hálógenerálásra egy beépített algoritmust használtam, mely kissé korlátozott. Az időlépéses mintavételi frekvenciát a legnagyobb numerikus módusfrekvencia határozza meg, ez utóbbit pedig a végeselem háló szabadsági fokainak száma. Érdemes lenne olyan végeselem hálót alkalmazni, mely megfelelő pontosság mellett kellően alacsonyan tartja a szabadsági fokok számát.

A későbbiekben érdekes lenne megvizsgálni a végelem módszer egyéb változatának alkalmazási lehetőségeit. A nem-folytonos végelem módszer (angolul „discontinuous finite element method”) kiküszöböli a C^1 folytonosság miatt megnövekedő számítási igényt. Szigorú értelemben a dolgozatban bemutatott Morley elem ide tartozik, azonban a klasszikus nem-folytonos végelem módszer különböző büntetőmódszereken (angolul „penalty methods”) alapul [22]. A nem-folytonos végelem módszert mind a lineáris, mind a nemlineáris modellre kiterjesztették [22, 36].

Összességében elmondhatom, hogy a lineáris lemez végelem modelljét sikeresen implementáltam, továbbá a nemlineáris modellezés lehetőségeit is feltártam. Úgy gondolom, hogy a dolgozat eredményei jó alapot biztosítanak későbbi munkámnak.

Irodalomjegyzék

- [1] Ivo Babuska. The finite element method with lagrangian multipliers. *Numer. Math.*, 20:179–192, April 1973.
- [2] Ivo Babuska. The finite element method with penalty. *Mathematics of Computation*, 27(122):221–228, April 1973.
- [3] Balázs Bank. Physics-based sound synthesis of the piano. Master’s thesis, Budapest University of Technology and Economics, 2000.
- [4] Balázs Bank. *Physics-based Sound Synthesis of String Instruments Including Geometric Nonlinearities*. PhD thesis, Budapest University of Technology and Economics, 02 2006.
- [5] Stefan Bilbao. A family of conservative finite difference schemes for the dynamical von karman plate equations. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 24(1):193–216, June 2008.
- [6] Stefan Bilbao. *Numerical Sound Synthesis*. John Wiley & Sons, Ltd, West Sussex, UK, 1st edition, 2009.
- [7] David T. Blackstock. *Fundamentals of Physical Acoustics*. John Wiley & Sons, Ltd, 2000.
- [8] Susanne Brenner, Li-yeng Sung, Hongchao Zhang, and Yi Zhang. A morley finite element method for the displacement obstacle problem of clamped kirchhoff plates. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 254:31–42, 12 2013.
- [9] F. Brezzi. Finite element approximations of the von kármán equations. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, 12(4):303–312, 1978.
- [10] M.C. Brink. The acoustic representation of bending waves. Master’s thesis, Delft University of Technology, November 2002.
- [11] Victor Dominguez and Francisco-Javier Sayas. Algorithm 884: A simple matlab implementation of the argyris element. *ACM Trans. Math. Softw.*, 35, 01 2008.

- [12] Michele Ducceschi. *Nonlinear Vibrations of Thin Rectangular Plates: A Numerical Investigation with Application to Wave Turbulence and Sound Synthesis*. PhD thesis, ENSTA ParisTech, 02 2014.
- [13] Michele Ducceschi and Cyril Touzé. Simulations of nonlinear plate dynamics: An accurate and efficient modal algorithm. 11 2015.
- [14] Hector Espinoza, Ramon Codina, and Santiago Badia. A sommerfeld non-reflecting boundary condition for the wave equation in mixed form. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 276:122–148, 07 2014.
- [15] Martin J. Gander and Felix Kwok. Chladni figures and the tacoma bridge: Motivating pde eigenvalue problems via vibrating plates. *SIAM Review*, 54(3):573–596, 2012.
- [16] Phillip L. Gould. *Introduction to Linear elasticity*. Springer New York Heidelberg Dordrecht London, 3rd edition, 2013.
- [17] Géza Hermann. Gitárhang fizikai alapú modellezése. Master’s thesis, Budapest University of Technology and Economics, 2018.
- [18] Vishal Jagota, Amanpreet Sethi, and Dr-Khushmeet Kumar. Finite element method: An overview. *Walailak Journal of Science & Technology*, 10:1–8, 01 2013.
- [19] R. E. Kalman and J. E. Bertram. Control System Analysis and Design Via the “Second Method” of Lyapunov: II—Discrete-Time Systems. *Journal of Basic Engineering*, 82(2):394–400, 06 1960.
- [20] Dr. Simonyi Karoly. *Elmeleti villamossagtan*. Tankönyvkiado Vallalat, 1976.
- [21] Robert Kirby. A general approach to transforming finite elements. *SMAI Journal of Computational Mathematics*, 4, 06 2017.
- [22] Robert Kirby and Lawrence Mitchell. Code generation for generally mapped finite elements. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 45:1–23, 12 2019.
- [23] Erwin Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons, Ltd, 1989.
- [24] S. Kuo, Chih-Chang Chi, and Y.B. Yang. A complete stability theory for the kirchhoff thin plate under all kinds of actions. *Journal of Marine Science and Technology*, 17:180–193, 09 2009.
- [25] T. I. Laakso, V. Valimaki, M. Karjalainen, and U. K. Laine. Splitting the unit delay [fir/all pass filters design]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 13(1):30–60, 1996.
- [26] A.W. Leissa. *Vibration of Plates*. NASA SP. Scientific and Technical Information Division, National Aeronautics and Space Administration, 1969.
- [27] Jaroslav Mackerle. Finite element vibration and dynamic response analysis of engineering structures. *Shock and Vibration*, 7, 01 1999.

- [28] Gouranga Mallik and Neela Nataraj. A nonconforming finite element approximation for the von kármán equations. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 50(2):433–454, 02 2016.
- [29] David Morin. Chapter 7 2d waves and other topics. https://scholar.harvard.edu/files/david-morin/files/waves_miscellaneous.pdf. Accessed: 2010-12-13.
- [30] Quoc Bao Nguyen and Cyril Touzé. Nonlinear vibrations of thin plates with variable thickness: Application to sound synthesis of cymbals. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 145(2):977–988, 2019.
- [31] S. Bilbao O. Thomas. Geometrically nonlinear flexural vibrations of plates: In-plane boundary conditions and some symmetry properties. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 315:569–590, 04 2008.
- [32] S.-A Papanicolopoulos and Antonis Zervos. A method for creating a class of triangular c1 finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 89, 03 2012.
- [33] Jussi Pekonen and Vesa Välimäki. The brief history of virtual analog synthesis. In *Proceedings of Forum Acusticum*, 06 2011.
- [34] Rudolf Rabenstein and Lutz Trautmann. Digital sound synthesis of string instruments with the functional transformation method. *Signal Processing*, 83:1673–1688, 2003.
- [35] J.N. Reddy. *An Introduction to the Finite Element Method*. McGraw-Hill, Inc., 2nd edition, 1993.
- [36] Armin Karl Reiser. *A C0 Interior Penalty Method for the von Kármán Equations*. PhD thesis, Graduate Faculty of the Louisiana State University and Agricultural and Mechanical College, 2011.
- [37] Pedro Ribeiro. Nonlinear vibrations of simply-supported plates by the p-version finite element method. *Finite Elements in Analysis and Design*, 41:911–924, 05 2005.
- [38] Steven H Schot. Eighty years of sommerfeld’s radiation condition. *Historia Mathematica*, 19(4):385 – 401, 1992.
- [39] Julius O. Smith. *Physical Audio Signal Processing*. <http://ccrma.stanford.edu/jos/pasp/>, accessed 11 2020. online book, 2010 edition.
- [40] T. J. Sullivan. A brief introduction to weak formulations of pdes and the finite element method, 2020. Accessed: 2010-12-13.
- [41] Wikipedia the free encyclopedia. Cea’s lemma. https://en.wikipedia.org/wiki/C%3%A9a%27s_lemma, 2020. Accessed: 2010-12-13.

- [42] Alberto Torin. *Percussion Instrument Modelling In 3D: Sound Synthesis Through Time Domain Numerical Simulation*. PhD thesis, University of Edinburgh, 2015.
- [43] V. Valimäki. *Discrete-Time Modeling of Acoustic Tubes Using Fractional Delay Filters*. PhD thesis, Helsinki University of Technology, Faculty of Electrical Engineering, 12 1995.
- [44] V. Välimäki, J. Pakarinen, Cumhur Erkut, and M. Karjalainen. Discrete-time modelling of musical instruments. *Reports on Progress in Physics*, 69:1–78, 2006.
- [45] Noboru Yamaki. Influence of large amplitudes on flexural vibrations of elastic plates. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 41(12):501–510, 1961.

Függelék

F.1. A peremértékfeladat egyértelműsége

A peremfeltételek és kezdeti feltételek bevezetésével a parciális differenciálegyenlet végtelen sok megoldása közül már csak egy lesz érvényes, ezáltal egyértelművé téve a problémát.

Ebben az alfejezetben bebizonyítom, hogy az 2.2 alfejezetben bemutatott peremértékfeladat egyértelműen megoldható. Az egyértelműség azt jelenti, hogy pontosan egy megoldása van a peremfeltételekkel és kezdeti feltételekkel kiegészített differenciálegyenletnek. A bizonyítás indirekt módon tehető meg.

Tegyük fel, hogy u_1 és u_2 két különböző megoldásai a peremértékfeladatnak. Ez azt jelenti, hogy mindkét megoldás kielégíti a differenciálegyenletet, a peremfeltételeket és a kezdeti feltételeket:

$$c^2 \Delta u_1 - \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = f \quad c^2 \Delta u_2 - \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = f \quad \forall \mathbf{r} \in \Omega \quad (\text{F.1.1a})$$

$$u_1 = u_D(\mathbf{r}, t) \quad u_2 = u_D(\mathbf{r}, t) \quad \forall \mathbf{r} \in \Gamma_D \quad (\text{F.1.1b})$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} = \sigma(\mathbf{r}, t) \quad \frac{\partial u_2}{\partial n} = \sigma(\mathbf{r}, t) \quad \forall \mathbf{r} \in \Gamma_N \quad (\text{F.1.1c})$$

$$u_1(\mathbf{r}, t = 0) = u_0(\mathbf{r}) \quad u_2(\mathbf{r}, t = 0) = u_0(\mathbf{r}) \quad (\text{F.1.1d})$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}(\mathbf{r}, t = 0) = \gamma_0(\mathbf{r}) \quad \frac{\partial u_2}{\partial t}(\mathbf{r}, t = 0) = \gamma_0(\mathbf{r}) \quad (\text{F.1.1e})$$

Fontos, hogy az u_1 -nek és az u_2 -nek ugyanazokat a perem-, és kezdeti feltételeket kell kielégítenie. Vonjuk ki a két egyenletrendszer egymásból, és legyen $\phi_0 = u_1 - u_2$. A differenciáloperátorok linearitása miatt az eredmény egyszerűen a következő.

$$c^2 \Delta \phi_0 - \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial t^2} = 0 \quad \forall \mathbf{r} \in \Omega \quad (\text{F.1.2a})$$

$$\phi_0(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \forall \mathbf{r} \in \Gamma_D \quad (\text{F.1.2b})$$

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial n} = 0 \quad \forall \mathbf{r} \in \Gamma_N \quad (\text{F.1.2c})$$

$$\phi_0(\mathbf{r}, t = 0) = 0 \quad (\text{F.1.2d})$$

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial t}(\mathbf{r}, t = 0) = 0. \quad (\text{F.1.2e})$$

A bizonyításhoz írjuk fel az (F.1.2a) egyenlet energiamérlegét, mely nagyon hasonló a (2.18) egyenlethez.

$$\frac{1}{2}c^2 \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} |\nabla \phi_0|^2 d\Omega + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial t} \right)^2 d\Omega = 0 \quad (\text{F.1.3})$$

Az (2.18) egyenlethez képest nincs gerjesztő tag, hiszen az (F.1.2a) egyenletben sem volt. Továbbá nincs jelen a peremmenti integrál sem, melynek oka a peremfeltételek érvényesülése: (F.1.2c), (F.1.2b) egyenletek.

Integráljuk most az (F.1.3) egyenletet idő szerint:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^t \left(\frac{1}{2}c^2 \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} |\nabla \phi_0|^2 d\Omega + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial t} \right)^2 d\Omega \right) dt = \\ &= \left[\frac{1}{2}c^2 \int_{\Omega} |\nabla \phi_0|^2 d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial t} \right)^2 d\Omega \right]_{t=0}^{t=t}. \end{aligned} \quad (\text{F.1.4})$$

Amikor $t = 0$ -t helyettesítünk be, az eredmény nulla a kezdeti feltételek miatt: (F.1.2d), (F.1.2e) egyenletek. Végül tehát az alábbi egyenlőséget kaptuk:

$$\frac{1}{2}c^2 \int_{\Omega} |\nabla \phi_0|^2 d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial t} \right)^2 d\Omega = 0. \quad (\text{F.1.5})$$

A kapott egyenlet bal oldala pozitív, hiszen négyzetfüggvények integráljai szerepelnek benne. Az egyenlet (melynek kiindulási alapja az eredeti hullámegyenlet volt) akkor és csak akkor lehet nulla, ha $\phi_0 = 0$, melyből egyenesen következik, hogy $u_1 = u_2$. Ez ellentmond a kezdeti feltevésnek. Ezzel az állítást bizonyítottuk, a peremértékfeladat egyértelműen megoldható.

A bizonyításhoz fel kellett használni a kezdeti feltételeket és a peremfeltételeket is, és a végeredmény csak az Ω tartomány felett egyértelmű.

F.2. Az explicit véges differencia módszer stabilitása

A 3.8. fejezetben megadtam a

$$\delta_{tt} \mathbf{M} \mathbf{c} = -\mathbf{K} \mathbf{c} \quad (\text{F.2.1})$$

diszkrét idejű rendszer stabilitási feltételét, mely szerint a

$$\mathbf{K} \mathbf{c} = \lambda \mathbf{M} \mathbf{c} \quad (\text{F.2.2})$$

általánosított sajátértékprobléma legnagyobb sajátértékére a

$$\Delta t < \frac{2}{\sqrt{\lambda_{max}}} \quad (\text{F.2.3})$$

feltételnek kell teljesülnie. Itt most bizonyítást adok rá.

Kvadratikus függvény

Mielőtt rátérünk a véges differencia módszer stabilitására, vizsgáljuk meg az alábbi ún. kvadratikus függvényt, és adjunk feltételt pozitív definittségére. Előrebocsátom, hogy a diszkrét idejű rendszer \mathfrak{h} energiafüggvénye egy ilyen kvadratikus függvény lesz.

$$\mathfrak{h} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} + \mathbf{y}^T \mathbf{y} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y} \quad (\text{F.2.4})$$

ahol \mathbf{A} egy tetszőleges négyzetes mátrix, melynek dimenziója megegyezik az \mathbf{x}, \mathbf{y} vektorok dimenziójával.

A kvadratikus függvény felírható egy kompaktabb alakban, ha bevezetjük az

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \quad (\text{F.2.5})$$

jelölést. Ezzel a kvadratikus függvény:

$$\mathfrak{h} = \mathcal{X}^T \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathcal{X} \quad (\text{F.2.6})$$

Továbbra is arra keresünk kritériumot, hogy a fenti kvadratikus függvény pozitív definit - azaz $\forall \mathcal{X} \neq \mathbf{0}$ -ra pozitív.

Könnyedén láthatjuk (diagonalizációval²), hogy a pozitív definittség elégséges feltétele, hogy a középső mátrix minden sajátértéke pozitív legyen. A mátrix karakterisztikus egyenlete

$$\begin{vmatrix} (1 - \lambda)\mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A} & (1 - \lambda)\mathbf{I} \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{F.2.7})$$

A blokkmátrixok determinánsára vonatkozó azonosságok alapján a

$$|(1 - \lambda)\mathbf{I} - \mathbf{A}| |(1 - \lambda)\mathbf{I} + \mathbf{A}| = 0 \quad (\text{F.2.8})$$

karakterisztikus egyenlet adódik. Az első tagból a

$$\mathbf{A} \mathbf{v} = (1 - \lambda) \mathbf{v} \quad (\text{F.2.9})$$

sajátértékprobléma adódik. Jelöljük λ' -vel az \mathbf{A} mátrix sajátértékeit. Ekkor teljesül, hogy

²Kihasználva, hogy a középső mátrix szimmetrikus.

$\lambda' = (1 - \lambda)$. Mivel a λ sajátértékeknek kell pozitívnak lennie, ezért

$$\lambda' < 1 \quad (\text{F.2.10})$$

feltétel adódik az \mathbf{A} mátrix sajátértékeire. Az (F.2.8) egyenlet második tagjából hasonlóan a

$$\lambda' > -1 \quad (\text{F.2.11})$$

feltétel adódik. A kettőt összevonva kimondhatjuk a kvadratikus függvény pozitív definitiségének feltételét az \mathbf{A} mátrix sajátértékeivel:

$$|\lambda'| < 1 \quad (\text{F.2.12})$$

Stabilitás

A 2. kritérium - mely az energia pozitív definitiségét fejezi ki - nem teljesül feltétlenül - éppen ebből adódik majd az algoritmus stabilitási feltétele. Ennek részletesebb vizsgálatához fejtsük ki a differencia-operátorokat, és rendezzük át a (3.78) egyenletet [6].

$$\mathfrak{h}_{lin} = \frac{1}{2\Delta t^2} \left[\mathbf{c}_n^T \mathbf{M} \mathbf{c}_n + \mathbf{c}_{n-1}^T \mathbf{M} \mathbf{c}_{n-1} + 2\mathbf{c}_n^T \left(\mathbf{K} \frac{\Delta t^2}{2} - \mathbf{M} \right) \mathbf{c}_{n-1} \right] \quad (\text{F.2.13})$$

Használjuk ki ismét, hogy \mathbf{M} szimmetrikus és pozitív definit. Ekkor létezik egy \mathbf{B} szintén szimmetrikus, pozitív definit mátrix, melyre

$$\mathbf{M} = \mathbf{B}^T \mathbf{B} \equiv \mathbf{B} \mathbf{B} \implies \mathbf{M}^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{B}^{-1} \quad (\text{F.2.14})$$

Ezzel a helyettesítéssel a \mathfrak{h}_{lin} energiafüggvény

$$\mathfrak{h}_{lin} = \frac{1}{2\Delta t^2} \left[(\mathbf{B} \mathbf{c}_n)^T (\mathbf{B} \mathbf{c}_n) + (\mathbf{B} \mathbf{c}_{n-1})^T (\mathbf{B} \mathbf{c}_{n-1}) + \right. \quad (\text{F.2.15})$$

$$\left. 2(\mathbf{B} \mathbf{c}_n)^T \left(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{B}^{-1} \frac{\Delta t^2}{2} - \mathbf{I} \right) (\mathbf{B} \mathbf{c}_{n-1}) \right] \quad (\text{F.2.16})$$

A zárójelben a korábban tárgyalt kvadratikus függvény fedezhető fel $\mathbf{x} = \mathbf{B} \mathbf{c}_n$, $\mathbf{y} = \mathbf{B} \mathbf{c}_{n-1}$ és $\mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{B}^{-1} \frac{\Delta t^2}{2} - \mathbf{I}$ helyettesítéssel. Utóbbi mátrix sajátértékeire vonatkozik a $|\lambda'| < 1$ feltétel, mely egyben a stabilitásra is feltételt ad. A sajátértékegyenlet:

$$\left(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{B}^{-1} \frac{\Delta t^2}{2} - \mathbf{I} \right) \mathbf{v} = \lambda' \mathbf{v} \quad (\text{F.2.17})$$

Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát \mathbf{B}^{-1} -el, és rendezzük át:

$$(\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}) (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{v}) = \frac{2(\lambda' + 1)}{\Delta t^2} (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{v}) \quad (\text{F.2.18})$$

Ez nem más, mint a $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ mátrix sajátértékegyenlete, ezért vele fogalmazhatjuk meg az energia pozitív definittségének feltételét. Jelölje most λ'' a $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ sajátértékeit. Ekkor

$$\lambda' = \frac{\lambda'' \Delta t^2}{2} - 1 \quad (\text{F.2.19})$$

mellyel a \mathfrak{h}_{lin} energia pozitív definittségének feltétele

$$|\lambda'| < 1 \Rightarrow \Delta t < \frac{2}{\sqrt{\lambda''}} \quad (\text{F.2.20})$$

A feltételnek minden sajátértékre teljesülnie kell, azaz elégséges, ha legnagyobbra teljesül. Ezzel megkapjuk az irodalomban is ismert stabilitási feltételt.

$$\Delta t < \frac{2}{\sqrt{\lambda''_{max}}} \quad (\text{F.2.21})$$

A kvadratikus függvény parabolikus jellege miatt Lyapunov stabilitás 3. kritériuma is teljesül amennyiben a pozitív definittség is fennál.

F.3. Az \mathbf{E} kifejtése

A (6.23) egyenlet alapján felírhatjuk az \mathbf{E}_e 3 dimenziós mátrix k . mátrixát a formafüggvények segítségével:

$$\mathbf{E}_e^k = \int_{\Omega_r} \sum_n C_{kn} \hat{N}_n \mathbf{C} \left(\frac{\partial^2 \hat{\mathbf{N}}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{N}}^T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{N}}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{N}}^T}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{N}}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{N}}^T}{\partial x \partial y} \right) \mathbf{C}^T d\Omega_r \quad (\text{F.3.1})$$

Itt az integrálás már a referenciatartományban van, de a deriváltak még a globális tartomány felett értendők. A deriváltak transzformálását követően az alábbi eredményt kapjuk:

$$\mathbf{E}_e^k = \sum_n C_{kn} \mathbf{C} \left((\mathbf{E}_{e1})_n + (\mathbf{E}_{e1})_n^T - 2(\mathbf{E}_{e2})_n \right) \mathbf{C}^T \quad (\text{F.3.2})$$

ahol

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}_{e1})_n &= T_1(1, 1) \mathbf{S}_{\hat{x}\hat{x}, \hat{x}\hat{x}, n} \\ &= T_1(2, 1) \mathbf{S}_{\hat{x}\hat{x}, \hat{x}\hat{y}, n}^T \\ &= T_1(3, 1) \mathbf{S}_{\hat{x}\hat{x}, \hat{y}\hat{y}, n}^T \\ &= T_1(1, 2) \mathbf{S}_{\hat{x}\hat{x}, \hat{x}\hat{y}, n} \\ &= T_1(2, 2) \mathbf{S}_{\hat{x}\hat{y}, \hat{x}\hat{y}, n} \\ &= T_1(3, 2) \mathbf{S}_{\hat{x}\hat{y}, \hat{y}\hat{y}, n}^T \\ &= T_1(1, 3) \mathbf{S}_{\hat{x}\hat{x}, \hat{y}\hat{y}, n} \\ &= T_1(2, 3) \mathbf{S}_{\hat{x}\hat{y}, \hat{y}\hat{y}, n} \\ &= T_1(3, 3) \mathbf{S}_{\hat{y}\hat{y}, \hat{y}\hat{y}, n} \end{aligned} \quad (\text{F.3.3})$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{E}_{e1})_n &= T_2(1, 1)\mathbf{S}_{\hat{x}\hat{x},\hat{x}\hat{x},n} \\
&= T_2(2, 1)\mathbf{S}_{\hat{x}\hat{x},\hat{x}\hat{y},n}^T \\
&= T_2(3, 1)\mathbf{S}_{\hat{x}\hat{x},\hat{y}\hat{y},n}^T \\
&= T_2(1, 2)\mathbf{S}_{\hat{x}\hat{x},\hat{x}\hat{y},n} \\
&= T_2(2, 2)\mathbf{S}_{\hat{x}\hat{y},\hat{x}\hat{y},n} \\
&= T_2(3, 2)\mathbf{S}_{\hat{x}\hat{y},\hat{y}\hat{y},n}^T \\
&= T_2(1, 3)\mathbf{S}_{\hat{x}\hat{x},\hat{y}\hat{y},n} \\
&= T_2(2, 3)\mathbf{S}_{\hat{x}\hat{y},\hat{y}\hat{y},n} \\
&= T_2(3, 3)\mathbf{S}_{\hat{y}\hat{y},\hat{y}\hat{y},n}
\end{aligned} \tag{F.3.4}$$

A \mathbf{T}_1 mátrix a (4.57) egyenlet Θ mátrixának első és harmadik sorából állítható elő:

$$\mathbf{T}_1 = \Theta_1^T \Theta_3 \tag{F.3.5}$$

A \mathbf{T}_2 mátrix a (4.57) egyenlet Θ mátrixának második sorából állítható elő:

$$\mathbf{T}_1 = \Theta_2^T \Theta_2 \tag{F.3.6}$$

Végül

$$\mathbf{S}_{\alpha\beta,\gamma\delta,n} = \int_{\Omega_r} \hat{N}_n \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{N}}}{\partial \alpha \partial \beta} \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{N}}}{\partial \gamma \partial \delta} d\Omega_r \tag{F.3.7}$$

Ezzel az integrálok mindösszesen a referenciatartomány formafüggvényeivel és azok deriváltjaival kifejezhetők.