



Gitárhang fizikai alapú modellezése

Diplomaterv

Herman Géza

Konzulens: Dr. Bank Balázs

2018.

Tartalomjegyzék

Kivonat	IX
Abstract	XI
Bevezetés	1
1. A gitár felépítése	3
1.1. A test	3
1.2. A nyak	5
1.3. A húrok	5
1.4. A modell	7
2. Húrmodell	9
2.1. Modellezési módszerek	9
2.1.1. Tömeg-rugó hálózat	9
2.1.2. Digitális hullámvezető	10
2.1.3. Modális szintézis	12
2.1.4. Véges differenciák módszere	12
2.2. A húr differenciálegyenlete	13
2.3. Diszperzió	15
2.4. Paraméterek meghatározása	16
2.5. A differenciálegyenlet numerikus megoldása	23
2.6. A numerikus megoldás konvergenciája	25
2.7. Numerikus diszperzió	27
2.8. A pengetés modellezése	30
2.9. Húr és érintő ütközése	31

2.10. Lefogás és felengedés modellezése	33
2.11. Tompítás és üveghang modellezése	35
3. Fedlapmodell	37
3.1. Modellezési módszerek	37
3.2. A lemez differenciálegyenlete	38
3.3. A differenciálegyenlet numerikus megoldása	41
3.3.1. Befogott perem kezelése	44
3.3.2. Csuklós támasz perem kezelése	45
3.3.3. Szabad perem kezelése	46
3.3.4. A konkáv sarokpont probléma	47
3.4. A szimuláció helyességének ellenőrzése	48
3.5. VDM alkalmazása a fedlapra	50
3.6. Admittancia a húrlábnál	53
3.7. A hurok csatolása a fedlapra	54
3.8. Sugárzásmodell	56
4. A fizikai modell összehasonlítása mért gitárral	59
4.1. Dekonvolúció	59
4.2. A mérések	62
4.2.1. Admittancia mérése	62
4.2.2. Mikrofonos mérés	68
5. Modell vezérlése	75
5.1. Fizikai paraméterek leírása	76
5.2. A kotta leírása	78
6. Értékelés, továbbfejlesztési lehetőségek	81
Irodalomjegyzék	83
függelék A. Deriváltak közelítése	85
A.1. Elsőrendű derivált közelítése nem centrálisan	85
A.2. Elsőrendű derivált közelítése centrálisan	85
A.3. Másodrendű derivált közelítése centrálisan	86
A.4. Másodrendű derivált közelítése, általános eset	86

A.5. Negyedrendű derivált közelítése centrálisan	88
A.6. Negyedrendű derivált közelítése, általános eset	88
függelék B. Húregyenlet diszkretizációja	91
függelék C. Másodfokú függvény gyökei abszolútértékének ≤ 1 feltétele	93
függelék D. Húregyenlet erősítési tényezőjének $c \geq b - 1$ vizsgálata	95
függelék E. Egy példa kottafájl	99

HALLGATÓI NYILATKOZAT

Alulírott *Herman Géza*, szigorló hallgató kijelentem, hogy ezt a diplomatervet meg nem engedett segítség nélkül, saját magam készítettem, csak a megadott forrásokat (szakirodalom, eszközök stb.) használtam fel. Minden olyan részt, melyet szó szerint, vagy azonos értelemben, de átfogalmazva más forrásból átvettem, egyértelműen, a forrás megadásával megjelöltem.

Hozzájárulok, hogy a jelen munkám alapadatait (szerző(k), cím, angol és magyar nyelvű tartalmi kivonat, készítés éve, konzulens(ek) neve) a BME VIK nyilvánosan hozzáférhető elektronikus formában, a munka teljes szövegét pedig az egyetem belső hálózatán keresztül (vagy autentikált felhasználók számára) közzétegye. Kijelentem, hogy a benyújtott munka és annak elektronikus verziója megegyezik. Dékáni engedéllyel titkosított diplomatervek esetén a dolgozat szövege csak 3 év eltelte után válik hozzáférhetővé.

Budapest, 2018. május 18.

Herman Géza
hallgató

Kivonat

Az utóbbi egy-két évtizedben a hangszerek fizikai modellezésén alapuló hangszintézis rohamos fejlődésnek indult. A diplomaterv az akusztikus gitár fizikai modellezésével foglalkozik, ami lehetőséget ad a gitár hangjának szintetizálására. A dolgozatban először ismertetem a gitár felépítését és a hang keletkezésének módját. Ezek után felvázolom a gitár fizikai modelljét, aminek fő részei a húrmodell, a testmodell és a sugárzásmodell. Ismertetem a húr modellezéséhez használatos technikákat, majd leírom a véges differenciák módszerén alapuló megoldást, ami eltér a megszokott megoldástól, mivel a húr diszkretizációja térben nem egyenletes. Vizsgálom a módszer numerikus diszperzióját és stabilitását. A modell paramétereinek meghatározásához méréseket végzek a húrokon: megállapítom a húrok merevségi és csillapítási együtthatóit. Ismertetem a gitáron alkalmazható játéktechnikákat, és ezek megvalósítását a modellben. A dolgozatot a gitár fedlapjának modellezési módszerével folytatom, ami a Kirchhoff-Love-féle lemezelméleten alapszik. Az elmélet központi eleme a lemez differenciálegyenlete, amit kibővítek további tagokkal, hogy a csillapítást modellezni tudjam. Ismertetem az egyenlet megoldását a véges differenciák módszerével, és a peremfeltételek kezelési módját. Bemutatom, hogy hogyan lehet tetszőleges alakú a modellezett lemez, és hogyan lehet a fedlapon található erősítő bordázatot kezelni. Összevetem az irodalomból származó eredményeket a szimuláció eredményével, hogy megbizonyodhassak a szimuláció helyességéről. A dolgozat következő részében a fedlap egyszerű sugárzásmodelljét mutatom be, amit a beépített dugattyú modelljéből vezetek le. Admittancia- és hangnyomás-méréseket végzek egy gitáron, és összehasonlítom az eredményt a szimulált gitár vonatkozó jellemzőivel. A dolgozatot a továbbfejlesztési lehetőségek leírásával, és a modell által kibocsátott hang minőségének elemzésével zárom.

A fizikai gitármodellen alapuló szintetizátor szoftvert C++ nyelven valósítottam meg, ami a fizikai paraméterek leírásából és egy kottából hangfájlt készít. A szoftver a modell bonyolultsága miatt nem valós időben működik, de tartalmaz egy egyszerűsített modellt is, ami valós időben tudja kiszámolni a keletkezett hangot.

Abstract

In the past few decades, physics-based sound synthesis of musical instruments has started to evolve rapidly. This thesis is about the physical modeling of the acoustic guitar, which allows the synthesis of the guitar sound. First, the structure of the guitar is described and the mechanism is shown how the sound is produced. Next, an outline of the physical model of the guitar is presented: the string model, the body model and the radiation model. Various methods are described which are used to model the string in the literature and then the solution is shown which is based on the finite difference method. The presented solution differs from the common one, as the discretization of the string is irregular in space. The numerical dispersion and stability of the method is also examined. The stiffness and damping factors of the strings are determined by measurements. Guitar playing techniques are explained, and their implementation in the model are shown. In the next part of the work, modeling of the soundboard is described, which is based on the Kirchhoff-Love plate theory. The main element of the theory is the differential equation of the plate, which is extended with other factors to model damping. Finite difference method is used to solve the equation with proper handling of the boundary conditions. An algorithm is presented which makes the modeled plate to be of any shape. The struts of the soundboard are modeled by locally altering the physical parameters of the soundboard. The simulation is validated by using results from the literature. A simple radiation model is presented which is derived from the model of the baffled piston. Admittance and sound pressure measurements are taken on a guitar, and these results are compared with the corresponding parts of the simulated guitar. In the last chapter, further development possibilities are outlined, and the sound quality of the model is evaluated.

The presented physical model is implemented as a software synthesizer, written in C++. The program receives parameters of the physical model and a score, and creates a wave file. The software does not work in real-time due to the complexity of the model, but it includes a simplified model which can calculate the generated sound in real-time.

Bevezetés

Az 1800-as évek elején több fontos találmány is született: a galvánelem és a dinamó. Ezek után már nem jelentett gondot a folyamatos elektromos áram termelése. Nem kellett sokat várni az első elektromos módon működő hangszer kitalálásáig: 1876-ban Elisha Gray megalkotta az első szintetizátort [1]: egy elektromos oszcillátort összekötött egy kezdetleges hangszórával. A hangszert kétoktávós zongorabillentyűkkel lehetett megszólaltatni. A találmány lökést adott az elektromos hangszintézisnek, az elmúlt 140 évben sokféle elven működő szintetizátor fejlődött ki. Amióta léteznek szintetizátorok, az új hangzások keresése mellett cél volt már meglévő hangszerek hangjának utánozása is. Erre egy igen ígéretes módszer a fizikai modellezésen alapuló hangszintézis. Ez annyiban tér el a korábbi módszerektől, hogy nem a hangszer hangját, hanem a hangkeltő mechanizmust modellezi: a hangszer geometriájából és anyagi jellemzőiből (fizikai modell) kiindulva szintetizálja a hangot. Az első fizikai modellezésen alapuló szintetizátor a Karplus-Strong húrszintézis (1983-ban publikálta Kevin Karplus és Alex Strong [2]): a húr rezgését egy szűrőn keresztül visszacsatolt késleltetővel modellezi. Ennek a módszernek az általánosításával alakult ki a digitális hullámvezető szintézis (digital waveguide synthesis), amivel hullámegyenlettel leírható hangszereket lehet modellezni (tipikusan ilyenek a húros hangszerek). A fizikai modellezés egyik nagy előnye, hogy lehetővé teszi a hangszerek paramétereinek szabad változtatását anélkül hogy a hangszert le kellene gyártani (pl. kipróbálható, hogy milyen hangja lenne egy fémből készült hegedűnek). További előnye (megfelelő minőségű modell esetén) a mindenre kiterjedő élethű hangzás. Ha a hangszer és a különféle játéktechnikák teljeskörűen modellezve vannak, akkor a fizikai modellezés minden esetben szimulálni tudja a hangszer kiadott hangját.

Az akusztikus gitár hangját leggyakrabban hullámtábla szintézissel (wavetable synthesis) állítják elő. Ennek a módszernek a sok előnye mellett (nem igényel nagy teljesítményű processzort, tökéletes hang olyan esetekben, amikor a zenész olyan hangot szeretne, ami előre fel van véve) vannak hátrányai: sok memóriát igényel és a különféle játéktechnikákat csak körülményesen (vagy egyáltalán nem) tud modellezni. Manapság már elterjedőben van a fizikai modellezésen alapuló gitárhang szintetizálás (pl. Korg OASYS).

A diplomaterv célja fizikai modellen alapuló akusztikus gitár szintetizátor elkészítése C++ nyelven. Ehhez szükséges a gitár fizikai modelljének létrehozása, és ezt a modellt vezérelni képes kottaformátum kifejlesztése. A fizikai modellben helyet kapnak a gitár hangját leginkább meghatározó elemei (legfőképpen a húr, és a különféle játéktechnikák). A dolgozat felépítése a következő: az 1. fejezet leírja az akusztikus gitár felépítését, a 2. fejezet foglalkozik a húr, a pengető, és az ezekhez kapcsolódó játéktechnikák modellezésével, a 3. fejezet leírja a gitár fedlapjának és a hang sugárzásának modelljét, a 4. fejezet összehasonlítja a modellt egy valódi gitárral, az 5. fejezet foglalkozik a modell vezérlésének leírásával és a 6. fejezet összefoglalja az eredményeket, és a lehetséges továbbfejlesztési lehetőségeket.

1. fejezet

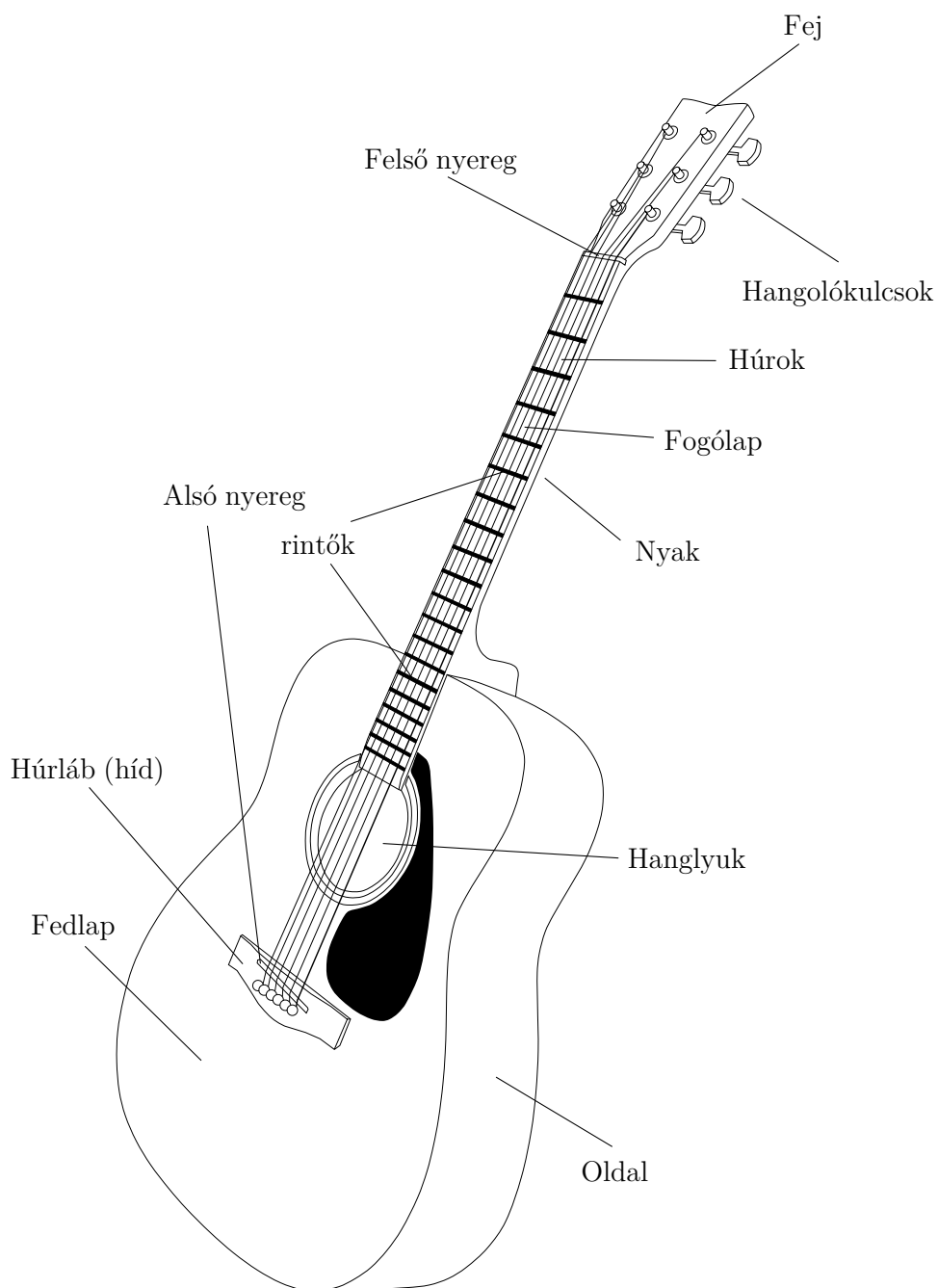
A gitár felépítése

Az 1.1 ábrán látható az akusztikus gitár felépítése. A gitár legnagyobb része a test, melyhez csatlakozik a nyak, aminek a végén található a fej a hangolókulcsokkal. Az alsó és felső nyereg között hat húr feszül, amiknek a gerjesztésével (pengetésével) szólal meg a hangszer.

1.1. A test

A gitár hangjának egyik fő meghatározója a test. Főbb részei a fedlap, hátlap és a gitár oldala. A fedlapon található a hanglyuk és a húrláb. A hurok a húrlábon keresztül kapcsolódnak a fedlaphoz. Mivel a fedlap vékony (2-4 mm), ezért bordázattal van megerősítve, hogy ellen tudjon állni a hurok húzóerejének. A fedlap általában lucfenyőből vagy cérdusból, a hátlap és az oldal pedig valamilyen keményfából (pl. mahagóni) készül.

A test a hurok rezgését erősíti fel: a hurok rezgése a húrlábon keresztül a fedlapra csatolódik, a fedlap rezgése pedig az oldallapon és a testben lévő levegőn keresztül jut el a hátlapig. A kibocsátott hang három fő helyről származik: a fedlap (a magas frekvenciák származnak innét), hátlap (alacsony frekvencia), és a testben rezgő levegő (alacsony frekvencia), ami a hanglyukon keresztül csatolódik a testen kívüli



1.1. ábra. Az akusztikus gitár részei

levegőhöz [5].

1.2. A nyak

A nyak a gitár testéhez ragasztással van rögzítve. A nyakon található a fogólap, amin az érintők (más néven *bundok*) helyezkednek el. A gitár nyaka a fejben végződik, ide csatlakoznak a húrok a felső nyergen és a hangolókulcson keresztül. A hangolókulccsal lehet szabályozni a húrok feszességét és ezáltal a húrok alap hangmagasságát. A fogólapon találhatóak az érintők, amikhez hozzászorítva a húrt, a húr rezgő hossza változtatható, ezáltal különféle hangmagasságok szólaltathatóak meg. Mivel a gitár kromatikus skálát használó hangszer¹, ezért az érintők exponenciális jelleggel helyezkednek el a fogólapon²: $\tilde{d}_x = (1 - 2^{-x/12})L$ (\tilde{d}_x az x -edik érintő távolsága a felső nyeregtől, L a húrok befogott hossza). Mivel a nyak vékony és a húrokat nagy feszítőerővel kell meghúzni, ezért szükséges lehet a nyakat megerősíteni fém merevítőpálcával.

1.3. A húrok

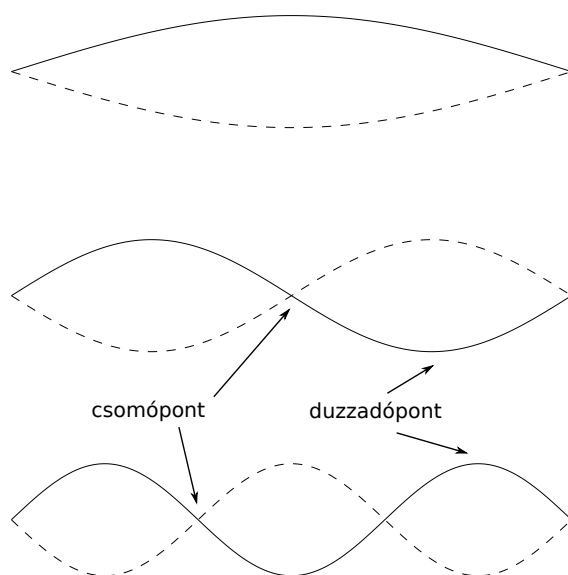
Az akusztikus gitáron általában 6 húr van, amelyek különböző vastagságúak, befogott hosszuk 65 cm. A vékonyabb húrok egy szálból állnak, a vastagabb húroknál a szála rá van tekerve egy másik szál is, hogy a húr nehezebb legyen (így mélyebb hangja lesz), ugyanakkor hajlékony maradjon. A gitár a húrok gerjesztésével szólal meg. Ha egy húrt megpengetünk, a pengetés helyétől kiindulva mindkét irányban elindul egy hullám, ami a húr végződésein (alsó és felső nyereg) visszaverődik fordított polaritással. Ezeknek a hullámoknak az interferenciájából a húron állóhullámok (1.2 ábra) alakulnak ki. Ezen állóhullámoknak van alapfrekvenciája, és felharmonikusai (a felharmonikusok frekvenciája az alapfrekvencia egész számú többszörösei). Az rezgés alapfrekvenciája függ a húr tömegétől és feszességétől, amit gitár hangolásával lehet beállítani. A leggyakoribb gitárhangelést mutatja az 1.1 táblázat 10-es

¹ez azt jelenti, hogy a szomszédos hangok közötti frekvenciahányados mindig $2^{1/12}$

²a húrok rezgési frekvenciája fordítottan arányos a hosszukkal

Kód	Hang	Frekv. (Hz)	Átmérő (mm)	Feszítőerő (N)	Lin. sűrűség (g/m)
PL010	E	329.63	0.254	72.09	0.3881
PL014	B	246.94	0.356	79.21	0.7607
PB023	G	196	0.584	124.16	1.8923
PB030	D	146.83	0.762	120.6	3.2692
PB039	A	110	0.991	113.03	5.453
PB047	E	82.4	1.194	92.11	7.9345

1.1. táblázat. Egy tipikus hangolás. A kód jelentése és az értékek [3]-ból származnak



1.2. ábra. Állóhullámok első három harmonikusa

D'Addario fémhúrokkal (a húrok általában fémből vagy nylonból készülnek). Az egyes húrok nem csak a táblázatban megadott hangmagasságon tudnak megszólalni: a gitáros különféle technikák alkalmazásával változtathatja a kiadott frekvenciát: a húrt az érintőhöz hozzászoríthatja (ezáltal megváltoztatja a húr rezgő hosszát, ami a hangmagasság emelkedésével jár), a lefogott húrt megnyújthatja (ezáltal a feszítőerő megnő, ami szintén a hangmagasság emelkedésével jár), ill. megszüntetheti a rezgés alacsonyabb harmonikusait, ha az ujját finoman egy duzzadóhelyre teszi (üveghang). A húrok elhanyagolható mértékben járulnak hozzá a hangnyomáshoz, a fő hangkibocsátó rész a hangszer teste.

1.4. A modell

A gitár mindenre kiterjedő modelljének elkészítése meghaladja a diplomaterv kereteit, ezért csak a legfontosabb elemek kerülnek bele a modellbe. A húrok modellezésére nagy hangsúlyt fektettem, a húr lehetséges négy rezgési módja (két transzverzális, egy longitudinális és egy forgási) közül kettőt modellezek (a két transzverzális rezgést, gitárnál ezek a legfontosabbak). A húrokon elvégezhető különféle játéktechnikák közül a legtöbbet modellezem. A húr és a húrláb közötti interakciót csak elnagyoltan modellezem: a húr-húrláb csatolásnak egy egyszerűbb modelljét készítettem, továbbá nem foglalkozom a húrok közötti csatolással. A gitár testéből csak a fedlapot modellezem, a gitár oldalfalával, hátlapjával, és a testben rezgő levegővel nem foglalkozom. A fedlap hangsugárzásához egy egyszerűbb modellt használtam.

2. fejezet

Húrmodell

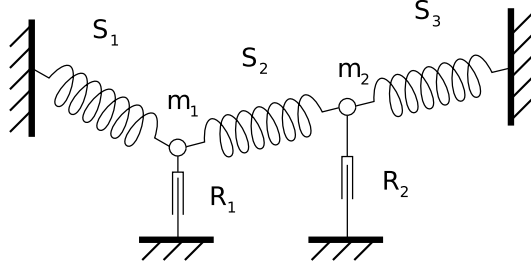
2.1. Modellezési módszerek

A hurok rezgését többféle módszerrel modellezhetjük [4]: tömeg-rugó hálózattal, digitális hullámvezetővel, modális szintézissel, vagy a húregyenlet numerikus megoldásával (pl. véges differenciák módszere). A modellezésre a véges differenciák módszerét (VDM) választottam, ezért a többi módszert csak röviden ismertetem.

2.1.1. Tömeg-rugó hálózat

A tömeg-rugó hálózat a húrt rugókkal összekötött tömegpontokkal és viszkózus csillapítással¹ modellezi. A tömegpontok mozgását analitikusan, vagy pl. véges differenciák módszerével lehet kiszámolni. A 2.1 ábrán lévő hálózatra felírható egyenletek:

¹olyan csillapítás, ahol a csillapító erő nagysága egyenesen arányos a mozgás sebességével



2.1. ábra. Tömeg-rugó hálózat

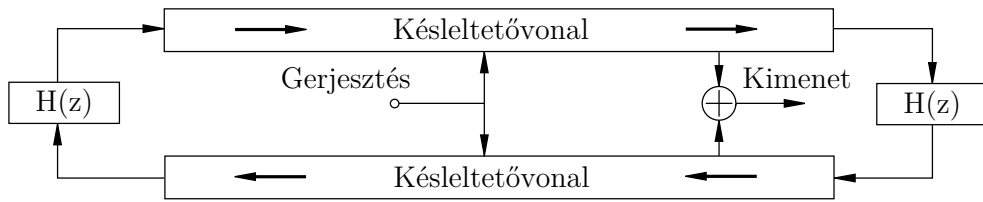
$$\begin{aligned}
 f_1^S(t) &= k_1^S \frac{p_1(t) - p_A}{\|p_1(t) - p_A\|} (\|p_1(t) - p_A\| - l_1), \\
 f_2^S(t) &= k_2^S \frac{p_2(t) - p_1(t)}{\|p_2(t) - p_1(t)\|} (\|p_2(t) - p_1(t)\| - l_2), \\
 f_3^S(t) &= k_3^S \frac{p_B(t) - p_2(t)}{\|p_B(t) - p_2(t)\|} (\|p_B(t) - p_2(t)\| - l_3), \\
 f_1^R(t) &= k_1^R \frac{\partial p_1(t)}{\partial t} \frac{p_C(t) - p_1}{\|p_C(t) - p_1\|}, \\
 f_2^R(t) &= k_2^R \frac{\partial p_2(t)}{\partial t} \frac{p_D(t) - p_2}{\|p_D(t) - p_2\|}, \\
 \frac{\partial^2 p_1(t)}{\partial t^2} &= \frac{-f_1^S(t) + f_2^S(t) + f_1^R(t)}{m_1}, \\
 \frac{\partial^2 p_2(t)}{\partial t^2} &= \frac{-f_2^S(t) + f_3^S(t) + f_2^R(t)}{m_2},
 \end{aligned}$$

ahol f^S a rúgó által kifejtett erő, k^S rugóállandó, l a rugó hossza, f^R a csillapítás által kifejtett erő, k^R a csillapítási tényező, p_1 és p_2 m_1 és m_2 pozíciója, p_A S_1 baloldali pontja, p_B S_3 jobboldali pontja, p_C R_1 talppontja, p_D R_2 talppontja és $\|x\|$ az x vektor hossza. Ezeket az egyenleteket megoldva előállítható m_1 és m_2 mozgásgörbéje. A tömegpontok számának növelésével a modell konvergál a húr egyenletéhez [5].

2.1.2. Digitális hullámvezető

Egy szabadon rezgő ideális húr mozgása felírható az egydimenziós hullámeqnyenlettel [4]:

$$\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2}, \quad (2.1)$$



2.2. ábra. Lezárt húr egyenletének megoldása hullámvezetővel

ahol $w(x, t)$ a húr kitérése (x a húron egy hosszirányú pozíció és t az idő), c pedig a hullámok terjedési sebessége. A (2.1) egyenlet megoldása a d'Alembert formula:

$$w(x, t) = w_r(t - x/c) + w_l(t + x/c),$$

ahol w_r és w_l bármilyen, kétszer differenciálható függvény (ezen függvények alakja a gerjesztéstől függ). A (2.1) egyenlet megoldható diszkrét időtartományban kis számításigénnyel (szükséges feltétel, hogy w_r és w_l ne tartalmazzon a mintavételi frekvencia felénél nagyobb frekvenciájú jelet):

$$\begin{aligned} w(x, t) &= w_r(t - x/c) + w_l(t + x/c) = w_r(nT - kX/c) + w_l(nT + kX/c), \\ &= w_r(T(n - k)) + w_l(T(n + k)), \end{aligned}$$

ahol $X = Tc$ választással élünk (T a mintavételi idő, n a diszkrétizált idő és k a diszkrétizált pozíció). Mintavételezve a jeleket:

$$w(kX, nT) = w^+(n - k) + w^-(n + k),$$

ahol $w^+(i) = w_r(Ti)$ és $w^-(i) = w_l(Ti)$. w^+ és w^- realizálható egy-egy késleltetővonallal. A késleltetővonalakba szűrőket iktatva modellezhető a csillapítás és a diszperzió² is. A húrokon terjedő hullámok merev befogás esetén polaritást váltva visszaverődnek. Így a 2.2 ábrán látható struktúrával megoldhatjuk a lezárt húr egyenletét ($H(z)$ reprezentálja a végeken való visszaverődést, csillapítást és a diszperziót). A hullámvezetővel való modellezés gitár esetében körülményesen alkalmazható, mivel a játékos a húr rezgésének frekvenciáját tudja változtatni a húr lefogásával, nyújtásával. Ezt a digitális hullámvezető technikával csak körülményesen lehet megvalósítani.

²eltérő frekvenciájú hullámok eltérő sebességgel közlekednek

2.1.3. Modális szintézis

A húr egyenlete lineáris homogén parciális differenciálegyenlet konstans együtthatókkal. Az ilyen típusú egyenletek megoldásaira igaz, hogyha $f_a(x, t)$ és $f_b(x, t)$ kielégíti, akkor $c_a f_a(x, t) + c_b f_b(x, t)$ is megoldás (ahol c_a és c_b tetszőleges konstans). Mivel folytonos periódikus függvénynek létezik Fourier sora (ami egy összegzés), ha Fourier sor egy-egy tagjára ha megoldjuk (2.1)-t, akkor az összegzett tagok kiadják a megoldást. A húrt következőképpen tehetjük periódikussá: ismételjük meg húrt tükrözve az x tengelyre, majd az így kapott dupla hosszú húrt ismételjük meg végtelenszer. Ezáltal a húr páratlan és periódikus függvénné válik, aminek a Fourier sora:

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \quad (2.2)$$

ahol $y_k(t)$ a t időpillanathoz tartozó k -adik módus amplitúdója és L a húr hossza. Az $y_k(t) \sin(k\pi x/L)$ tagot behelyettesítve (2.1)-be, a következő differenciálegyenletet kapjuk:

$$\frac{d^2 y_k(t)}{dt^2} + c^2 y_k(t) \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 = 0.$$

Ezt az egyenletet az $y_k(0)$ ismeretében ($y_k(0)$ -t a húr kezdeti alakjából lehet számolni) analitikusan meg lehet oldani [6], így a húregyenlet megoldása az $y_k(t)$ -k behelyettesítése a (2.2) egyenletbe.

2.1.4. Végés differenciák módszere

A húr (2.1) parciális differenciálegyenletét numerikusan megoldhatjuk a végés differenciák módszerével. Az eljárás lényege, hogy az időben és térben folytonos változókat diszkrétizáljuk, a parciális deriváltakat differenciával közelítjük. Példa egy parciális derivált közelítésre:

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \approx \frac{f(x, t + \Delta t) - f(x, t)}{\Delta t}.$$

A numerikus eljárás iteratív jellegű: a kezdeti feltételekből a differenciaegyenlet segítségével kiszámolhatóak a következő időpillanatbeli változók értékei, majd az egyenletet újra és újra felhasználva számolhatóak a további időpillanatokhoz tarto-

zó változók. A deriváltak közelítését többféleképpen elvégezhetjük, ezáltal különböző megoldási módszere lehet a diszkrétizált egyenletnek. Ha a diszkrétizált egyenlet a (2.3) alakot veszi fel (x a diszkrétizált változó, L lineáris operátor, i az időpillanat indexe), akkor explicit módszerről, ha pedig a (2.4) alakú, akkor implicit módszerről beszélünk.

$$x^{i+1} = L(x^0, \dots, x^i) \quad (2.3)$$

$$x^{i+1} = L(x^0, \dots, x^{i+1}) \quad (2.4)$$

A VDM alkalmazásánál vizsgálni kell a modell stabilitását, mivel stabil fizikai rendszernek is lehet instabil modellje. Az implicit Euler módszer előnye, hogy általában stabilabb szimulációt eredményez, viszont hátránya, hogy bonyolultabb és nagyobb számítási kapacitást igényel.

A módszer előnyei:

- a plusz tagokkal (csillapítás, merevség) rendelkező differenciálegyenletet is meg lehet oldani vele
- a diszkrétizációnak nem kell egyenletesnek lennie
- a húr pontjainak koordinátái megjelennek a szimulációban, amiket módosítani is lehet (pl. ütközés az érintővel)

2.2. A húr differenciálegyenlete

Egy szabadon rezgő húr mozgását felbonthatjuk két transzverzális és egy longitudinális komponensre. Ebben a dolgozatban azonban csak a két transzverzális komponenssel foglalkozom, a longitudinális komponenst figyelmen kívül hagyom. Figyelmen kívül hagyom továbbá a húr rezgéséből, pengetéséből adódó feszítőerő változást is, mivel mértéke elhanyagolható (egy 65 cm-es húron, ha 5 mm-es kitérést okozunk a húr végétől 10 cm-re, akkor a feszítőerő 0.023%-kal nő meg). A transzverzális komponensek közötti csatolással sem foglalkozom.

A szabadon rezgő húr differenciálegyenlete [4]:

$$\mu \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2},$$

ahol w a húr kitérése (m), T a feszítőerő (N), x a húr hosszirányú pozíciója (m), μ a húr lineáris sűrűsége (kg/m) és t az idő. Azonban ahhoz, hogy a gitárhúr jó modelljét kapjuk, az egyenletet ki kell bővíteni további tagokkal, hogy figyelembe vegye a következőket:

- közeg miatti frekvenciafüggetlen csillapítás
- anyagban fellépő belső súrlódás miatti frekvenciafüggő csillapítás
- anyag merevsége miatti inharmonicitás³. A merev húr modelljét a húr és a rúd modelljének összeházasításából nyerjük [10].⁴
- külső erőhatások

Az egyenletet kiegészítve az új tagokkal a következőt kapjuk [6]:

$$\mu \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} - b_1 \mu \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + b_2 \mu \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial t \partial x^2} - EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + F(x, t), \quad (2.5)$$

ahol b_1 a frekvenciafüggetlen csillapítási tényező (s^{-1}), b_2 a frekvenciafüggő csillapítási tényező ($m^2 s^{-1}$), E az anyag Young modulusza (Pa), I a felületi nyomaték (m^4), $F(x, t)$ pedig a külső erőhatás. Körlap keresztmetszetű rúdnál $I = \pi r^4/4$ ahol r a körlap sugara.

Ahhoz, hogy a (2.5) egyenletet megoldhassuk, szükség van kezdeti- és peremfeltételekre. A kezdeti feltétel, hogy a húr nyugalomban van (a gerjesztést az F taggal fogjunk végezni):

$$w(x, 0) = 0 \quad \text{és} \quad \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

A peremfeltételnek gitárhúr esetében a csuklós támasz

$$w(0, t) = \left. \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 0 \quad \text{és} \quad w(L, t) = \left. \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=L} = 0$$

megfelelő választás (L a húr hossza).

³az anyag merevsége miatt a nagyobb frekvenciájú hullámok gyorsabban terjednek a húrban, ezáltal a módusok frekvenciája nem egész számú többszöröse lesz az alapfrekvenciának

⁴A rúd rezgésének egyenlete [5]: $\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = -EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4}$

2.3. Diszperzió

Az ideális hullámegyenlet (2.1) megoldása két ellenkező irányban, konstans sebességgel közlekedő függvény szuperpozíciója. A különböző frekvenciájú komponensek azonos sebességgel közlekednek, a két függvény alakja a mozgás közben nem változik, nincs diszperzió. Ezt ellenőrizhetjük, ha az egyenletbe behelyettesítjük a következő tesztfüggvényt (az irodalomban ezt *ansatz*-nak is nevezik) [7]:

$$w(x, t) = e^{\sigma t + j(\omega t + \beta x)}. \quad (2.6)$$

Ez a helyettesítés egy időben exponenciális lecsengésű ($\sigma < 0$ esetben), szinuszos jellel próbálja megoldani az egyenletet. Az $\omega t + \beta x$ kifejezés a jel fázisa. Tegyük ezt a fázist egy konstanssal egyenlővé (például 0-val), ezzel összefüggésbe kerül a jel térbeli terjedése (x) az idővel (t). Azaz ha eltelik valamennyi idő, meghatározható az az x , ami a jelnek ugyanahhoz a fázisához tartozik (az adott idő alatt a jel mekkora távolságot tett meg). Számolhatjuk $\frac{x}{t}$ -t, ami a jel terjedési sebessége (ezt hívja az irodalom fázissebességnek):

$$\omega t + \beta x = 0 \Rightarrow \frac{x}{t} = -\frac{\omega}{\beta}.$$

Helyettesítsük be (2.1)-be (2.6)-t, a következő eredményt kapjuk:

$$\frac{\omega}{\beta} = \pm c. \quad (2.7)$$

Azaz a korábbi állításunkat igazoltuk, a terjedési sebesség független a frekvenciától.

Ha ugyanezt az eljárást alkalmazzuk (2.5)-re, egy komplex változós egyenletet kapunk, aminek először a képzetes részét megoldva a következőt kapjuk:

$$\sigma = -\frac{b_1 + b_2\beta^2}{2}.$$

Majd ezt behelyettesítve a valós rész egyenletébe, a következő összefüggésre jutunk:

$$\omega = \pm \sqrt{\beta^4 \left(\frac{EI}{\mu} - \frac{1}{2}b_2^2 \right) + \beta^2 \left(\frac{T}{\mu} - \frac{1}{2}b_1b_2 \right) - \frac{b_1^2}{4}}.$$

Azaz a csillapítási tényezők és a merevségért felelős tag is diszperziót okoz (ha ezeket nullára állítjuk, visszakapjuk (2.7)-t). A csillapítási tényezők értékei jellemzően kevésbé befolyásolják ω értékét a gitár esetében (a tipikus értékek megtalálhatóak a 2.4 fejezetben), így ezeket el lehet hanyagolni:

$$\omega = \pm\beta\sqrt{\frac{\beta^2 EI}{\mu} + \frac{T}{\mu}}. \quad (2.8)$$

Továbbá gitár esetében a merevségért felelős tag kisebb β esetén elhanyagolható módon járul hozzá a frekvencia emelkedéséhez (erről a 2.7 fejezetben lehet olvasni), ezért a kisebb indexű felharmonikusok frekvenciája az alaphfrekvencia egész számú többszörösének tekinthető (a mélyebb, merevebb húrok hangzásában viszont szerepe van, mivel „fémes” hangot ad a húroknak).

2.4. Paraméterek meghatározása

Ahhoz, hogy a húr egyenletét numerikusan megoldjuk, szükségünk van az egyenletben szereplő paraméterek meghatározására. Ezek közül a μ , T tipikus értékei az 1.1 táblázatból kiolvashatóak. Ugyanakkor, ha ezeket az értékeket közvetlenül felhasználjuk, a keletkező modellben a húrok kicsit el lesznek hangolva. Ezért, ahogy a valós gitárt, a modellt is be kell hangolni a T értékének pontos beállításával. Az alapharmonikus térbeli egyenlete:

$$a(x) = \text{Im}\{e^{j\frac{\pi x}{L}}\}, x = [0..1].$$

Azaz a diszperzió nél látott β értéke π/L , amit ha behelyettesítünk (2.8)-ba, megkapjuk az alapharmonikus körfrekvenciáját:

$$\frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{\pi^2 EI}{L^2 \mu} + \frac{T}{\mu}}.$$

A T -t kifejezve az F kívánt frekvenciával:

$$T = 4\mu(F L)^2 - \frac{\pi^2 EI}{L^2}.$$

Ebben a képletben az első tag a hangsúlyos, EI tipikus értékeinél a második tag elhagyható (T értékében jellemzően kisebb, mint 0.01%-os különbséget okoz):

$$T = 4\mu(FL)^2.$$

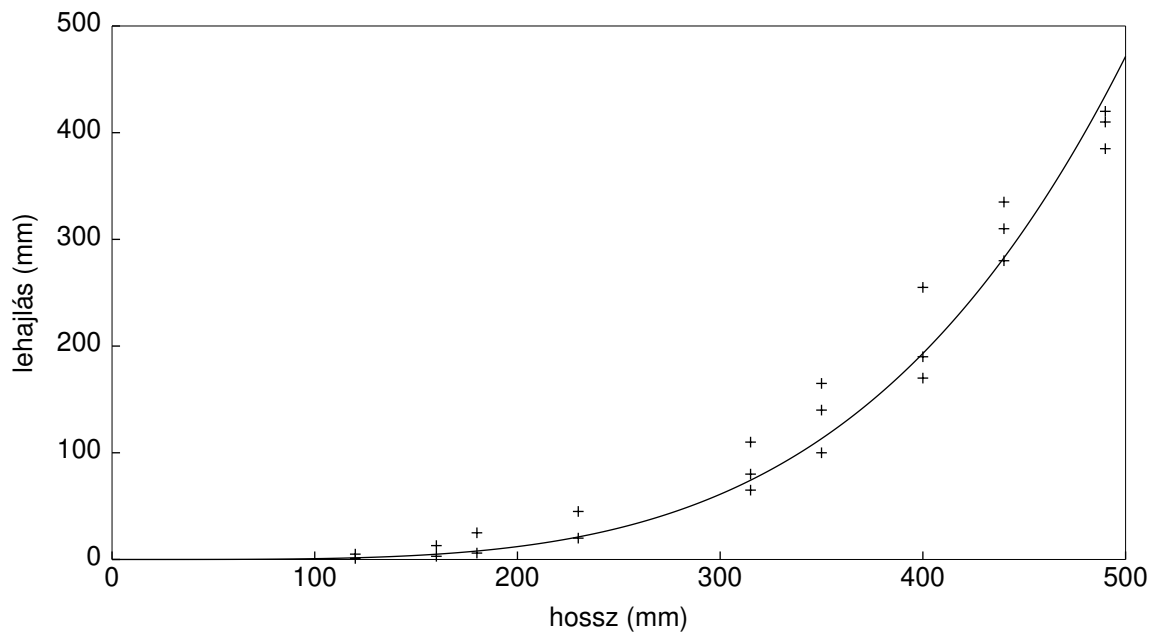
Ennek a képletnek az alkalmazása a mély E húrra $T = 91.046$ -ot eredményez, míg [3] $T = 92.11$ -et közöl.

Az EI tagot számíthatjuk az egy szálat tartalmazó húrra az $EI = E\pi r^4/4$ képlet alkalmazásával (E tipikus értéke acélra 200 GPa). A két szálat tartalmazó húrra azonban ez a képlet nem alkalmazható, hiszen ezek a húrok nem közelíthetőek egy vékony rúddal. Ezért az EI tag értékét méréssel határoztam meg: egy saját súlya alatt meghajló rúd lehajlása [8]:

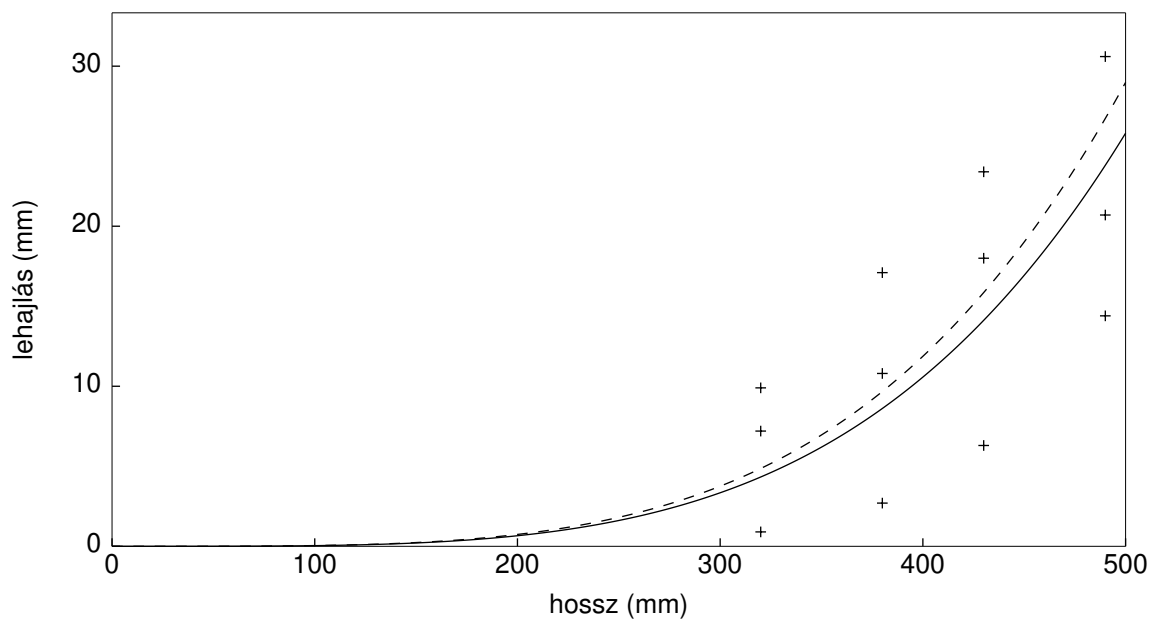
$$y(l) = \frac{\mu l^4}{8EI},$$

ahol $y(l)$ a lehajlás, l a rúd hossza. A következő mérést végeztem el: a mély E húr különböző hosszúságú részét vízszintesen befogtam, és mértem a lehajlását. A mérést többször meg kellett ismételnem a húrt hossz tengelye körül elforgatva, mivel a húrok alapállapotban sem egyenesek teljesen (ennek az az oka, hogy a kereskedelemben kapható húrokat feltekerve tárolják, és a gitáron több hónapig fent lévő húrok sem egyenesednek ki teljesen). A mérési eredmények láthatóak a 2.3 ábrán: egy pont egy mérési eredményt jelez (egy hosszhoz több mérési eredmény tartozik a korábban leírt forgatás miatt). Az így kapott mérési adatokra ráillesztett negyedfokú görbéből ($y(l) = cl^4$) EI meghatározható ($EI = \frac{\mu}{8c}$): $c = 7.544$, $EI = 0.000131$ ($\mu = 7.9345$ g/m mellett) adódik. Hogy a mérés helyességét ellenőrizzem, elvégeztem azt az egy szálból álló G húrra is. Ennek eredménye található a 2.4 ábrán. A negyedfokú illesztés eredménye: $c = 0.413$, $EI = 0.000572$ ($\mu = 1.8923$ g/m mellett), a $EI = E\pi r^4/4$ képlettel számítás $c = 0.463$, $EI = 0.00051$ -t ad (PL016-s húrra [3]), tehát meglehetősen jó egyezést kapunk.

A b_1 és b_2 értékeit méréssel lehet meghatározni. Ezen csillapítási tényezők függenek a közegtől (levegő), a vizsgált húrtól (pl. mennyire van elhasználódva) és a húrok befogásától: a végződéseken energia csatolódik az alsó és felső nyeregbe. Ennek az energiának a mennyisége függ a gerjesztés síkjától: a fedlappal párhuzamosan gerjesztett



2.3. ábra. A mély E húr lehajlásai



2.4. ábra. G húr lehajlásai. A folyamos vonal mutatja a mérésekből származó, a szaggatott vonal pedig a képlettel számított lehajlást

húrok lecsengési ideje nagyobb, mint a merőlegesen gerjesztetté [5]. A csillapítások meghatározásához meg kell vizsgálni, hogy a b_1 és b_2 paraméterek pontosan milyen lecsengést eredményeznek, majd pedig méréseket kell végezni egy adott húron, hogy meghatározhassuk a paramétereket. Mivel a húregyenlet megoldásából származó lecsengés nem lesz tökéletes másolata a fizikai húrnak (mivel ahhoz több paraméter szükséges), ezért a legkisebb négyzetes hiba elvét használva fogom meghatározni a paraméterek értékeit.

A diszperzió vizsgálatánál már kaptunk egy eredményt, ami mutatja, hogy a húregyenlet milyen lecsengést okoz:

$$w(x, t) = e^{\sigma t + i(\omega t + \beta x)},$$

$$\sigma = -\frac{b_1 + b_2 \beta^2}{2}.$$

Tehát a lecsengés jellege exponenciális, ahol b_1 frekvenciafüggetlen, a b_2 pedig a frekvencia négyzetétől függő lecsengést okoz. A gitáron fent lévő húr lecsengését vizsgáljuk: azért fontos, hogy a húr a gitáron legyen, hogy figyelembe tudjuk venni a csatlásokon fellépő veszteségeket. Egy lehetséges mérési módszer a következő: mikrofont teszünk a húrhoz közel, majd a húrt gerjesztjük a húrlábhoz közel (hogy a felharmonikusok is nagy amplitúdóval legyenek jelen a jelben), a kibocsátott hangot felvesszük mikrofonnal és digitális jellé alakítjuk. A mérésnél feltételezzük, hogy a digitalizált jel lineáris kapcsolatban áll a húr rezgésével: a levegő átviteli függvénye jó közelítéssel lineáris kis távolságokra, a mikrofon típusát pedig az alapján választottam ki, hogy minél egyenesebb amplitúdókarakterisztikája legyen (Behringer ECM8000, 50-4000Hz között egyenesnek tekinthető) A mikrofont közel tettem a húrhoz (1 cm), a harmadik érintő fölé. Ezt a pozíciót két okból választottam: egyrészt a mikrofonnak érdemes minél közelebb lennie a húrhoz, hogy a jel/zaj arány a lehető legjobb legyen, másrészt a pozíciónak olyannak kell lennie, hogy az alacsonyabb frekvenciájú állóhullámok (elsősorban ezekre a hullámokra vagyunk kíváncsiak) csomópontjaitól távol legyen, és a duzzadópontok se legyenek túlságosan távol.

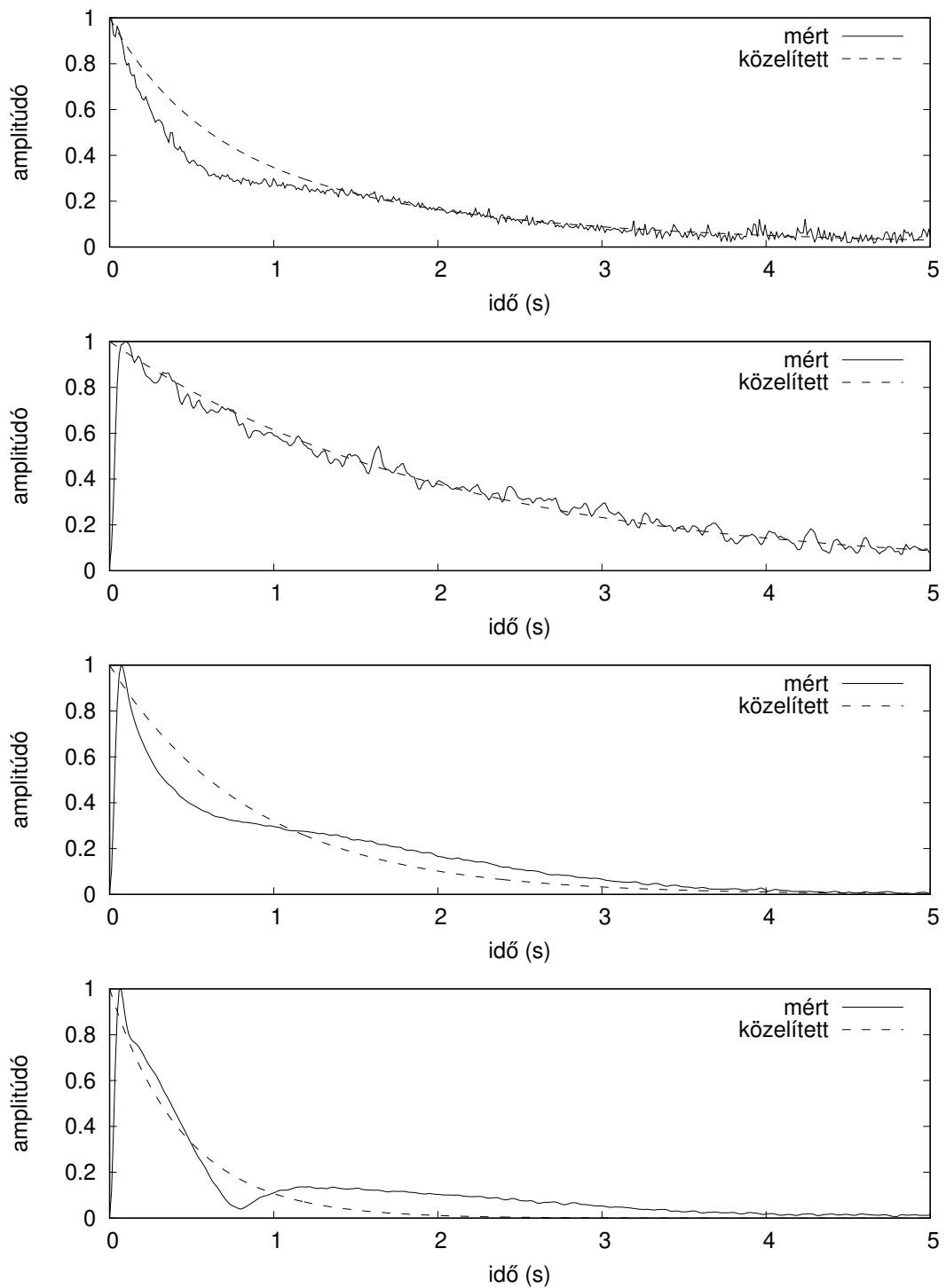
Ahhoz, hogy a csillapítást közelíthessük, elő kell állítani a húr harmonikus frekvenciáinak amplitúdógörbéit az idő függvényében. Ezt a következő módon tettem meg: a mikrofon jelét megszoroztam $e^{j2\pi n t}$ jellel, ahol t az idő, n a vizsgált harmonikus

száma (1 az alapfrekvencia, 2 az első felharmonikus, stb.) és a az alapfrekvencia. Ez a szorzás a jelet frekvenciatartományban konvolválja $-na$ -ban és na -ban levő Dirac-impulzussal, tehát a jelnek az na frekvenciájú komponense két helyre „mozdul el”: a nullába, és $2na$ -ba. Emiatt, ha a szorzat eredményét megsűrjűjük egy aluláteresztő szűrővel, akkor megkapjuk az eredetileg na -ban lévő jel amplitúdógörbáját. A szűréshez 3 pólusú Butterworth szűrőt használtam, a sarokfrekvenciát 10 Hz-re állítottam. Az így kapott amplitúdógörbékét kell közelítenünk, azaz meghatározni azt a b_1 és b_2 paramétert, amire a következő négyzetes hiba a legkisebb:

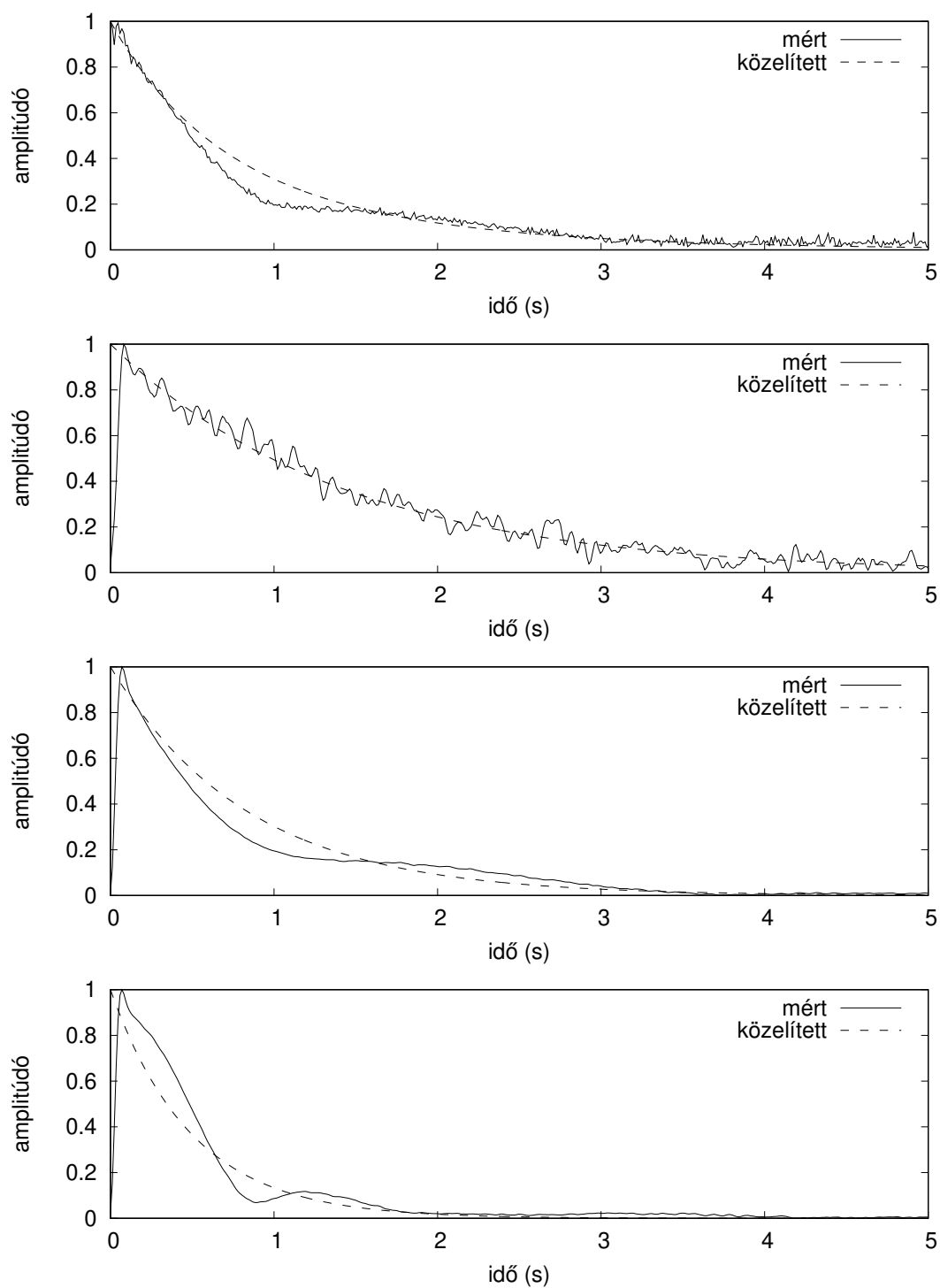
$$E = \sum_{n=1}^6 \left(\int_0^5 \left(e^{-0.5(b_1 + b_2(\frac{\pi n}{L})^2)t} - f_n(t) \right)^2 dt \right),$$

ahol E a minimalizálandó hiba, L a húr hossza, f_n a mért jel n -edik harmonikusának amplitúdógörbéje. A hiba minimalizálásakor az első 6 harmonikus első 5 másodpercét vettem figyelembe, mivel ezen a tartományon kívül már igen rossz a jel/zaj arány. A hiba minimalizálását elvégezhetjük úgy, hogy vesszük E logaritmusát, így a feladat megoldható lineáris regresszióval. Ez a megoldás azonban felerősíti a kis jeleket, és rossz közelítést kapunk a $t < 1$ s tartományban. Egy megoldás lehetne erre a problémára, hogy súlyozva közelítünk, de inkább más egyszerű megoldást kerestem a problémára, amivel az eredeti, nem linearizált térben minimalizálhatjuk E -t. Mivel a keresési tér csak két dimenziós (b_1 és b_2 értékét kell meghatározni), egy egyszerű kimerítő keresést alkalmaztam a $b_1 = [0; 2] \times b_2 = [0; 1]$ térben, a változók értékét 0.001-es lépésközzel léptetve. Az eredmények megtekinthetőek a 2.5 ábrán (az amplitúdótengelyt normalizáltam a függvény kezdő értékére), ami a mély E húr f_n jeleit és ezek közelítését ábrázolja, a fedlappal párhuzamos gerjesztés esetén. A közelítés eredménye ebben az esetben $b_1 = 0.536$ és $b_2 = 0.018$. Ha a húrt merőlegesen gerjesztjük, akkor a 2.6 ábrán látható eredményt kapjuk: $b_1 = 1.08$ és $b_2 = 0.014$ értékek adódódnak. Ezek az eredmények igazolják [5]-ben leírt jelenséget: a fedlappal párhuzamosan gerjesztett hurok lecsengési ideje valóban nagyobb, mint a merőlegesen gerjesztetté.

Természetesen ezt a mérést el kell végezni mind a hat húrra, mivel különböző b_1 és b_2 értékeket kaphatunk.



2.5. ábra. Felülről lefelé: a húr teljes, és az 1, 2 és 3 harmonikusok energiája az idő függvényében, a fedlappal párhuzamosan gerjesztett esetben



2.6. ábra. Felülről lefelé: a húr teljes, és az 1, 2 és 3 harmonikusok energiája az idő függvényében, a fedlapra merőlegesen gerjesztett esetben

2.5. A differenciálegyenlet numerikus megoldása

A húr egyenletének megoldásához a véges differenciák módszerét (VDM) választottam. A módszer alap gondolata, hogy a megoldási tartományt időben és térben diszkrétizáljuk véges számú pontra és a parciális deriváltakat közelítő számítással állapítjuk meg (pl. Taylor sorfejtés segítségével). Az egyes tagok diszkrétizálására többféle lehetőség létezik. Olyan közelítéseket választottam, amik explicit Euler módszerrel megoldható egyenlethez vezetnek. Ennek lényege, hogy az új időpillanathoz tartozó pontok értéke explicit módon ki van fejezve a korábbi időpillanatokhoz tartozó pontok értékeivel. Legyen N a pontok száma, d_i ($i = [1..N-1]$) az $i+1$ és i -edik pont közötti távolság, w_i^m pedig az i -edik pont kitérése a m -edik időpillanatban, x_i az i -edik pont x koordinátája ($x_i = \sum_{k=1}^{i-1} d_k$).

(2.5)-t diszkrétizálva a következő eredményt kapjuk (a levezetés a B. függelékben található):

$$\begin{aligned}
w_i^{m+1} = & w_{i-2}^m \frac{-24EI\Delta t^2}{\mu d_{i-2}(d_{i-1} + d_{i-2})(d_i + d_{i-1} + d_{i-2})(d_i + d_{i+1} + d_{i-1} + d_{i-2})} \\
& + w_{i-1}^m \left(\frac{2\Delta t(T\Delta t + \mu b_2)}{\mu d_{i-1}(d_{i-1} + d_i)} + \frac{24EI\Delta t^2}{\mu d_{i-2}d_{i-1}(d_i + d_{i-1})(d_i + d_{i+1} + d_{i-1})} \right) \\
& + w_i^m \left(2 - b_1\Delta t - \frac{2\Delta t(T\Delta t + \mu b_2)}{\mu d_{i-1}d_i} + \frac{-24EI\Delta t^2}{\mu(d_{i-2} + d_{i-1})d_{i-1}d_i(d_i + d_{i+1})} \right) \\
& + w_{i+1}^m \left(\frac{2\Delta t(T\Delta t + \mu b_2)}{\mu d_i(d_{i-1} + d_i)} + \frac{24EI\Delta t^2}{\mu(d_{i-1} + d_{i-2} + d_i)(d_{i-1} + d_i)d_i d_{i+1}} \right) \\
& + w_{i+2}^m \frac{-24EI\Delta t^2}{\mu(d_{i-1} + d_{i-2} + d_i + d_{i+1})(d_{i-1} + d_i + d_{i+1})(d_i + d_{i+1})d_{i+1}} \\
& + w_{i-1}^{m-1} \frac{-2b_2\Delta t}{d_{i-1}(d_{i-1} + d_i)} \\
& + w_i^{m-1} \left(-1 + b_1\Delta t + \frac{2b_2\Delta t}{d_{i-1}d_i} \right) \\
& + w_{i+1}^{m-1} \frac{-2b_2\Delta t}{d_i(d_{i-1} + d_i)} \\
& + F_i^m \frac{2\Delta t^2}{\mu(d_{i-1} + d_i)}.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Az egyenlet viszonylagos bonyolultságát az okozza, hogy a pontok térben nem egyenesen helyezkednek el. A w_i^{m+1} számolásánál vannak speciális esetek: w_1 , és w_N -t nem kell számolni, mivel a peremfeltételekből az értékük mindig nulla. A w_2^{m+1} és w_{N-1}^{m+1} számolásánál szükség van olyan w_i^m pontokra, amikre az i kívül esik a $[1; N]$ tartományon. Ezt úgy oldhatjuk meg, hogy virtuális pontokat veszünk fel (w_0 és w_{N+1}), amiket a deriváltak közelítéseiből és a peremfeltételekből számítunk. A húr $x = 0$ pontjára felírhatjuk a következő közelítést:

$$\left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x=0} \approx \frac{w_0 - 2w_1 + w_2}{\Delta x^2}.$$

A peremfeltételekből tudjuk, hogy ennek a deriválnak az értéke nulla, azaz:

$$\frac{w_0 - 2w_1 + w_2}{\Delta x^2} = 0.$$

A w_1 értéke a peremfeltételek miatt 0, ezáltal kifejezhető w_0 értéke:

$$w_0 = -w_2.$$

A w_{N+1} értékét hasonlóan lehet meghatározni: $w_{N+1} = -w_{N-1}$.

Térben a diszkretizációt speciálisan kell elvégeznünk: mivel a fogólapon az érintők exponenciálisan helyezkednek el (ezáltal a pozíciójuk nem egy kis Δ szám egész számú többszöröse), célszerű a húrt is exponenciális jelleggel diszkretizálni úgy, hogy minden érintő pozícióhoz tartozzon egy pont. Így a lefogott húrnak pontosan a megfelelő hosszúságú része tud rezegni. Ezt úgy érhetjük el, hogy először az érintő pozíciókhoz teszünk pontokat, majd pedig további pontokat teszünk le az érintő pozíciók közé lineárisan elosztva úgy, hogy a pontok eloszlása nagyjából homogén legyen (az érintők távolságával lineárisan arányos számú pontot kell letenni).

A gitárhúr szimulációjához két (2.9) egyenletet kell megoldani, egyet-egyét a két transzverzális komponenshez. Továbbiakban a fogólapra merőleges irányt Y -nak, a párhuzamost pedig Z -nek, az Y irányú w_i -t y_i -nek, a Z irányú w_i -t pedig z_i -nek fogom nevezni.

2.6. A numerikus megoldás konvergenciája

A diszkrétizált differenciálegyenlet nem minden esetben konvergens⁵. A konvergencia vizsgálatához egy jól használható eszköz a Lax-Richtmyer tétel [9], amely kimondja, hogy egy konzisztens⁶ véges differencia módszer akkor és csak akkor konvergens, ha stabil.

Mivel a (2.9) differenciálegyenlet konzisztens, a stabilitást kell csak megvizsgálnunk, amire egy lehetséges módszer a von Neumann analízis [9]. Az eljárás lényege, hogy a differenciaegyenletet Fourier transzformáljuk x szerint, majd a $\hat{w}^{m+1}(\omega) = g(\omega)\hat{w}^m(\omega)$ helyettesítéssel élünk (w -nek a Fourier transzformáltját \hat{w} -vel jelölöm), A helyettesítésnek az az értelme, hogy ezzel megkapjuk azt a $g(\omega)$ függvényt, ami két időpillanat között leírja az egyes frekvenciák változását. Ha $|g(\omega)|$ egy adott ω értéken nagyobb, mint egy, akkor a vizsgált egyenlet nem stabil, mivel a jel ω frekvenciájú komponense a végtelenségig nőni fog. Ezek alapján a differenciaegyenlet akkor stabil, ha $|g(\omega)| \leq 1$ minden ω -ra [9]. Közvetlenül nem alkalmazhatjuk a módszert (2.9)-re, mivel x -ben a diszkrétizáció nem egyenletes. Ezért a $d = \min(d_i)$ választással egyenletesen diszkrétizálttá tettem az egyenletet. Ennek a lépésnek nincs meg a matematikai megalapozottsága⁷, de a gyakorlatban működni látszik: ha az egyenletesen diszkrétizált verzió stabil, akkor az eredeti egyenlet is az. A (2.9) egyenletet felírva a különböző d_i értékek helyett d -vel a következőt kapjuk:

$$w_i^{m+1} = K_0(w_{i-2}^m + w_{i+2}^m) + K_1(w_{i-1}^m + w_{i+1}^m) + K_2w_i^m + K_3(w_{i-1}^{m-1} + w_{i+1}^{m-1}) + K_4w_i^{m-1}, \quad (2.10)$$

⁵a konvergencia azt jelenti ebben az esetben, hogy ha a Δt és Δx tart a nullához, akkor a diszkrétizált w_i^m tart a $w(i\Delta x, m\Delta t)$ -hez

⁶ez azt jelenti, hogy a differenciaegyenletben, ha a Δt -t és Δx tart a nullához, akkor „visszkapjuk” a differenciálegyenletet

⁷kerestem az irodalomban ilyen irányú eredményeket, de sajnos nem találtam

ahol a K konstansok értéke a következő:

$$\begin{aligned}
K_0 &= -\frac{EI\Delta t^2}{\mu d^4}, \\
K_1 &= \frac{\Delta t(T\Delta t + \mu b_2)}{\mu d^2} + \frac{4EI\Delta t^2}{\mu d^4}, \\
K_2 &= 2 - b_1\Delta t - \frac{2\Delta t(T\Delta t + \mu b_2)}{\mu d^2} - \frac{6EI\Delta t^2}{\mu d^4}, \\
K_3 &= \frac{-b_2\Delta t}{d^2}, \\
K_4 &= -1 + b_1\Delta t + \frac{2b_2\Delta t}{d^2}.
\end{aligned}$$

A (2.10) egyenletet Fourier transzformálva a térbeli koordináta szerint:

$$\begin{aligned}
\hat{w}^{m+1} &= K_0(\hat{w}^m e^{-2j\omega} + \hat{w}^m e^{2j\omega}) \\
&+ K_1(\hat{w}^m e^{-j\omega} + \hat{w}^m e^{j\omega}) \\
&+ K_2\hat{w}^m \\
&+ K_3(\hat{w}^{m-1} e^{-j\omega} + \hat{w}^{m-1} e^{j\omega}) \\
&+ K_4\hat{w}^{m-1}.
\end{aligned}$$

Elvégezve az egyszerűsítéseket, és behelyettesítve $\hat{w}^{m+1} = g\hat{w}^m$ -t, ezt kapjuk:

$$g^2(\omega) + bg(\omega) + c = 0,$$

ahol

$$\begin{aligned}
b &= -2K_0 \cos(2\omega) - 2K_1 \cos(\omega) - K_2, \\
c &= -2K_3 \cos(\omega) - K_4 = 0.
\end{aligned}$$

Ahhoz, hogy a megoldás stabil legyen, $|g(\omega)| \leq 1$ szükséges. Ez akkor teljesül, ha $|c| \leq 1$ és $c \geq |b| - 1$ (ennek levezetése a C. függelékben található). A $|c| \leq 1$ feltétel akkor teljesül, ha $2|K_3| + |K_4| \leq 1$ igaz. A $c \geq |b| - 1$ teljesülésének feltétele (a

levezetés a D. függelékben található):

$$-K_4 + 1 - 2K_3 \geq |-2K_0 - 2K_1 - K_2|$$

és

$$-K_4 + 1 + 2K_3 \geq |-2K_0 + 2K_1 - K_2|.$$

Ehhez a két kritériumhoz további szükséges feltétel járul, ha a következő igaz:

$$s = \operatorname{sgn} \left(\frac{K_1^2 - K_3^2}{4K_0} + 2K_0 - K_2 \right),$$

$$\left| \frac{K_1 s - K_3}{4K_0 s} \right| \leq 1.$$

Ekkor a következőnek is igaznak kell lennie:

$$-K_4 + 1 + K_2 s \geq \frac{(K_1 s - K_3)^2}{4K_0 s} + 2K_0 s.$$

Megjegyzés: ez a stabilitási vizsgálat nem foglalkozik a peremfeltételekkel. A tapasztalat⁸ azt mutatja, hogy ennél a problémánál a peremfeltételek lazítanak a stabilitási kritériumon, azaz ha a peremfeltétel nélküli differenciaegyenlet stabil, akkor a peremfeltétellel rendelkező egyenlet is stabil lesz.

2.7. Numerikus diszperzió

A 2.3 fejezetben tárgyalt diszperzió számítás elvét alkalmazhatjuk a diszkretizált húregyenletre is, ezáltal vizsgálható a véges differencia módszer által megoldott egyenlet diszperziója. Összevethetjük a kapott eredményeket a differenciálegyenlet diszperziójával, hogy megkapjuk, hogy a numerikus megoldás mennyire közelíti az eredeti egyenletet ebben a tekintetben. Diszkrét esetben a tesztfüggvény (2.6)-nak

⁸különbéféle paraméterekkel végzett szimulációk

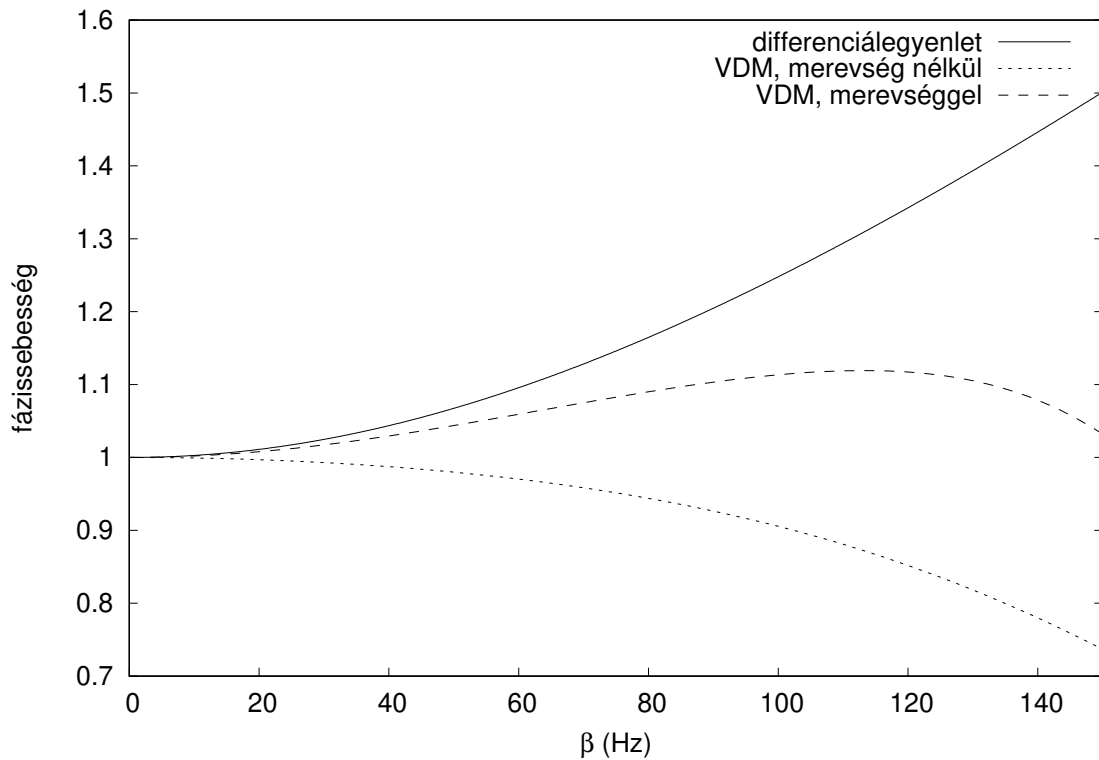
a diszkretizált változata [7]:

$$w_i^m = e^{\sigma m \Delta t + j(\omega m \Delta t + \beta i \Delta x)}.$$

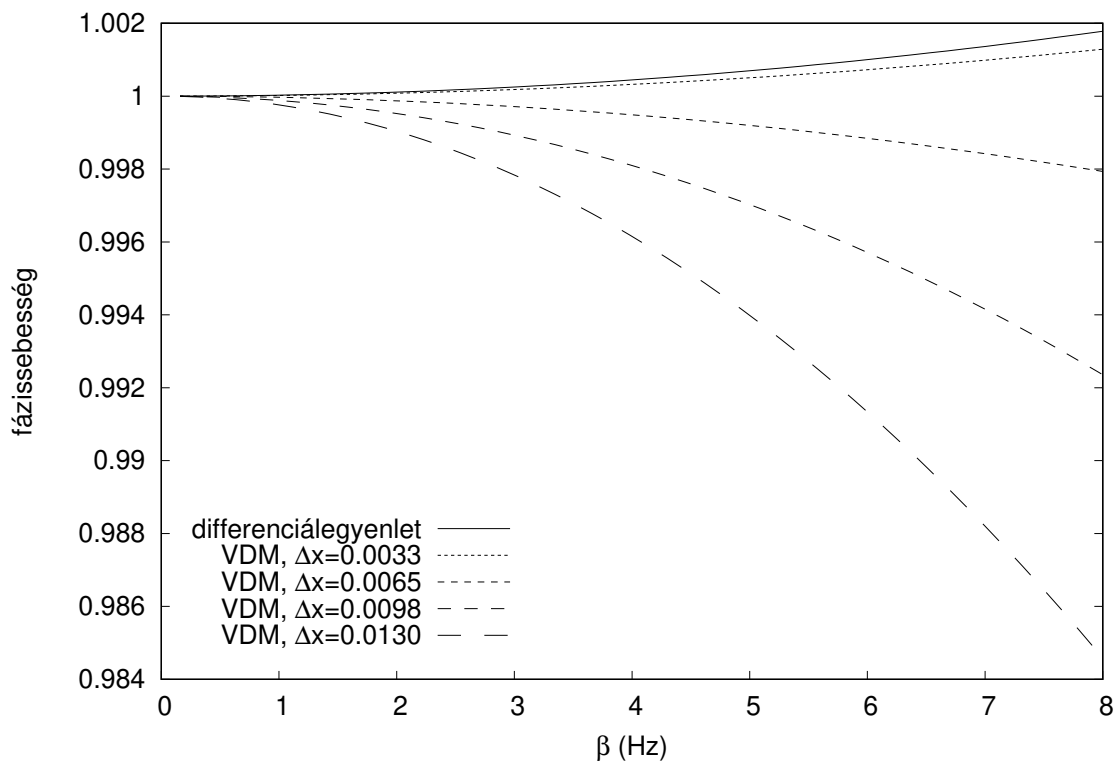
Ezt a tesztfüggvényt kell (2.10)-be behelyettesíteni. A keletkező egyenlet azonban rendkívül bonyolult, az ω -t nem tudtam explicit formában kifejezni. Azonban, ha az egyenletből kihagyjuk a csillapításért felelős tagokat, egyszerűbb egyenletet kapunk, amiből már ki lehet fejezni az ω -t (további indok lehet a csillapítás kihagyására, hogy ez eredeti egyenletben a diszperziót a tipikus b_1 és b_2 értékek elhanyagolható mértékben befolyásolják):

$$\omega = \pm \frac{\arccos(2K_0 \cos(2\beta \Delta x) + 2K_1 \cos(\beta \Delta x) + 0.5K_2)}{\Delta t}.$$

A diszperzió megtekinthető a 2.7 ábrán. A függőleges tengelyt normalizáltam a diszperzió nélküli jel (ideális húr) fázissebességére. Az ábrán jól látható, hogy a differenciálegyenlet fázissebesség görbéje egy monoton növekvő görbe. Ugyanakkor a véges differencia módszer megoldása ezt a görbét „elgörbíti”, és egy bizonyos frekvencia felett a görbe monoton csökkenésbe kezd. Az ábrán megtekinthető az ideális húr VDM-es fázissebessége is, amin jól látszik, hogy a konstans érték helyett lassan csökken a frekvencia növelésével. Az ábra elkészítéséhez a következő paramétereket használtam: $T = 92.819$, $\mu = 0.008$, $EI = 0.000131$, $\Delta t = 1/44100$, $\Delta x = 0.0033$. Az ábrából azt tudjuk leolvasni, hogy a numerikus diszperzió nem befolyásolja jelentős mértékben a szimuláció eredményét: a különbség csak olyan β értékekre válik számottevővé, amihez tartozó harmonikusok amplitúdója már viszonylag kicsi. A numerikus diszperzió azonban okozhat nagyobb különbségeket is, ugyanis a mértéke függ a paramétereiktől. Például, ha a Δx -et növeljük, akkor a numerikus diszperzió mértéke is nő. Ez megtekinthető a 2.8 ábrán. Látható, hogyha Δx -et a duplájára növeljük, az már sokat növel a numerikus diszperziót. Ahhoz, hogy a numerikus diszperzió hatását minimalizáljuk, érdemes olyan Δt , Δx paramétereket használni, hogy a rendszer a stabilitás határhelyzetéhez a legközelebb legyen [7].



2.7. ábra. Diszperzió



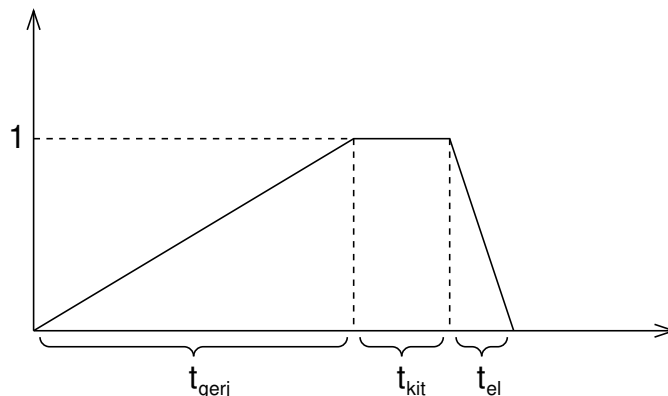
2.8. ábra. Numerikus diszperzió hatása különböző Δx -ekre

2.8. A pengetés modellezése

A húrokat a játékos pengetéssel gerjeszti. A pengetés módja sokféleképpen befolyásolja a kiadott hangot. A húrokat lehet pengetővel, körömmel vagy ujjbeggyel pengetni. A pengetés helye nagyban befolyásolja a gitár hangját: minél közelebb pengeti meg a játékos a húrokat a húrláboz, a kiadott hang annál élesebb lesz, mivel a gerjesztésben a felharmonikusok nagyobb amplitúdóval lesznek jelen. A pengetés erejével lehet szabályozni a kiadott hang nagyságát. A gitáros a pengetés szögét is változtathatja, ami különböző módon gerjeszti a gitár testét [5], ezáltal a kiadott hang karaktere is más lehet. A pengetés közben a játékos tompíthatja a húrt a pengető kéz hüvelykujjával, amivel mesterséges üveghangot tud előidézni. Továbbá a húr elengedésének módja is befolyásolja a kiadott hangot. Látható, hogy a gerjesztés egy bonyolult folyamat, pontos leírása jelenleg is kutatás tárgya [11, 20]. Ezért csak egy egyszerűbb modellt készítettem, amivel a fent felsorolt jelenségek többé-kevésbé modellezhetőek.

A pengetés modelljének a paraméterei a következők: k és j a pengetés helyét határozza meg: a k és j indexű pontok között fog a pengetés hatni a húrokra. Ezen paraméterek állításával lehetőség van a pengetést közelebb/távolabb vinni a húrlábtól, illetve meghatározni a pengetés szélességét: szélesebb pengetés jellemezhet egy ujjbeggyel való gerjesztést, míg pengetővel a pengetés csak pár mm-en keresztül interaktálódik a húrral. Az A paraméterrel lehet szabályozni a pengetés erősségét. A B paraméter felel a pengetés közben fellépő húr csillapításért: pl. egy hosszabban tartó ujjbeggyel való pengetés a pengetés időtartama alatt csillapítja a húrt. A pengetés időbeli lefolyását lehet szabályozni a következő három időparaméterrel: gerjesztési fázis (t_{gerj} ideig tart), kitartási fázis (t_{kit} ideig tart) és elengedési fázis (t_{el} ideig tart). A tipikus t paraméterek mellett a kiadott hang jellegét leginkább a t_{el} határozza meg: minél rövidebb az elengedési fázis, annál élesebb lesz a hang. Ez a három időparaméter definiálja az $a(t)$ segédfüggvényt (2.9 ábra), ami a későbbiekben hasznos lesz:

$$a(t) = \begin{cases} \frac{t}{t_{gerj}} & \text{ha } t < t_{gerj} \\ 1 & \text{ha } t < t_{gerj} + t_{kit} \\ \frac{(t_{gerj} + t_{kit} + t_{el} - t)}{t_{el}} & \text{ha } t < t_{gerj} + t_{kit} + t_{el} \end{cases}$$



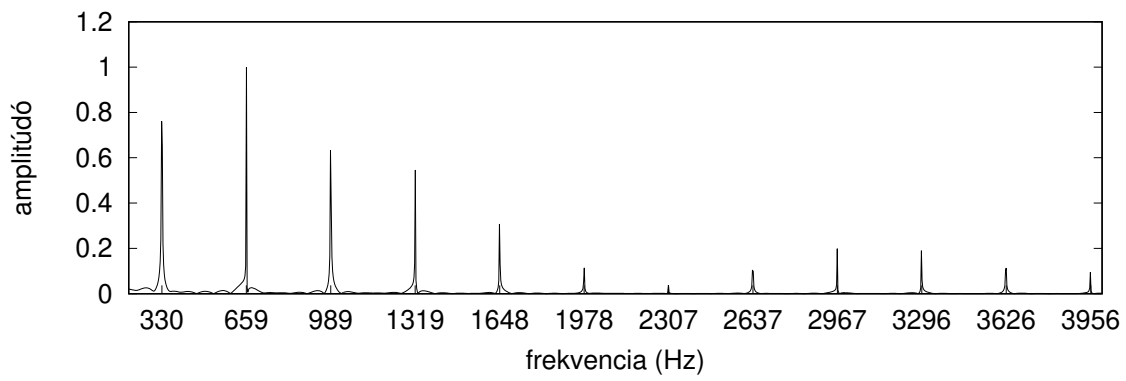
2.9. ábra. $a(t)$ segédfüggvény

A pengetés lefolyása: a pengetés a húr egy adott szakaszára (k és j pontok között) fejt ki erőt: $F_{[k;j]}(t) = Aa(t)$, Z irányban. A pengetés időtartama alatt (2.9)-ben b_1 értéke módosul az $x_{[k;j]}$ helyeken, $b_1 = Ba(t)$ -re a pengetés közben fellépő csillapítás miatt.

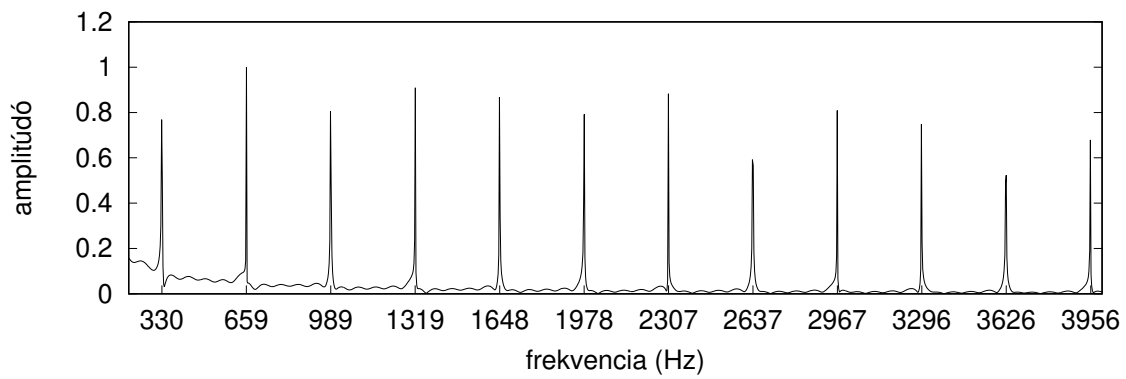
A paraméterek állításának hatását megvizsgálhatjuk a húr kitérésének spektrumán (a következő szimulációk a kitérés a húrlábhoz legközelebbi ponton mérik). Egy tipikus pengetés (a húrlábtól 10 cm-re, az erő egy pontra hat, $t_{gerj} = 8$ ms, $t_{kit} = 5$ ms, $t_{el} = 0.2$ ms) spektruma látható a 2.10 ábrán. Ha a pengetés közelebb történik a húrlábhoz (1 cm), akkor a 2.11 ábrán látható eredményt kapjuk. Jól látható, hogy a felharmonikusok nagyobb amplitúdójúak, mint a tipikus pengetés esetében. Ha tipikus pengetést t_{el} értékét 2 ms-re módosítjuk, akkor a 2.12 ábrán látható eredményt kapjuk. Megfigyelhető, hogy a felharmonikusok jóval kisebb amplitúdóval vannak jelen. A 2.13 ábrán egy „széles” pengetésnek (3 cm széles pengető) az eredménye található: a spektrum alig változott a 2.10 ábrához képest, azaz ennek paraméternek az ilyen mértékű megváltoztatása kevésbé befolyásolja a hangot.

2.9. Húr és érintő ütközése

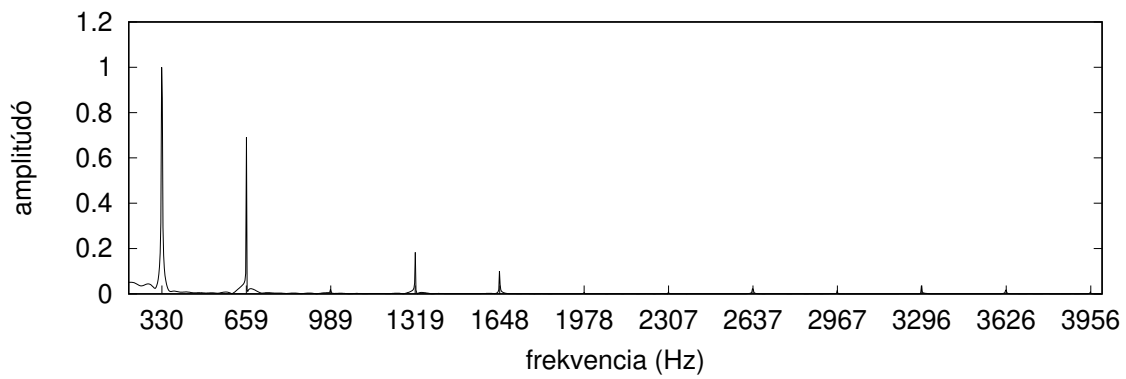
A gitáron a hurok közel vannak az érintőkhöz (pár mm a távolság), emiatt többféle játéktechnika alkalmazásánál összeütközhetnek az érintőkkel: a húr lefogásánál, ill.



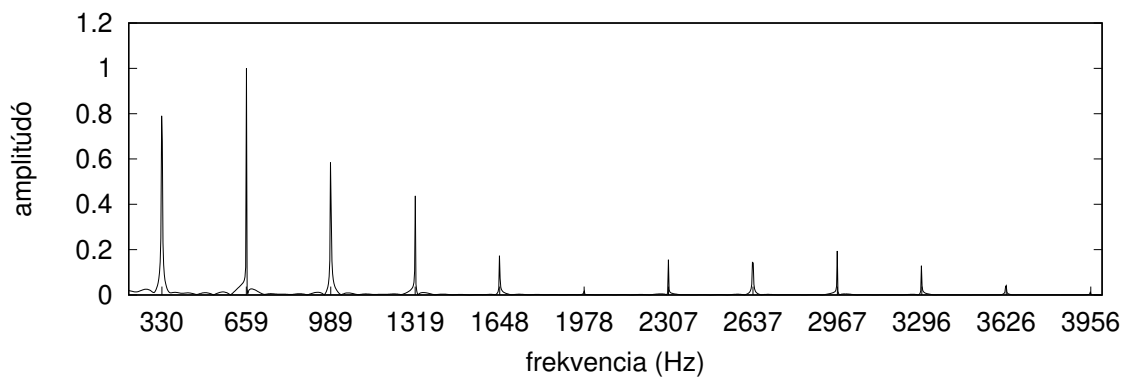
2.10. ábra. Tipikus pengetés spektruma



2.11. ábra. A húrlábhoz közeli pengetés spektruma



2.12. ábra. Lassú elengedésű pengetés spektruma



2.13. ábra. Széles tárgyval való pengetés spektruma

a gitáros szándékosan is hozzácsaphatja a húrt/húrokat az érintőkhöz lefogás nélkül is (ezt a technikát gyakrabban használják basszusgitáron, *slapping* az angol neve). Ahhoz, hogy ezeket a technikákat modellezhessük, kezelni kell a húr-érintő ütközését.

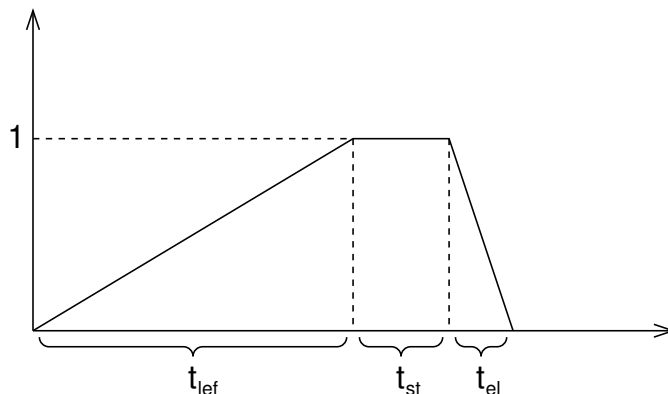
A modellben ütközés akkor következik be, amikor egy érintő felett rezgő pont y_i^m koordinátája kisebb lesz, mint a hozzá tartozó érintő magassága (f). Az ütközést rugalmatlan ütközésnek kezeltem. Az ütközéskor súrlódás (súrlódási együttható: μ) hat a húrra, a Z irányú rezgése miatt. Ez a súrlódás az érintő feletti pontnak a rezgését csökkenti, majd meg is állítja. Az ütközés kezelése a következő pontokban foglalható össze:

- y_i^m -t vissza kell mozgatni f -be (rugalmatlan ütközés), a mozgatás nagysága $\Delta y = f - y_i^m$
- ha $\Delta y > \mu(z_i^m - z_i^{m-1})$, akkor a súrlódás csak lassítja a húrt Z irányban, tehát z_i^m -et csökkenteni kell (a húr mozgásának irányával ellentétesen) $\mu(z_i^m - z_i^{m-1})$ -vel
- ha $\Delta y \leq \mu(z_i^m - z_i^{m-1})$, akkor a súrlódás nem engedi elmozdulni a húrt Z irányban, tehát z_i^m -et vissza kell mozgatni z_i^{m-1} -be

2.10. Lefogás és felengedés modellezése

A gitáron az egyik legalapvetőbb játéktechnika a lefogás. Ez azt jelenti, hogy a gitáros a húrt ujjbeggyel a fogólaphoz szorítja az egyik érintő mögött. Ezáltal súrlódás keletkezik a húr és az érintő között, ami a húr mozgását lassítja, majd végül megállítja az érintőn (ha a játékos kellő erővel szorítja a húrt a fogólaphoz). Ettől a ponttól kezdve az érintő átveszi a felső nyereg szerepét és a húrnak egy rövidebb szakasza rezeg tovább, a hangmagasság megemelkedik. Majd némi idő múlva a játékos a húrt felengedheti, így a húr ismét teljes hosszában rezeghet. Legyen az $a(t)$ segédfüggvény a következő (2.14 ábra):

$$a(t) = \begin{cases} \frac{t}{t_{lef}} & \text{ha } t < t_{lef} \\ 1 & \text{ha } t < t_{lef} + t_{st} \\ \frac{(t_{lef} + t_{st} + t_{el} - t)}{t_{el}} & \text{ha } t < t_{lef} + t_{st} + t_{el} \end{cases}$$



2.14. ábra. $a(t)$ segédfüggvény

t_{lef} az az időtartam, ami alatt a játékos lefogja a húrt, t_{st} ideig lefogva tartja, majd pedig t_{el} idő alatt elengedi. Az ujj a húr egy adott pontjára (y_i) fejt ki erőt ($F_i(t) = Aa(t)$), Y irányban, továbbá megváltoztatja b_1 értékét a lefogás helyén, hasonlóan a pengetéshez (2.8 fejezet).

Több játéktechnika is kapcsolódik a lefogáshoz ill. felengedéshez: kalapács (*hammer-on*), lehúzás (*pull-off*) és csúsztatás (*slide*). A kalapács technika a következőt jelenti: a húrt egy erőteljesebb, hirtelen mozdulattal fogjuk le. Eztáltal a húr pengetés nélkül is kap egy impulzust az érintővel való összeütközés miatt, a játékosnak már nem kell megpengetnie a húrt lefogás után. Ezt a technikát modellezhetjük egy nagyobb A értékű, és kis t_{lef} értékű lefogással. A lehúzás technika a kalapács „ellentettje”: egy lefogott húrt úgy engedünk fel, hogy közben a felengedő ujj egy impulzust ad neki. Ezt a technikát modellezhetjük a felengedés helyén egy kisebb pengetéssel, a felengedéssel egyidőben indítva. A csúsztatás technika azt jelenti, hogy egy lefogott húron a lefogás helyét a játékos elcsúsztatja felengedés nélkül, hogy egy másik érintő legyen a húr rezgő végződése. Ezt a technikát megvalósíthatjuk a lefogás erőhatásának elmozgatásával. Az erő áttevését az egyik pontról a másikra interpolálva kell elvégezni (ellenkező esetben hallani lehet, mikor az erőhatás „átvált” az egyik pontról a másikra)

2.11. Tompítás és üveghang modellezése

A gitáros a húrokat nem csak gerjeszteni tudja, hanem a rezgésüket csillapítani is. A csillapítást egyszerűen modellezhetjük: az alkalmazott technikától függően a húr érintett pontjainak a b_1 értékét növelni kell arra az időtartamra, amíg a technika tart. Két fő játéktechnika kapcsolódik a csillapításhoz: tompítás és természetes üveghang⁹. A tompítás a leggyakoribb csillapítási technika: a gitáros finoman hozzáér húrhoz, így csillapítva annak rezgését. A csillapítás általában a húr legalább 1 cm széles tartományán történik, a technikától függően változó helyen és erővel (de azért figyelve arra, hogy ne üveghang keletkezzen). A csillapítás többféle módon történhet: a pengető kéz ujjjaival/tenyerével vagy a lefogó kéz ujjjaival. Például alkalmazhatjuk ezt a technikát közvetlenül pengetés után, így adva a gitárjáték-nak szaggatott (*staccato*) jelleget. Egy másik csillapítással kapcsolatos technika a *palm-mute*, ahol a pengetés ideje alatt a pengető kéz tenyere csillapítja a rezgést.

A természetes üveghang a következőt jelenti: a gitáros az ujját finoman egy állóhullám csomópontja helyezi. Ennek hatására minden olyan módusnak megszűnik a rezgése, aminek az adott helyen nincs csomópontja. Például, ha a húr felénél alkalmazzuk a technikát, akkor minden olyan rezgést megszüntetünk, aminek nincs csomópontja a húr felénél: az alapharmonikus rezgése megszűnik, az első felharmonikus tovább rezeghet, de a második felharmonikus rezgése szintén megszűnik, stb. Mivel a hangból hiányoznak a megszokott harmonikusok, a hangnak „üveghang” jellege lesz. Ennél a technikánál elegendő csak egy pontra csillapítást adni.

⁹létezik mesterséges üveghang technika is, amit főleg elektromos gitáron használnak, torzított hanggal. Ez akusztikus gitáron kevésbé releváns

3. fejezet

Fedlapmodell

3.1. Modellezési módszerek

A gitár fedlapja vékony lemeznek tekinthető. A lemezek mozgásának leírására többféle elmélet létezik, ezek a modellezett jelenségekben különböznek. Az egyik legegyszerűbb lemezelmélet a Kirchhoff-Love-féle elmélet. Ezt olyan vékony lemezek modellezésére lehet használni, ahol a lemez deformációja kicsi. Mivel ez a gitár fedlapjára igaz, jól leírható ennek az elméletnek a segítségével [18]. Az elmélet központi eleme egy differenciálegyenlet, amit többféle módszerrel oldhatunk meg: végeselem módszerrel, határelem módszerrel vagy véges differenciák módszerével. A véges- és határelem módszer meglehetősen bonyolult, ezért a véges differenciák módszerét választottam. A lemezegyenletet igyekeztem általánosan megoldani, hogy ne csak gitártest alakú fedlapot tudjak vele modellezni. A peremfeltételeket is teljesen szabadon állíthatóan kezelem, nem csak a gitárra jellemző módon lehet őket beállítani.

3.2. A lemez differenciálegyenlete

Az izotróp¹ Kirchhoff-Love-féle lemezre felírhatóak a következő összefüggések [12]:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{pmatrix} &= -z \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} &= \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} z dz \end{pmatrix}, \\ h\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + F_k, \end{aligned} \quad (3.1)$$

ahol w a lemez kitérése, ϵ a fajlagos nyúlás, σ a mechanikai feszültség, E Young-modulus, ν a Poisson-tényező, M_x és M_y hajlító nyomaték (Nm), M_{xy} csavaró nyomaték (Nm), h a lemez vastagsága (m), ρ a lemez sűrűsége (kg/m³), x , y , z térbeli koordináták (x és y a lemez síkjában, z a lemezre merőleges) és F_k a külső erőhatások. Az egyenletben minden változó x , y és t függvénye.

A fedlap azonban nem tekinthető izotróp lemeznek, mivel tulajdonságai a lemez síkjában két merőleges irányban különböznek² [18]. Ezt úgy kezelhetjük, hogy a (3.1) egyenletben szereplő E és ν konstansok helyett négy E_i konstanst használunk [13]:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & E_2/2 & 0 \\ E_2/2 & E_3 & 0 \\ 0 & 0 & E_4/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

A differenciálegyenlet megoldásához szükségünk van peremfeltételekre. A lemezelmélet háromféle peremfeltételt tartalmaz (a feltételeket az x tengellyel párhuzamos

¹térbeli iránytól független mechanikai tulajdonságú

²az ilyen típusú lemezt hívjuk ortotróp lemeznek

esetre írom le, a y -nal párhuzamos eset egyszerű változócserével származtatható):

- befogott perem (*clamped*):

$$w = 0 \quad \text{és} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0,$$

- csuklós támasz (*simply supported*):

$$w = 0 \quad \text{és} \quad M_y = 0,$$

- szabad perem (*free*):

$$M_y = 0 \quad \text{és} \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = 0. \quad (3.3)$$

Ha két szabad peremű él találkozik egy külső sarokpontban³, akkor még a következő is igaz [15]:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0. \quad (3.4)$$

Az eddig leírt differenciálegyenletet tovább kell finomítani, hogy modellezni tudjuk vele a csillapításokat. Ezek kezelésében [13]-at követtem. A fedlapra kétféle csillapítás hat: a közeg miatti, és az anyag belső súrlódása miatti csillapítás. A közeg miatti csillapítást a húrhoz hasonlóan egy $R_f \partial w / \partial t$ taggal (ahol R_f a csillapítási tényező) oldottam meg:

$$h\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} - R_f h \rho \frac{\partial w}{\partial t} + F_k. \quad (3.5)$$

Az anyag belső súrlódása miatti csillapítást pedig úgy, hogy az ϵ és σ közötti egyszerű

³olyan pont, ahol a találkozó élek 90° szöveget zárnak be

lineáris összefüggést differenciálegyenletre cseréltem:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \sigma_{x1} + \sigma_{x2}, \\
\sigma_y &= \sigma_{y1} + \sigma_{y2}, \\
\sigma_{x1} + q_{11} \frac{\partial \sigma_{x1}}{\partial t} + q_{12} \frac{\partial^2 \sigma_{x1}}{\partial t^2} &= E_1 \left(\epsilon_x + p_{11} \frac{\partial \epsilon_x}{\partial t} + p_{12} \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial t^2} \right), \\
\sigma_{x2} &= \frac{E_2}{2} \epsilon_y, \\
\sigma_{y1} + q_{31} \frac{\partial \sigma_{y1}}{\partial t} + q_{32} \frac{\partial^2 \sigma_{y1}}{\partial t^2} &= E_3 \left(\epsilon_y + p_{31} \frac{\partial \epsilon_y}{\partial t} + p_{32} \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial t^2} \right), \\
\sigma_{y2} &= \frac{E_2}{2} \epsilon_x, \\
\sigma_{xy} + q_{41} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t} + q_{42} \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial t^2} &= \frac{E_4}{2} \left(\epsilon_{xy} + p_{41} \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial t} + p_{42} \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial t^2} \right),
\end{aligned}$$

ahol p és q [14]-ban mérésrel meghatározott konstansok. Ahhoz, hogy megkapjuk az összefüggést a kitérés és a nyomatékok között, σ_x , σ_y és σ_{xy} egyenletét szorozzuk meg z -vel, majd integráljuk z szerint $-h/2$ és $h/2$ között (itt felhasználjuk, hogy $M = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma z dz$ [12]):

$$\begin{aligned}
M_x &= M_{x1} + M_{x2}, \\
M_y &= M_{y1} + M_{y2}, \\
M_{x1} + q_{11} \frac{\partial M_{x1}}{\partial t} + q_{12} \frac{\partial^2 M_{x1}}{\partial t^2} &= -\frac{h^3 E_1}{12} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + p_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2} + p_{12} \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} \right), \\
M_{x2} &= -\frac{h^3 E_2}{24} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\
M_{y1} + q_{31} \frac{\partial M_{y1}}{\partial t} + q_{32} \frac{\partial^2 M_{y1}}{\partial t^2} &= -\frac{h^3 E_3}{12} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + p_{31} \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial y^2} + p_{32} \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial y^2} \right), \\
M_{y2} &= -\frac{h^3 E_2}{24} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\
M_{xy} + q_{41} \frac{\partial M_{xy}}{\partial t} + q_{42} \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial t^2} &= -\frac{h^3 E_4}{24} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + p_{41} \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x \partial y} + p_{42} \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x \partial y} \right),
\end{aligned} \tag{3.6}$$

így (3.5)-tel együtt megkapjuk a lemez teljes egyenletét, amivel modellezni tudjuk a fedlapot.

Szükséges még a E_i -t, p_{ij} -t és q_{ij} -t megfeleltetni a [14]-ben lévő konstansoknak, hogy az ott mért értékeket felhasználhassuk. Az E_i értéke:

$$E_i = 12D_i.$$

A p_{ij} és q_{ij} meghatározásánál a következőből lehet kiindulni: fel kell írni (3.6) egy-egy tagjára az átviteli függvényt, és egyenlővé kell tenni [14]-ban közölt eredménnyel (s_{ij} és R_{ij} mérés által ismertek):

$$\frac{p_{i2}s^2 + p_{i1}s + 1}{q_{i2}s^2 + q_{i1}s + 1} = 1 + \frac{sR_{i1}}{s + s_{i1}} + \frac{sR_{i2}}{s + s_{i2}} \quad i = \{1, 3, 4\}$$

Ebből a következő összefüggések adódnak:

$$\begin{aligned} p_{i1} &= \frac{s_1 + s_2 + s_2R_1 + s_1R_2}{s_1s_2}, \\ p_{i2} &= \frac{1 + R_1 + R_2}{s_1s_2}, \\ q_{i1} &= \frac{s_1 + s_2}{s_1s_2}, \\ q_{i2} &= \frac{1}{s_1s_2}. \end{aligned}$$

3.3. A differenciálegyenlet numerikus megoldása

Hasonlóan a húr differenciálegyenletéhez, a lemez differenciálegyenletét is véges differenciák módszerével (VDM) oldottam meg. Itt a megoldási tartomány a kétdimenziós sík, ezt diszkrétizáljuk kétdimenziós négyzethálóra:

$$w^{i,j,m} = w(i\Delta s, j\Delta s, m\Delta t),$$

ahol i, j a rácspont koordinátája, m az időpont, Δs és Δt pedig a térbeli és időbeli diszkrétizálás nagysága. A deriváltakat a következő módon közelítem:

- az időbeli deriváltakat retrográd differenciával (*backward difference*). Ezt amiatt választottam, hogy a keletkező egyenletet explicit Euler módszerrel meg lehessen oldani.
- az egy térváltozóban elsőrendű deriváltakat (pl. $\partial^2 w / \partial x \partial y$) centrális differenciával (*central difference*) (a kiszámolt érték fél rácsponttal el lesz tolva)
- a térváltozóban másodrendű deriváltakat (pl. $\partial^2 w / \partial x^2$) centrális differenciával

A közelítések segítségével megkapjuk a lemezegyenlet diszkretizált változatát:

A deriváltak értékei:

$$\begin{aligned}
d_x^{i,j,m} &= \frac{w^{i-1,j,m} - 2w^{i,j,m} + w^{i+1,j,m}}{\Delta s^2}, \\
d_y^{i,j,m} &= \frac{w^{i,j-1,m} - 2w^{i,j,m} + w^{i,j+1,m}}{\Delta s^2}, \\
d_{xy}^{i+0.5,j+0.5,m} &= \frac{(w^{i+1,j+1,m} - w^{i,j+1,m}) - (w^{i+1,j,m} - w^{i,j,m})}{\Delta s^2}.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

A nyomtatékok értékei:

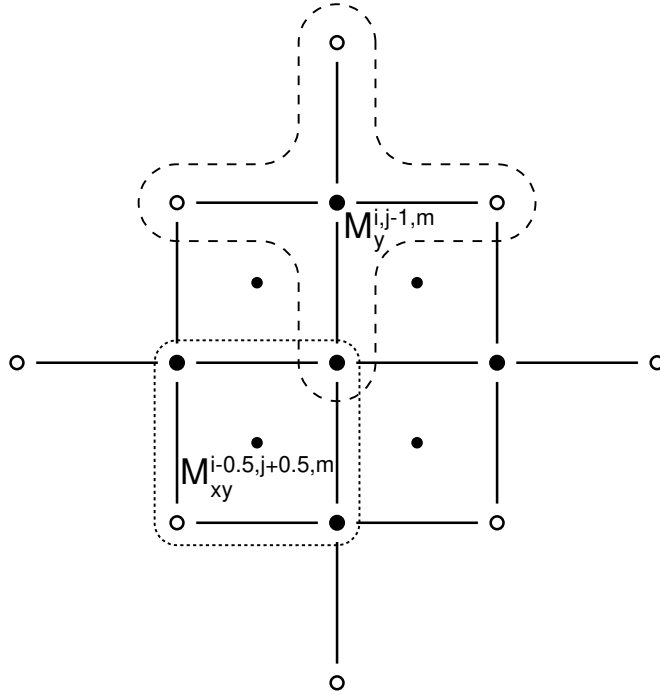
$$\begin{aligned}
M_{x1}^{i,j,m} &= -\frac{h^3 E_1 \Delta t^2 d_x^{i,j,m} + \Delta t p_{11} (d_x^{i,j,m} - d_x^{i,j,m-1}) + p_{12} (d_x^{i,j,m} - 2d_x^{i,j,m-1} + d_x^{i,j,m-2})}{\Delta t^2 + \Delta t q_{11} + q_{12}} \\
&\quad + \frac{\Delta t q_{11} M_{x1}^{i,j,m-1} + q_{12} (2M_{x1}^{i,j,m-1} - M_{x1}^{i,j,m-2})}{\Delta t^2 + \Delta t q_{11} + q_{12}}, \\
M_{x2}^{i,j,m} &= -\frac{h^3 E_2}{24} d_y^{i,j,m}, \\
M_{y1}^{i,j,m} &= -\frac{h^3 E_3 \Delta t^2 d_y^{i,j,m} + \Delta t p_{31} (d_y^{i,j,m} - d_y^{i,j,m-1}) + p_{32} (d_y^{i,j,m} - 2d_y^{i,j,m-1} + d_y^{i,j,m-2})}{\Delta t^2 + \Delta t q_{31} + q_{32}} \\
&\quad + \frac{\Delta t q_{31} M_{y1}^{i,j,m-1} + q_{32} (2M_{y1}^{i,j,m-1} - M_{y1}^{i,j,m-2})}{\Delta t^2 + \Delta t q_{31} + q_{32}}, \\
M_{y2}^{i,j,m} &= -\frac{h^3 E_2}{24} d_x^{i,j,m},
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
M_{xy}^{i+0.5,j+0.5,m} &= -\frac{h^3 E_4 \Delta t^2 d_{xy}^{i+0.5,j+0.5,m} + \Delta t p_{41} (d_{xy}^{i+0.5,j+0.5,m} - d_{xy}^{i+0.5,j+0.5,m-1})}{24 \Delta t^2 + \Delta t q_{41} + q_{42}} \\
&= -\frac{h^3 E_4 p_{42} (d_{xy}^{i+0.5,j+0.5,m} - 2d_{xy}^{i+0.5,j+0.5,m-1} + d_{xy}^{i+0.5,j+0.5,m-2})}{24 \Delta t^2 + \Delta t q_{41} + q_{42}} \\
&\quad + \frac{\Delta t q_{41} M_{xy}^{i+0.5,j+0.5,m-1} + q_{42} (2M_{xy}^{i+0.5,j+0.5,m-1} - M_{xy}^{i+0.5,j+0.5,m-2})}{\Delta t^2 + \Delta t q_{41} + q_{42}}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Végül a nyomatékokból számítható w következő pillanatbeli értéke:

$$\begin{aligned}
w^{i,j,m+1} &= \frac{\Delta t^2 (M_{x1}^{i-1,j,m} + M_{x2}^{i-1,j,m} - 2(M_{x1}^{i,j,m} + M_{x2}^{i,j,m}) + M_{x1}^{i+1,j,m} + M_{x2}^{i+1,j,m})}{\Delta s^2 h \rho} \\
&\quad + \frac{\Delta t^2 (M_{y1}^{i,j-1,m} + M_{y2}^{i,j-1,m} - 2(M_{y1}^{i,j,m} + M_{y2}^{i,j,m}) + M_{y1}^{i,j+1,m} + M_{y2}^{i,j+1,m})}{\Delta s^2 h \rho} \\
&\quad + 2 \frac{\Delta t^2 (M_{xy}^{i+0.5,j+0.5,m} - M_{xy}^{i-0.5,j+0.5,m} - M_{xy}^{i+0.5,j-0.5,m} + M_{xy}^{i-0.5,j-0.5,m})}{\Delta s^2 h \rho} \\
&\quad - \Delta t R_f (w^{i,j,m} - w^{i,j,m-1}) + 2w^{i,j,m} - 2w^{i,j,m-1} + \frac{\Delta t^2 F_k^{i,j,m}}{\Delta s^2 h \rho}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

A módszer stabilitását nem vizsgáltam, a meglehetősen bonyolult számítás megtalálható [14]-ben. A 3.1 ábrán látható, hogy egy pont számításához a tőle két rácspont távolságra lévő pontok szükségesek: a középpontban található pont számításához a tele körökben kell számítani a hajlító (nagyobb tele kör) és csavaró (kisebb tele kör) nyomatékokat, ezen nyomatékok számításához pedig a bekeretezett pontok szükségesek (az ábra csak 2 nyomatékhoz tartozó ponthalmazt jelöl meg). A tartomány szélén lévő rácspontok esetében a számításhoz szükséges pontok egy része nem része a térbeli tartománynak, ezek esetében a számítást a peremfeltételek segítségével tudjuk elvégezni. Mivel előfordulhat, hogy egy rácspontnak több peremfeltétele van különböző irányokban (például egy sarokban lévő pont az egyik irányban befogott perem, a másik irányban pedig szabad peremfeltételű), a peremfeltételt nem magához a rácsponthoz rendeltem, hanem a (rácspont, irány) párhoz (ahol az irány négyféle lehet: bal, jobb, fel és le). A következő alfejezetekben áttekintem a peremfeltételek kezelését. Azt az esetet írom le, amikor a perem párhuzamos az x tengellyel (az y tengellyel párhuzamos eset változócsereivel származtatható).

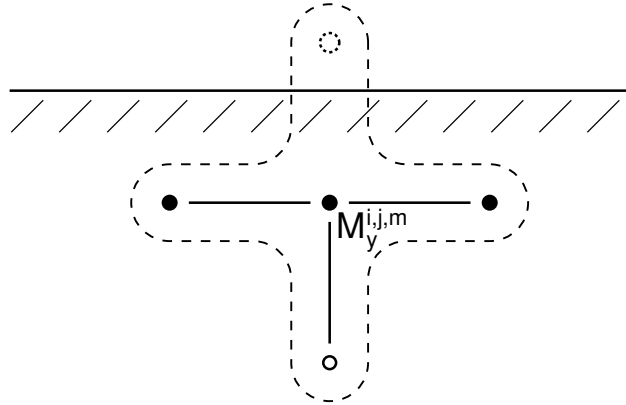


3.1. ábra. Egy rácspont számításához szükséges környezet

3.3.1. Befogott perem kezelése

Ha egy rácspontnak van befogott peremű peremfeltétele, akkor az nem mozdulhat el a helyéről a $w = 0$ peremfeltétel miatt. Ugyanakkor a rácspontban szükséges M_x és M_y számítása, hiszen a szomszédos rácspontokban ezekre az értékekre szükség lehet. Ennek egy példája megtekinthető a 3.2 ábrán. A tele körrel jelzett pontok befogott pereműek felfelé. Az üres körrel jelölt pont ($w^{i,j+1,m}$) számításához szükséges az $M_y^{i,j,m}$, amihez számolni kell $d_x^{i,j,m}$ -et és $d_y^{i,j,m}$ -et. $d_x^{i,j,m}$ -et számolhatjuk (3.7) alapján közvetlenül (vagy ha balra vagy jobbra is perem van, akkor a vonatkozó peremfeltétel alapján), viszont $d_y^{i,j,m}$ számításához először w -t számolnunk kell a szaggatott pontban ($w^{i,j-1,m}$). Ehhez a befogott peremre igaz $\partial w / \partial y = 0$ peremfeltétel nyújt segítséget. Írjuk fel az (i, j) pontra $\partial w / \partial y$ közelítését centrálisan:

$$\frac{w^{i,j+1,m} - w^{i,j-1,m}}{2\Delta s} = 0.$$



3.2. ábra. Befogott perem

Ebből számolható a szaggatott körnél w értéke:

$$w^{i,j-1,m} = w^{i,j+1,m},$$

amiből már $d_y^{i,j,m}$ számolható (3.7) alapján.

3.3.2. Csuklós támasz perem kezelése

A csuklós támasz peremfeltételnél az alaphelyet ugyanaz, mint a befogott peremnél: ha egy rácspontnak van csuklós támasz peremű peremfeltétele, akkor az nem mozdulhat el a helyéről a $w = 0$ peremfeltétel miatt, viszont továbbra is szükséges M_x és M_y számítása. Mivel a peremfeltételből $M_y = 0$, csak M_x -et kell számolni, amihez szükséges $d_x^{i,j,m}$ és $d_y^{i,j,m}$ meghatározása. Először nézzük azt az esetet, hogy balra és jobbra nincs perem, vagy befogott perem van. Ekkor $d_x^{i,j,m}$ -t számolhatjuk (3.7) vagy a 3.3.1 fejezet alapján, viszont $d_y^{i,j,m}$ -t (és ezáltal $w^{i,j-1,m}$ -t) az $M_y = 0$ peremfeltételből kell számolnunk. Ha egyenlővé tesszük (3.8)-ban $(M_{y1} + M_{y2})$ -t nullával, és

kifejezzük belőle $d_y^{i,j,m}$ -t, a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} d_y^{i,j,m} &= \frac{-E_2 d_x^{i,j,m} (\Delta t^2 + \Delta t q_{31} + q_{32})}{2E_3 (\Delta t^2 + \Delta t p_{31} + p_{32})} \\ &+ \frac{\Delta t p_{31} d_y^{i,j,m-1} + p_{32} (2d_y^{i,j,m-1} - d_y^{i,j,m-2})}{\Delta t^2 + \Delta t p_{31} + p_{32}} \\ &+ 12 \frac{\Delta t q_{31} M_{y1}^{i,j,m-1} + q_{32} (2M_{y1}^{i,j,m-1} - M_{y1}^{i,j,m-2})}{h^3 E_3 (\Delta t^2 + \Delta t p_{31} + p_{32})}, \end{aligned}$$

amiből számolható M_x értéke. A $w^{i,j-1,m}$ értékét (3.7)-ből számolhatjuk:

$$w^{i,j-1,m} = d_y^{i,j,m} \Delta s^2 + 2w^{i,j,m} - w^{i,j+1,m}. \quad (3.11)$$

Abban az esetben, ha balra vagy jobbra is csuklós támasz perem van, a rácspontra igaz lesz, hogy $M_x = 0$ és $M_y = 0$, ami csak úgy lehetséges, hogyha $d_x = 0$ és $d_y = 0$, amiből (3.11) segítségével számolhatjuk $w^{i,j-1,m}$ -et.

3.3.3. Szabad perem kezelése

Mivel a szabad peremű rácspont első peremfeltétele megegyezik a csuklós támaszával ($M_y = 0$), az ott leírt módon számítható $w^{i,j-1,m}$ értéke. Ugyanakkor, mivel a szabad peremű rácspont elmozdulhat, $w^{i,j-1,m}$ mellett szükség van $M_y^{i,j-1,m}$ számítására is (hogy számíthassuk (3.10)-et az (i, j) pontban), amit (3.3) második peremfeltételének segítségével tehetünk meg. A diszkrétizált peremfeltétel a következő:

$$\frac{M_y^{i,j+1,m} - M_y^{i,j-1,m}}{2\Delta s} + 2 \frac{M_{xy}^{i-0.5,j+0.5,m} + M_{xy}^{i+0.5,j+0.5,m} - M_{xy}^{i-0.5,j-0.5,m} - M_{xy}^{i+0.5,j-0.5,m}}{2\Delta s} = 0. \quad (3.12)$$

A tagokat a A.2 fejezet alapján közelítettem, illetve használtam az

$$M_{xy}^{i,j+0.5,m} = \frac{M_{xy}^{i-0.5,j+0.5,m} + M_{xy}^{i+0.5,j+0.5,m}}{2}$$

közelítést. (3.12)-ből kifejezve $M_y^{i,j-1,m}$ -et a következőt kapjuk:

$$M_y^{i,j-1,m} = M_y^{i,j+1,m} + 2(M_{xy}^{i-0.5,j+0.5,m} + M_{xy}^{i+0.5,j+0.5,m} - M_{xy}^{i-0.5,j-0.5,m} - M_{xy}^{i+0.5,j-0.5,m}).$$

Ez pedig már számolható, mivel $M_y^{i,j+1,m}$ és $M_{xy}^{i\pm 0.5,j\pm 0.5,m}$ értékei meghatározhatóak (3.8) és (3.9) alapján.

Abban az esetben, ha jobbra vagy balra is szabad perem van, akkor a 3.3.2 fejezetben leírt megoldáson túl meg kell határozni $w^{i-1,j-1,m}$ értékét is (ha balra van a szabad perem. Ha jobbra, akkor $w^{i+1,j-1,m}$ értékét kell számolni), mivel szükséges az $M_{xy}^{i-0.5,j-0.5,m}$ számolásánál. Ehhez a (3.4) peremfeltétel diszkretizációját használhatjuk fel:

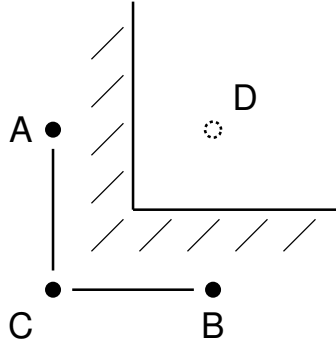
$$\frac{(w^{i+1,j+1,m} - w^{i-1,j+1,m}) - (w^{i+1,j-1,m} - w^{i-1,j-1,m})}{4\Delta s^2} = 0,$$

amiből kifejezve $w^{i-1,j-1,m}$ -et a következőt kapjuk:

$$w^{i-1,j-1,m} = w^{i-1,j+1,m} + w^{i+1,j-1,m} - w^{i+1,j+1,m}.$$

3.3.4. A konkáv sarokpont probléma

Az előző három alfejezetben egy lehetséges problémát nem vettem figyelembe: ha a térbeli tartomány tartalmaz a 3.3 ábrán látható részt. Ennél a helyzetnél a D pontban w értékét kétféleképpen számíthatjuk. Vagy az A pontból kiindulva jobb irányban, vagy a B pontból kiindulva felfelé. A w értéke itt ahhoz kell, hogy számítani lehessen a nyomatékok értékeit A -ban, B -ben és C -ben. A „logikus” feloldása a problémának, ha olyan w értékkel számolunk, ami éppen az adott nyomaték számításához kell. Tehát például, ha A -ban számoljuk M_x -et, akkor w értékét D -ben az A segítségével számítjuk ki. Hasonlóan, ha B -ben számoljuk M_y -t, akkor w értékét D -ben a B segítségével számoljuk. Viszont probléma van M_{xy} számításánál C -ben: ebben az esetben nincs „logikus” választás. Azt a megoldást választottam, hogy w értékét A -ból és B -ből is kiszámolom, és az átlagukkal számolom ki C -ben az M_{xy} -et. Azt szükséges kiemelni, hogy az itt leírt konkáv sarokpont kezelésnek nincs matematikai alapja, a megoldás a módszer instabilitását okozhatja. Azonban az ed-



3.3. ábra. Konkáv sarokpont

digi tapasztalat azt mutatja, hogy fedlapra alkalmazva a módszert nem jelentkezik probléma.

3.4. A szimuláció helyességének ellenőrzése

Mivel meglehetősen bonyolult az eddigiekben vázolt differenciálegyenlet megoldása, szükség van arra, hogy ellenőrizzem a szimuláció helyességét. Erre egy lehetséges módszer, hogy összevetem a szimulált lemez módusfrekvenciáit az irodalomban közölt értékekkel. Ehhez [15]-t használtam fel, amiben az analitikus és numerikus módszerrel kiszámolt adatokat $\nu = 0.3$ paraméterű izotróp lemezre közlik, ezért szükséges az E és ν paraméterrel megadott lemezt összeegyeztetni a jelen szimuláció $E_{1..4}$ paraméterrel megadott lemezével. A (3.1) és (3.2) egyenletek alapján a következő összefüggések adódnak:

$$E_1 = E_3 = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad E_2 = \frac{2E\nu}{1 - \nu^2}, \quad E_4 = \frac{2E(1 - \nu)}{1 - \nu^2}.$$

Az adatokat táblázatokban közlik, amikben λ értéke szerepel, amiből a következő képlettel lehet számolni az ω körfrekvenciát:

$$\omega = \frac{\lambda}{a^2 h} \sqrt{\frac{E}{12\rho(1 - \nu^2)}}. \quad (3.13)$$

Módus	VDM körfrekvencia	[15] körfrekvencia (Hz)
1	2340.87	2364.8
2	2753.00	2781.7
3	3506.80	3544.6
4	4614.21	4670.2
5	6063.27	6155.4

3.1. táblázat. Négyoldalt befogott peremű lemez

Módus	VDM körfrekvencia	[15] körfrekvencia (Hz)
1	1142.75	1144.87
2	1615.56	1618.62
3	2402.14	2408.18
4	3498.16	3513.58
5	4073.46	4105.76

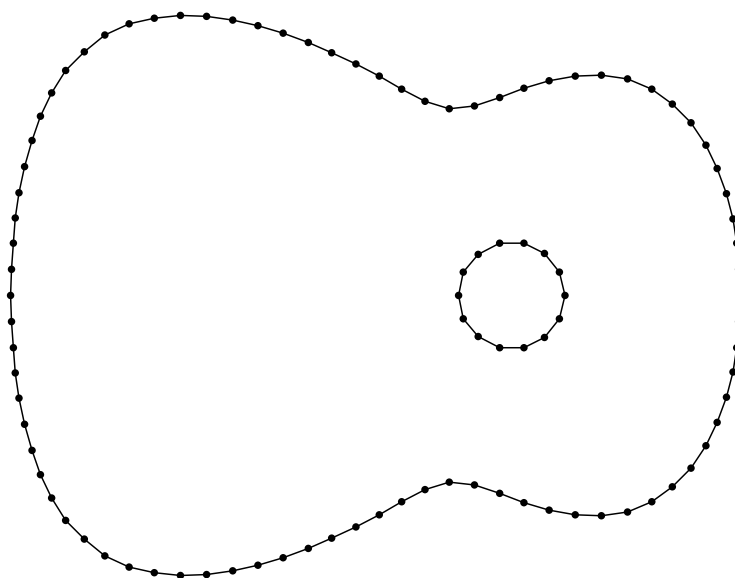
3.2. táblázat. Négyoldalt csuklós támasz peremű lemez

A képletben a a lemez egyik oldalának a hossza (a másik oldal hosszát a táblázat határozza meg, mivel a táblázat néhány fix oldalarányú lemez adatait tartalmazza).

A szimuláció paramétereinek a következőt választottam: $a = 0.1$ m, $b = 0.25$ m, $\rho = 1000$ kg/m³, $h = 0.001$ m, $E = 10.92$ GPa, $\nu = 0.3$, $\Delta s = 0.005$ m és $\Delta t = 1048576^{-1}$ s. Ezekkel a paraméterekkel (3.13) képlet egyszerűsödik: $\omega = 100\lambda$. A szimulált lemez módusfrekvenciáit a következő módon határoztam meg: a lemez w pontjait véletlenszerű számokra állítottam, majd futtattam a szimulációt 16 másodpercen keresztül, miközben a lemez egyik sarkához közel levő pont w értékeit gyűjtöttem. Ezeket az értékeket Fourier transzformáltam és kerestem az amplitúdó lokális maximum helyeit. Ez a módszer nem szolgáltatja a legpontosabb frekvencia értékeket, de a lemezszimuláció ellenőrzésére tökéletesen alkalmas. Az eredmények a 3.1-3.3 táblázatokban találhatóak. Látható, hogy a szimuláció jól működik, a frekvenciák a [15]-ben megadott értékek körül vannak. Az eltérést csökkenteni lehet, ha a szimulációt kisebb Δs -sel és Δt -vel futtatjuk.

Módus	VDM körfrekvencia	[15] körfrekvencia (Hz)
1	339.29	346.29
2	515.22	528.81
3	948.76	962.20
4	1105.84	1143.7
5	1853.53	1879.3

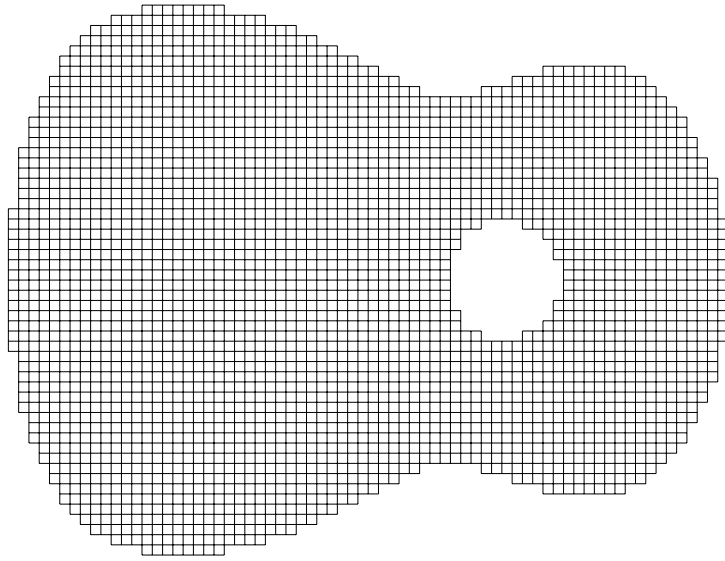
3.3. táblázat. Négyoldalt szabad peremű lemez



3.4. ábra. Fedlap körvonalának közelítése

3.5. VDM alkalmazása a fedlapra

Ahhoz, hogy a VDM-et alkalmazni tudjam a fedlapra, a térbeli tartományt fedlap alakúra kellett formálnom. Ehhez előállítottam a fedlap körvonalát (lefotóztam egy fedlapot, és rajzolóprogrammal körberajzoltam), amit törtvonalakkal közelítettem. A 3.4 ábrán látható az eredmény. A törtvonal minden szakaszának adtam egy jellemzőt: a peremfeltétel típusát. A körvonal segítségével el lehet dönteni, hogy egy adott rácspont része-e a fedlapnak. Ezt a tartalmazási kérdést egy egyszerű algoritmussal végezhetjük el: minden rácspontból kilövünk egy sugarat (a sugár iránya mindegy, tipikus a vízszintes sugár használata), és megnézzük, hogy hányszor metszi el a sugár a fedlap körvonalát. Ha a metszések száma páratlan szám, akkor a fedlap tartalmazza az adott pontot. Ezzel az algoritmussal a 3.5 ábrán szereplő rácshoz

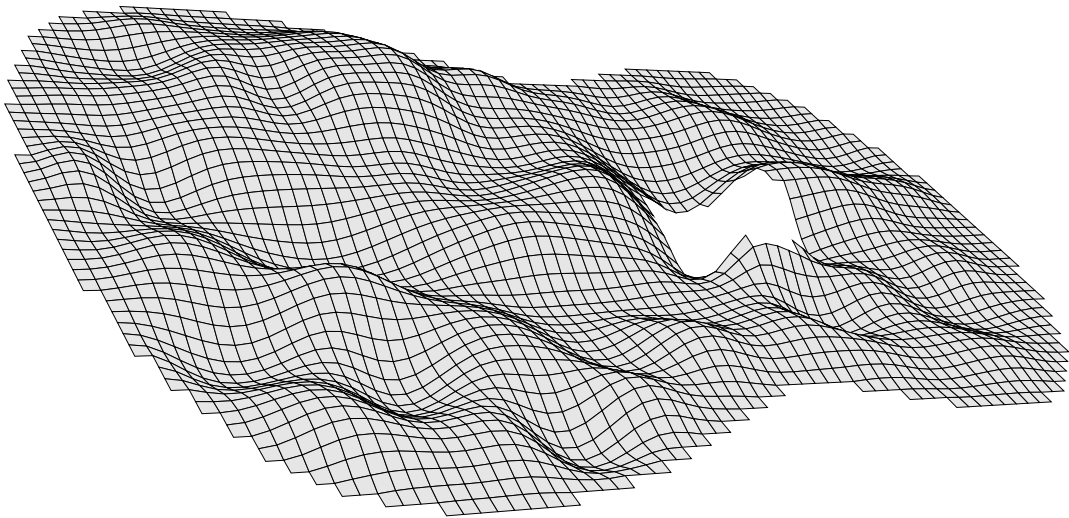


3.5. ábra. Fedlap alakú négyzetrács

juthatunk. Ha rácspont a fedlapon belülré esik, akkor további teszt szükséges: meg kell nézni, hogy a rácspont szomszédjai szintén belülré esnek-e. Ha igen, akkor a pont belső pont, nincs vele további teendő. Azonban ha valamelyik szomszédja külső pont, akkor az azt jelenti, hogy a pont a peremen van, meg kell állapítani rá a peremfeltételt a külső pont irányában. Ezt az információt a ponthoz legközelebb eső törtvonal szakasz szolgáltatja (mivel minden szakasz egy adott jellemzője, hogy milyen feltételű peremet határol).

Ezzel a megoldási tartományt fedlap alakúra formáltam, ezen ráccsal készült szimuláció eredménye tekinthető meg 3.6 ábrán: ez a fedlap állapotát ábrázolja, miután egy $e^{-\|c-p\|}$ jellegű jellel gerjesztettem (c a gerjesztés középpontja, p a rácspont koordinátája). Az ábra elkészítéséhez kétféle peremfeltételt használtam: a hanglyuknál szabad peremet, míg az oldallapnál befogott peremet, hasonlóan [18]-hoz.

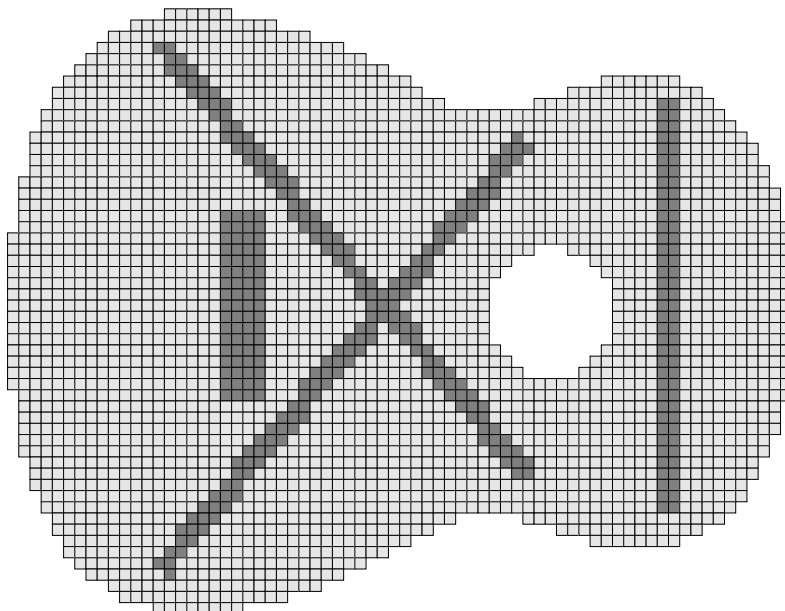
A fedlap modelljét tovább finomíthatjuk, ha figyelembe vesszük, hogy a húrláb és a gitár testében lévő erősítő bordázat inhomogénné teszi a fedlapot. Ezeket az elemeket modellezhetjük azzal, hogy a lemezegeyenletben helyfüggővé tesszük h -t, ρ -t és $E_{1..4}$ -t. Egy lehetséges paramétersor látható a 3.4 táblázatban [18], az elemek elhelyezkedése pedig a 3.7 ábrán (a baloldali sötét függőleges rácspontok a húrláb, a többi sötét rész pedig a bordázat).



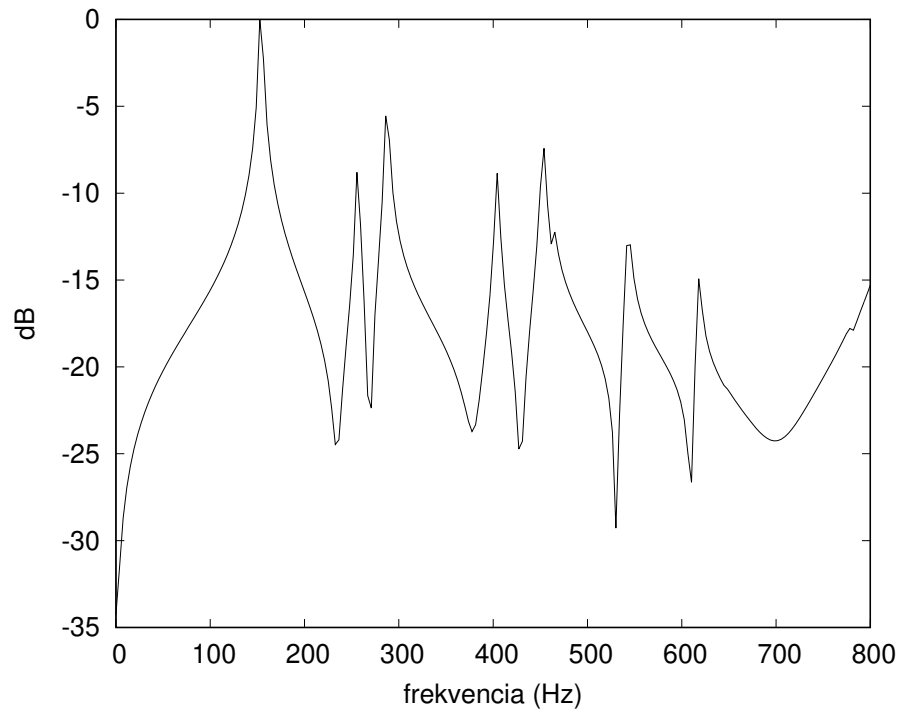
3.6. ábra. Fedlap hullámok gerjesztés után

	h (mm)	ρ (kg/m^3)	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	E_3 (GPa)	E_4 (GPa)
Fedlap	2.9	350	10.2	0.6	0.9	2.4
Húrláb	6	400	0.96	0.6	10.8	3.24
Bordázat	14	400	1.2	0.72	15	3.6

3.4. táblázat. Gitár fedlap paraméterek [18]



3.7. ábra. Inhomogén fedlap húrlábbal és erősítő bordázattal



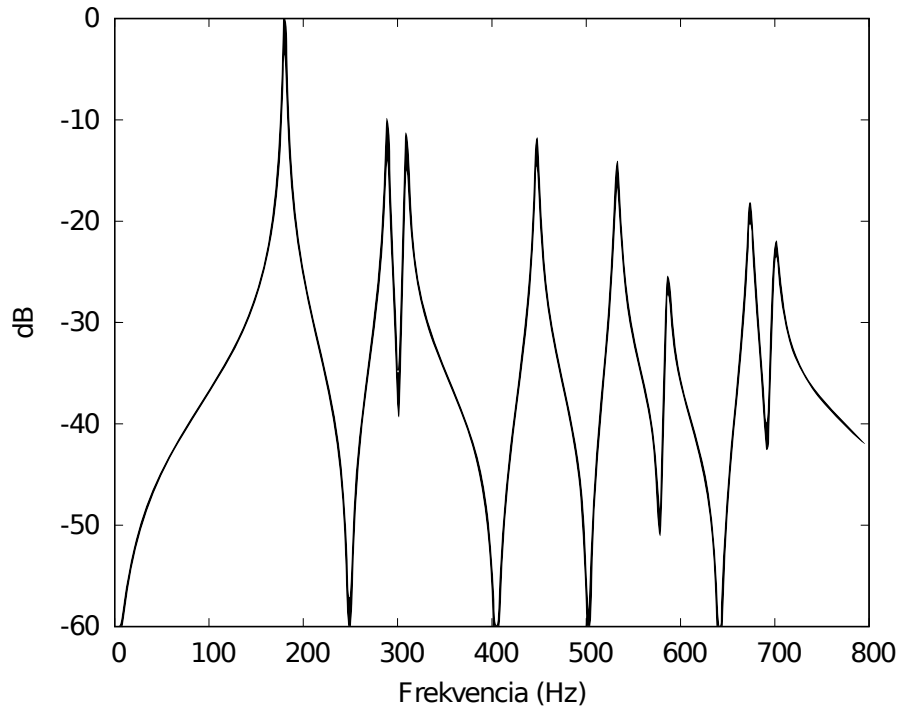
3.8. ábra. A VDM fedlapmodell admittanciaspektruma

3.6. Admittancia a húrlábnál

A mechanikai admittancia képlete [16]:

$$Y(\omega) = \frac{V(\omega)}{F(\omega)},$$

ahol az Y az admittancia, F az alkalmazott erő és V az erő hatására keletkező sebesség. Ezt a fedlapon a húrlábnál érdemes számolni, hiszen a húrok a húrlábhoz csatlakoznak. A következő szimulációt végeztem el: a fedlapot a húrláb közepétől 2 cm-re (körülbelül ott, ahol a mély E húr csatlakozik) egységimpulzussal gerjesztettem (ezáltal $F(\omega) = 1$), majd figyeltem az ott lévő fedlap-pont sebességét az idő függvényében. A fedlap paramétereihöz a 3.4 táblázatot használtam. Az így számolt admittancia amplitúdóspektruma megtekinthető a 3.8 ábrán. Ezt összevetve a [18]-ben közölt admittanciaspektrummal (3.9 ábra), jó egyezést kapunk. A módusok frekvenciáit leolvastam az ábrákról, ezek megtekinthetőek a 3.5 táblázatban. Az eltérés a két eredmény között nagyjából konzisztens, a [18]-ban közölt frekvenciák 10-20%-kal nagyobbak. Ennek oka az lehet, hogy a fedlapot nem a 3.7 ábrán látható,



3.9. ábra. A fedlapmodell admittanciaspektruma [18]-ből

hanem más geometriájú bordázattal modellezték.

3.7. A húrok csatolása a fedlapra

A fedlapot a húrok hozzák mozgásba a húrlábon keresztül. A gitáron ez a csatolás bonyolult jelenség [17], aminek teljes modellezésére nincs lehetőség a jelenlegi lemezmodellel, mivel az a rácspontok csak normálirányban tudnak elmozdulni. A

Módus	VDM frekvencia (Hz)	[18] frekvencia (Hz)
1	152	181
2	255	289
3	286	310
4	404	447
5	454	533
6	545	585
7	618	673

3.5. táblázat. VDM és [18] frekvenciák

csatolás elnagyolt modelljét a következő mérésre alapoztam: gerjesszük az egyik húrt fedlapra merőlegesen ill. párhuzamosan. Mérjük meg mikrofonnal, hogy mekkora hangnyomást okoz a gerjesztett húr a tranziensek eltűnése után közvetlenül. A várt eredmény az, hogy a merőlegesen gerjesztett húr nagyobb hangnyomást okoz, mivel a fedlap normálirányban könnyebben tud elmozdulni, mint a lap síkjában. A mérésnél fontos, hogy a húrt ugyanott, és azonos erővel gerjesszük. Ezt úgy értem el, hogy egy 250 g-os súlyra cérnát kötöttem, aminek a másik végét hozzákötöttem a húrhoz. A súly a gravitáció segítségével minden mérésnél ugyanakkora erővel hat a húrra. A cérna elvágásával tudjuk gerjeszteni a húrt. Több mérést végeztem, hogy ellenőrizzem a mérés konzisztenciáját: az eredményeknek 20% körüli szórása volt. Az mérések eredménye, hogy a merőleges gerjesztés kb. négyszer akkora jelet hoz létre a mikrofonban, mint a párhuzamos gerjesztés (ennek a mérésnek az eredményét [21] is alátámasztja).

A húr merőlegesen rezgő komponense a húrlábra $F_k = \sin(\alpha)T$ erővel hat, ahol α a húr és a fedlap által bezárt szög. Ezt közelíthetjük a következőképpen:

$$F_k = \sin(\alpha)T \approx \left. \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right|_{x=L} \approx \frac{y_{N-1}}{d_{N-1}},$$

ahol L a húr hossza, y_{N-1} a húr kitérése a húrlábhhoz második legközelebbi pontban (a legközelebbi pont a húrlábnál van) és d_{N-1} ennek a pontnak a távolsága a húrlábtól.

A modellben a húr vízszintesen rezgő komponensét ugyanolyan módon csatolom a fedlapra, mint a merőlegesen rezgőt, csak olyan súllyal veszem figyelembe, hogy a mérési eredményt reprodukálja. Ezzel a teljes F_k értéke a következőnek adódik:

$$F_k = T \frac{y_{N-1} + r z_{N-1}}{d_{N-1}},$$

ahol r a vízszintesen rezgő húr csatolásának aránya a merőlegeshez képest. Ez az F_k lesz az erő a (3.10) egyenletben, amit a fedlapra csatolok a húrláb pozíciójában.

3.8. Sugárzásmodell

Ahhoz, hogy a modellezett gitár hangját meghallgassuk, szükség van arra, hogy a szimulált lemez kitéréseit hanggá alakítsuk. Erre az egyik legegyszerűbb megoldás, hogy a fedlap egy adott pontjának kitérését egyszerűen lineárisan összefüggőnek tekintjük a fedlap által keltett hangnyomással. Ez nélkülöz mindenféle akusztikai megalapozottságot, de a gitár hangja mégis hallhatóvá válik. A keletkező hang azonban nagyon rossz (ez meghallgatható a mellékben, a 5-ös számú hangfájl): a magasabb frekvenciák szinte teljesen hiányoznak belőle. Erre megoldás, hogy nem a kitérés, hanem a sebességet (melléklet, 6-os számú hangfájl), vagy a gyorsulást (melléklet, 7-es számú hangfájl) használjuk a hanghoz. Ezek a megoldások jobb hangzást eredményeznek, de még mindig nem elég jók, ezért élethűbb sugárzásmodellre van szükség.

A hang levegőben való terjedése egy nagyon bonyolult folyamat, csak a legegyszerűbb hangot sugárzó objektumokat foglalmazták meg zárt matematikai formulákkal [22]. A beépített dugattyú⁴ modelljéből indultam ki. Ez egy olyan rezgő dugattyút modellez, ami körül végtelen sík (aminek a normálvektora egybeesik a dugattyú tengelyével) vágja kellé a teret. Harmonikus rezgőmozgást végző dugattyú a következő hangnyomást hozza létre a dugattyú mozgási tengelye mentén [22]:

$$p(r, t) = \rho c U_0 \left(1 - e^{-jk(\sqrt{r^2 + r_d^2} - r)} \right) e^{j(\omega t - kr)},$$

ahol p a hangnyomás, r a pont távolsága (ahol a hangnyomást számoljuk), ρ a közeg sűrűsége, c a közegben a terjedési sebesség, U_0 a mozgás amplitúdója, r_d a dugattyú sugara, ω a rezgés körfrekvenciája és k a hullámszám. Ha az r_d értéke r -hez képest elhanyagolható, akkor a következő közelítést alkalmazhatjuk (másodfokú Taylor-soros közelítés):

$$\sqrt{r^2 + r_d^2} - r \approx \frac{r_d^2}{2r}.$$

Ezzel ehhez az egyenlethez jutunk:

$$p(r, t) = \rho c U_0 \left(1 - e^{-j0.5kr_d^2/r} \right) e^{j(\omega t - kr)}.$$

⁴sajnos nem találtam meg a magyar irodalomban a fordítását, így magam fordítottam le a *baffled piston* elnevezést

Ha az első exponenciális tag kitevője kicsi (azaz r nagy, és/vagy k kicsi), akkor további közelítést alkalmazhatunk:

$$e^{-j0.5kr_d^2/r} \approx 1 - j\frac{kr_d^2}{2r}.$$

Ezt behelyettesítve, és kihasználva az $\omega = ck$ összefüggést [22]:

$$p(r, t) = j\rho\omega U_0 \frac{r_d^2}{2r} e^{j(\omega t - kr)}.$$

Mivel harmonikus regzőmozgásról van szó, az egyenletben található $U_0 e^{j\omega t}$ tag a dugattyú sebesség függvénye. Ennek a deriváltja (azaz a gyorsulás), $j\omega U_0 e^{j\omega t}$ szintén megtalálható az egyenletben. A gyorsulást ($a(t)$) behelyettesítve:

$$p(r, t) = \rho U_0 \frac{r_d^2}{2r} e^{-jkr} a(t).$$

Ebből az egyenletből az következik, hogy a dugattyú tengelye mentén, egy fix távolságban lévő pontban keletkező hangnyomás a dugattyú gyorsulásával lesz arányos.

Ezt az eredményt felhasználva a fedlapot sok kis apró beépített dugattyúval közelítettem, a hang terjedési sebességét, és az $1/r$ -es hangnyomáscsökkentő tagot figyelmen kívül hagytam, így végül a következő egyszerű összefüggést használtam a fedlap által keltett hangnyomásra:

$$p(t) \propto \sum a_i(t), \quad (3.14)$$

ahol a_i az egyes fedlap pontok gyorsulása. Összehasonlítva a fejezet elején leírt próbálkozásokkal, ennek a módszernek jobb a hangminősége (melléklet, 2-es számú hangfájl).

4. fejezet

A fizikai modell összehasonlítása mért gitárral

Ahhoz, hogy a fizikai modellt összehasonlíthassam egy valódi gitárral, a gitáron méréseket végeztem. A mérésekben közös, hogy egy rövid jellel gerjesztem a gitárt, majd mérem a választ. Az átviteli karakterisztika meghatározásához dekonvolúciót alkalmazok: a mért választ és a gerjesztést dekonvolváltam, aminek a rendszer impulzusválasza lesz az eredménye. Ezt a jelet Fourier transzformálva megkapom a rendszer átviteli karakteristikáját. A modellezett gitáron ugyanezt a mérést szimulálom (itt már nem szükséges dekonvolúciót alkalmazni, hiszem lehetséges a rendszert egységimpulzussal gerjeszteni), majd a válasz Fourier transzformáltját összehasonlítom a valódi gitáréval.

4.1. Dekonvolúció

Két diszkrét jel (h és u) konvolúciója a következő módon számítható:

$$y[k] = \sum_{i=-\infty}^{i=\infty} u[i]h[k-i].$$

A művelet szimbolikus alakja:

$$y = u * h.$$

A dekonvolúció a konvolúció inverz művelete: ismerjük y -t és u -t, a keresett jel a h . Lineáris invariáns rendszerre megfogalmazva a dekonvolúciót: ismerjük egy rendszer gerjesztését (u), és az arra adott választát (y), keressük a rendszer impulzusválaszát (h). Mivel az időtartománybeli konvolúciónak a frekvenciatartományban szorzás felel meg, a megoldás triviálisnak tűnik: Fourier transzformáljuk y -t és u -t, osszuk el a két spektrumot egymással, majd inverz Fourier transzformációval kapjuk a megoldást:

$$h = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\mathcal{F}\{y\}}{\mathcal{F}\{u\}} \right\}. \quad (4.1)$$

Azonban a megoldás ritkán ilyen egyszerű. Ha $\mathcal{F}\{u\}$ -nak van nullhelye, akkor azon a helyen nem lehet $\mathcal{F}\{h\}$ -t számítani. További problémák is felmerülhetnek, például a jelek általában zajosak. A (4.1) eredménye ilyenkor nagyon rossz is lehet. A dekonvolúció „rosszul kondicionált” (*ill-conditioned*) lehet [23]. Ez azt jelenti, hogy a bemenő paraméterek kismértékű megváltoztatása a kimenetet nagyban befolyásolja. Ez a dekonvolúciónál tényleges problémát okozhat: egy kismértékű additív zaj y -n és/vagy u -n teljesen más h eredményt szolgáltatathat. Ezért a gyakorlatban dekonvolúcióra nagyon ritkán alkalmazzák a (4.1) egyenletet.

A dekonvolúciónak egy másik megközelítése a következő: írjuk fel a konvolúció műveletét mátrixszorzással (N az u elemeinek a száma):

$$u * h = \begin{pmatrix} u[0] & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ u[1] & u[0] & 0 & \dots & 0 & 0 \\ u[2] & u[1] & u[0] & \dots & 0 & 0 \\ u[3] & u[2] & u[1] & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u[N-2] & u[N-3] \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u[N-1] & u[N-2] \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & u[N-1] \end{pmatrix} h,$$

így visszavezettük a dekonvolúció problémáját lineáris egyenletrendszer problémára.

Mivel a u -ból képzett mátrixnak (U) több sora van, mint oszlopa, az

$$y = Uh$$

egyenlet általában túlhatározott, a megoldást legkisebb négyzetes hiba értelemben kereshetjük: keressük azt a h -t, ami ezt a kifejezést minimalizálja:

$$\|Uh - y\|. \tag{4.2}$$

Bebizonyítható [19], hogy ez akkor minimális, ha

$$h = U^\dagger y,$$

ahol U^\dagger az U mátrix pszeudóinverze:

$$U^\dagger = (U^T U)^{-1} U^T.$$

A gyakorlatban ez a mátrix nem mindig számítható, mivel az $U^T U$ mátrix (közel) szinguláris lehet. Ezért (4.2) minimumhelyét a „legmeredekebb lejtő” (*steepest descent*) módszerével oldottam meg. Ez egy iteratív eljárás, aminek a lényege a következő: egy kezdeti h értékből kiindulva számolja a hibát (e), majd h értékét elmozdítja a négyzetes hibafelület ($e^T e$) negatív gradiensének irányába:

$$e_i = Uh_i - y,$$

$$h_{i+1} = h_i - \mu \nabla(e_i^T e_i).$$

A négyzetes hibafelület gradiense az $e^T e$ parciális deriváljából alkotott vektor, ami-

nek elemei (M az y elemeinek a száma):

$$\begin{aligned}\frac{\partial e^T e}{\partial h[0]} &= 2(e[0]u[0] + e[1]u[1] + \cdots + e[N-1]u[N-1]), \\ \frac{\partial e^T e}{\partial h[1]} &= 2(e[1]u[0] + e[2]u[1] + \cdots + e[N]u[N-1]), \\ \frac{\partial e^T e}{\partial h[2]} &= 2(e[2]u[0] + e[3]u[1] + \cdots + e[N+1]u[N-1]), \\ &\vdots \\ \frac{\partial e^T e}{\partial h[M-1]} &= 2(e[M-1]u[0] + e[M]u[1] + \cdots + e[N+M-1]u[N-1]).\end{aligned}$$

A μ értéke kulcsfontosságú a módszerben. Ha értéke túl kicsi, akkor a módszer lassan találja meg a minimumpontot. Ha túl nagy, akkor oszcillálva közelíti a minimumpontot (ebben az esetben az is előfordulhat, hogy a hiba növekszik egy lépés alatt). Ezért a megvalósított programban μ értékét dinamikusan változtatom: ha egy iteráció alatt a hiba csökken, akkor növelem 10%-kal, ha pedig növekszik, akkor felezem.

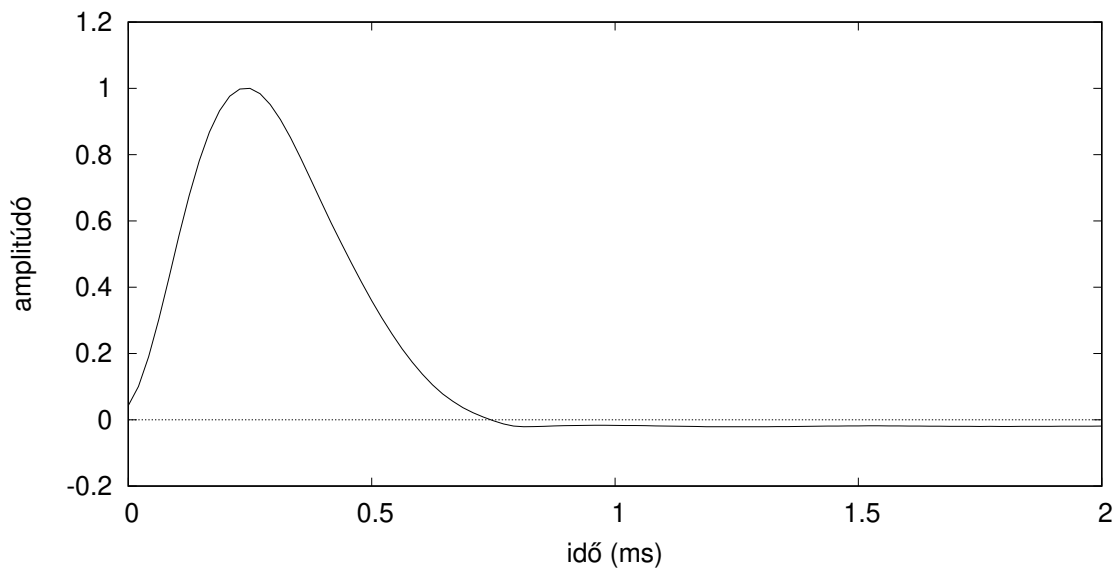
4.2. A mérések

4.2.1. Admittancia mérése

A szimuláció és a valódi gitár összehasonlításának egyik módja, hogy összevetem az admittanciájukat. Az admittancia képlete [16]:

$$Y(\omega) = \frac{V(\omega)}{F(\omega)}.$$

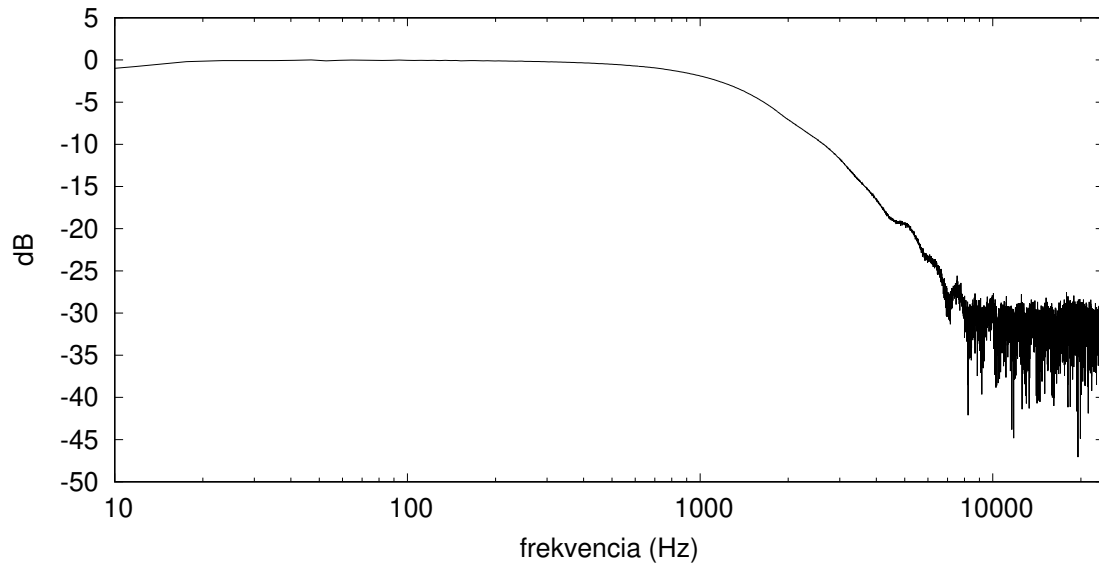
Az admittancia mérését a következőképpen végeztem el: egy gyorsulásmérőt rögzítettem a húrlábra, majd a gitár testét a húrlábon megütöttem egy erő mérésére alkalmas kalapáccsal. A kalapács által mért jel látható a 4.1 ábrán, az amplitúdó-spektruma pedig a 4.2 ábrán. Jól látható, hogy bár az időfüggvénye impulzusszerű,



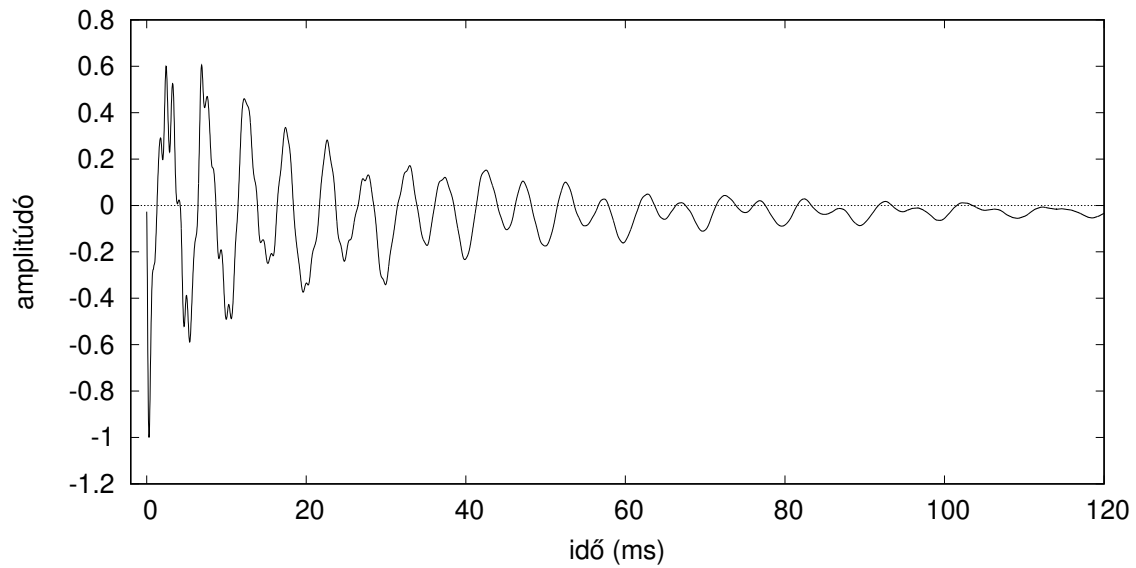
4.1. ábra. A gerjesztés időbeli lefolyása

az amplitúdóspektruma 1 KHz felett már közel sem konstans értékű, szükség van a dekonvolúcióra. A sebességet a mérés nem szolgáltatja közvetlenül, származtatni kell a gyorsulásmérő jeléből: a gyorsulást integrálva kaphatjuk meg a sebességet. Szivárgó integrátort alkalmaztam, mivel a gyorsulásmérő által szolgáltatott jel DC komponense nem nulla, így ha „sima” integrálást alkalmaztam volna, az integrált jel „elmászott” volna a nullából. A sebesség időbeli lefolyása látható a 4.3 ábrán, az amplitúdóspektruma a 4.4 ábrán. Dekonvolválva a sebességet a kalapács által mért erővel, megkapjuk az admittanciát. Ennek időtartománybeli lefolyása látható a 4.5 ábrán, az amplitúdóspektruma a 4.6 ábrán. A 4.7 ábrán látható a dekonvolúció hibája: a jel elején van egy kisebb hiba: a húrláb tranziens mozgása lineárisan rosszul közelíthető, de a tranziens után szinte nulla a hiba. A 4.8 ábrán látható a hiba amplitúdóspektruma.

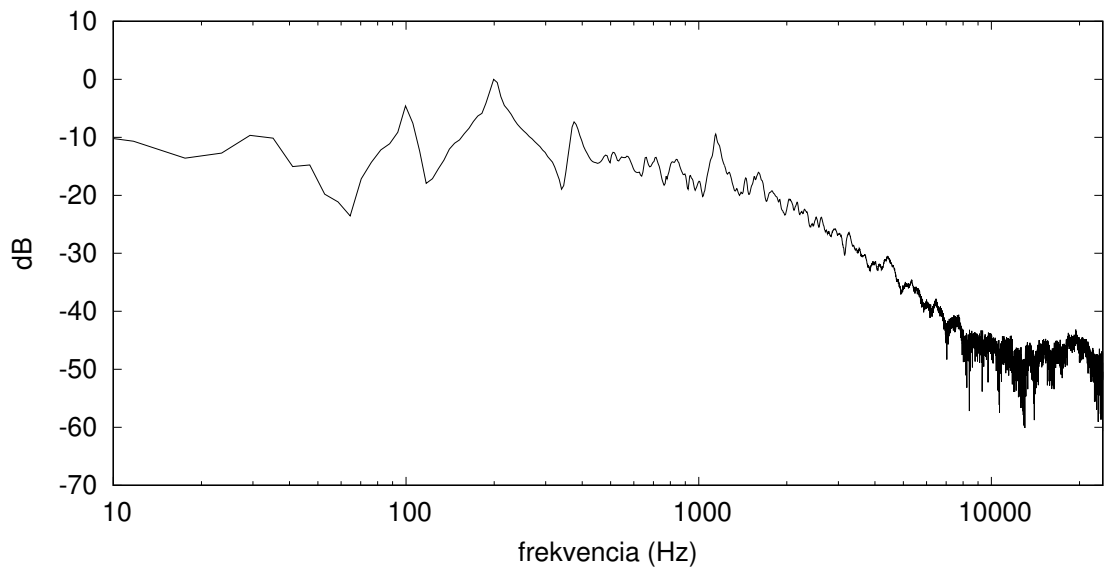
A 4.9 ábrán megtalálható a szimulált és a mért gitár admittanciája (az ábrán a szimulált gitár értékeit megnöveltem 30 dB-lel, hogy a két görbe elkülönüljön egymástól). Látható, hogy bár a spektrumokban vannak „hasonló” részek, a módusfrekvenciák különböznek egymástól. A mért ábrán látható első csúcs (101 Hz) valószínűleg a gitártestben lévő levegő rezonanciafrekvenciája, mivel ez egybeesik [20]-ban mért értékekkel. Ez a csúcs a szimulált modellben hiányzik, mivel a modell nem számol a hangszer testében lévő levegővel. A test első módusfrekvenciája a szimulált esetben



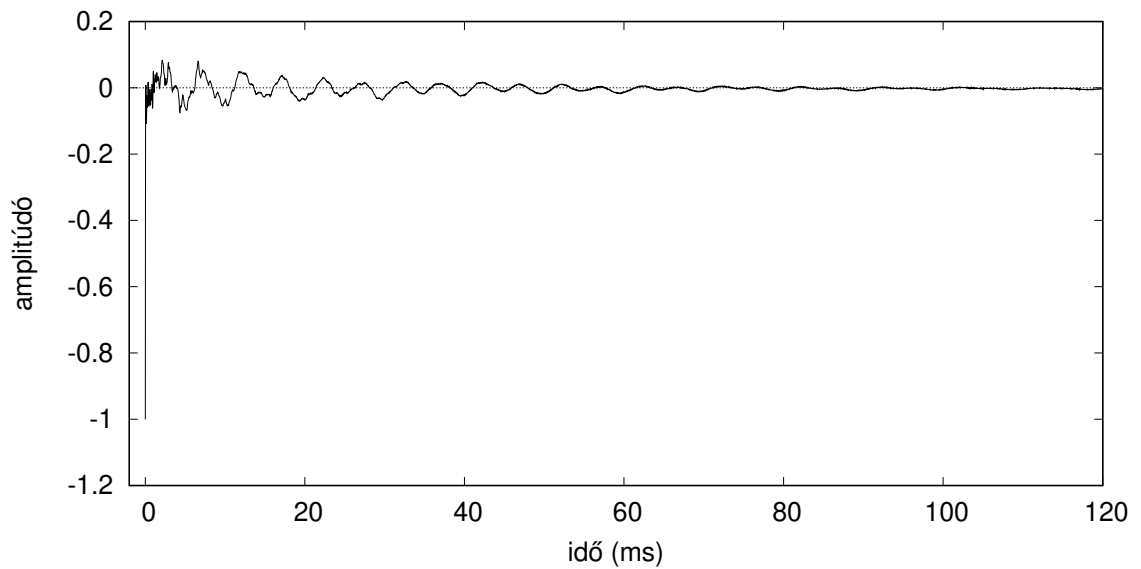
4.2. ábra. A gerjesztés amplitúdóspektruma



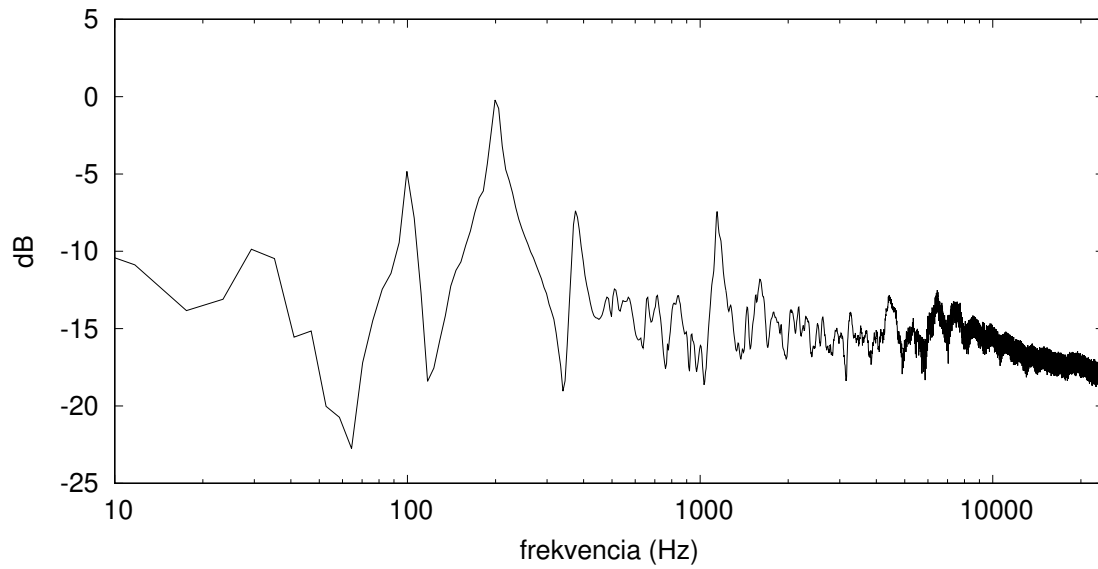
4.3. ábra. A húrláb sebességének időbeli lefolyása



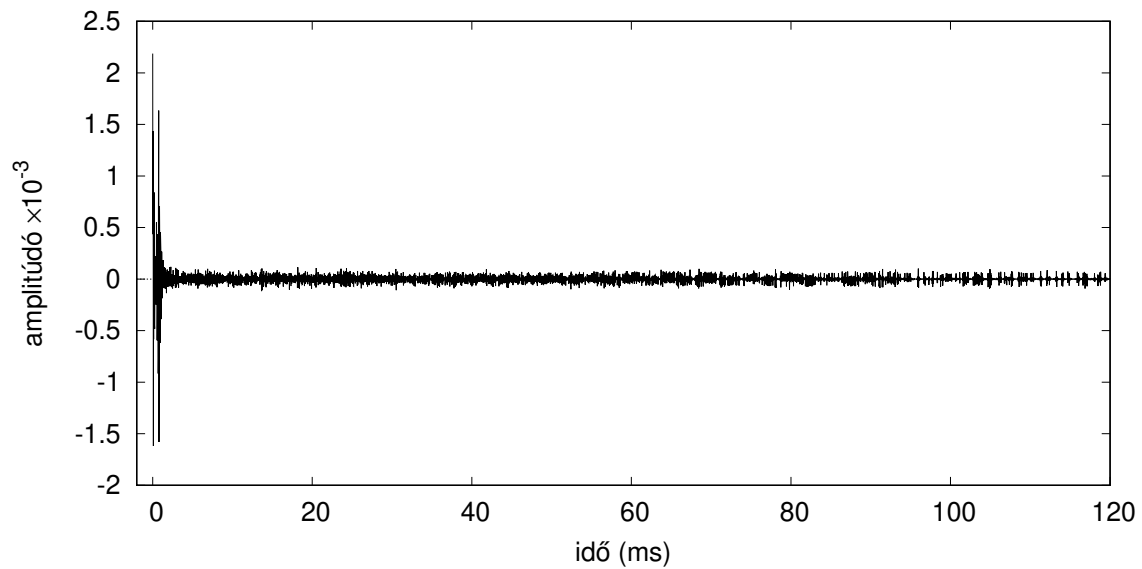
4.4. ábra. A húr láb sebességének amplitúdóspektruma



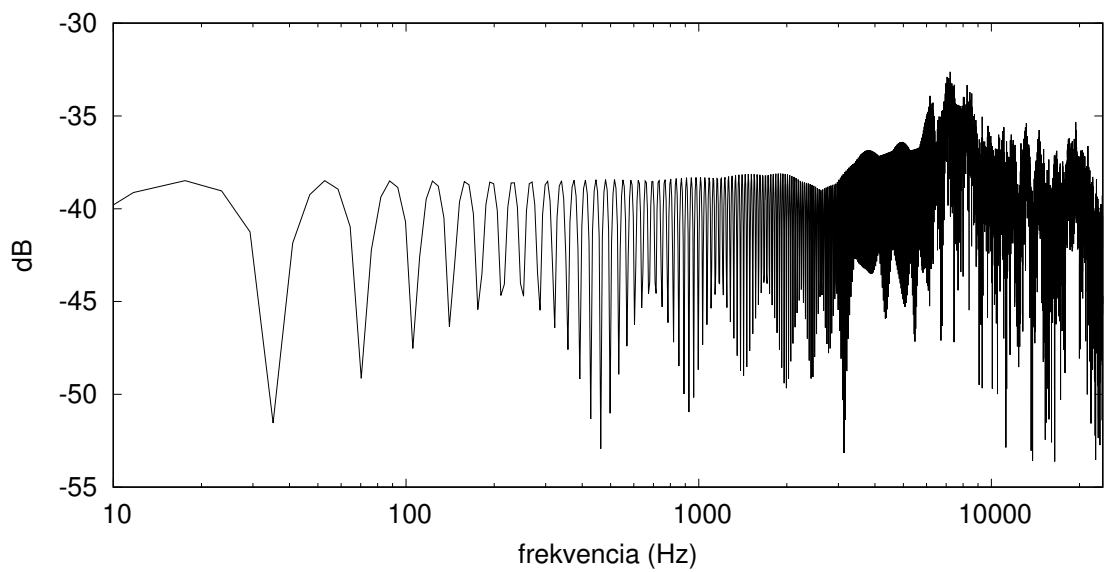
4.5. ábra. A húr láb impulzusválasza (sebesség)



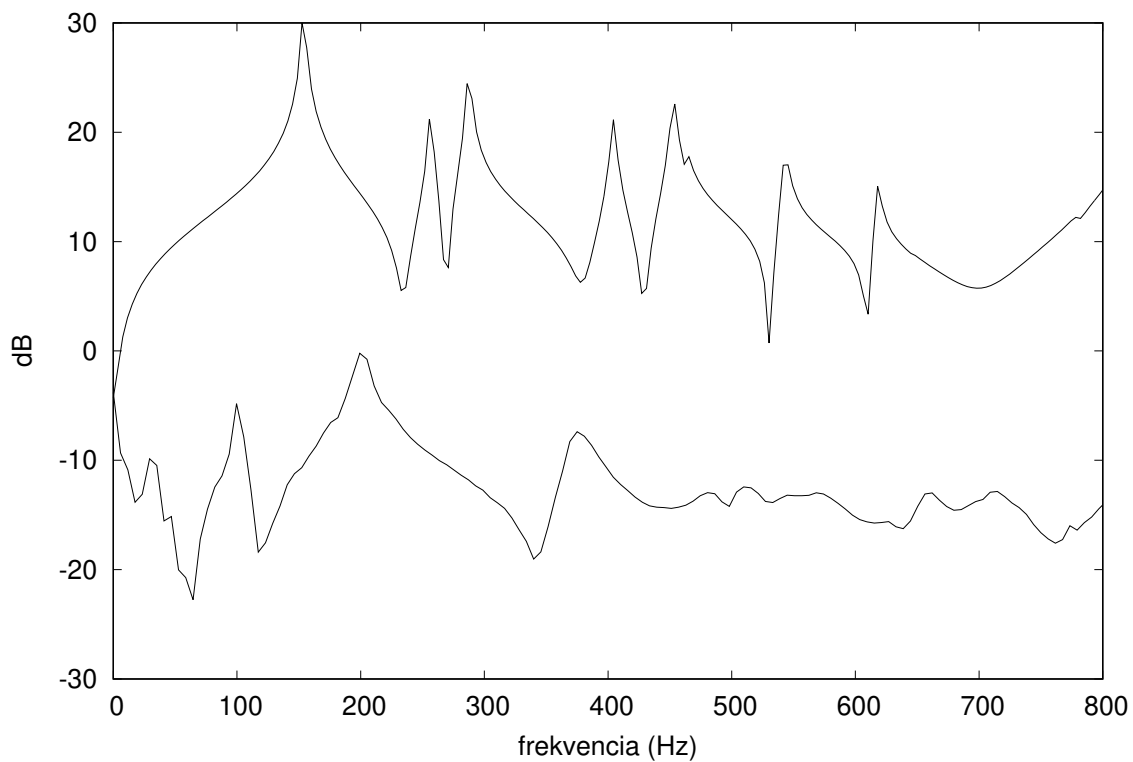
4.6. ábra. Az admittancia



4.7. ábra. A dekonvolúció hibájának időbeli lefolyása



4.8. ábra. A dekonvolúció hibájának amplitúdóspektruma



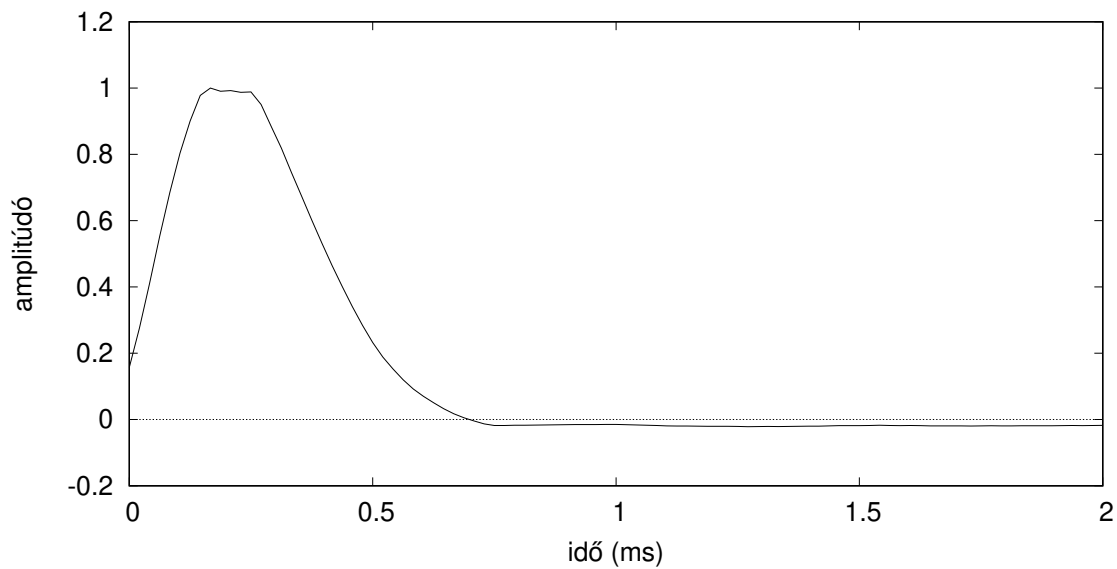
4.9. ábra. Az admittancia 0-800 Hz között. A felső jel a szimulált, az alsó a mért gitaré

152 Hz, a mért esetben 201 Hz, és a további módusfrekvenciák is különböznek. Ez magyarázható azzal, hogy a modellezett fedlap különbözik a mért gitár fedlapjától, mivel a gitár fizikai jellemzőit (ρ , E konstansok) sajnos nem volt módomban megmérni, így [18]-ben közölt értékeket használtam. Ahhoz, hogy tovább lehessen elemezni a problémát, további mérésekre lenne szükség: azonosítani kellene, hogy a különböző frekvenciájú rezgésekhez milyen alakzat tartozik (Chladni-ábra). Továbbá több admittancia mérésre is szükség volna, mivel az admittanciagörbékből hiányozhatnak módusok (pl., [21]-ben a G húr pozíciójában gerjesztett esetben hiányzik a 200 Hz-es módus, ami az E húrnál elvégzett gerjesztésnél megvan).

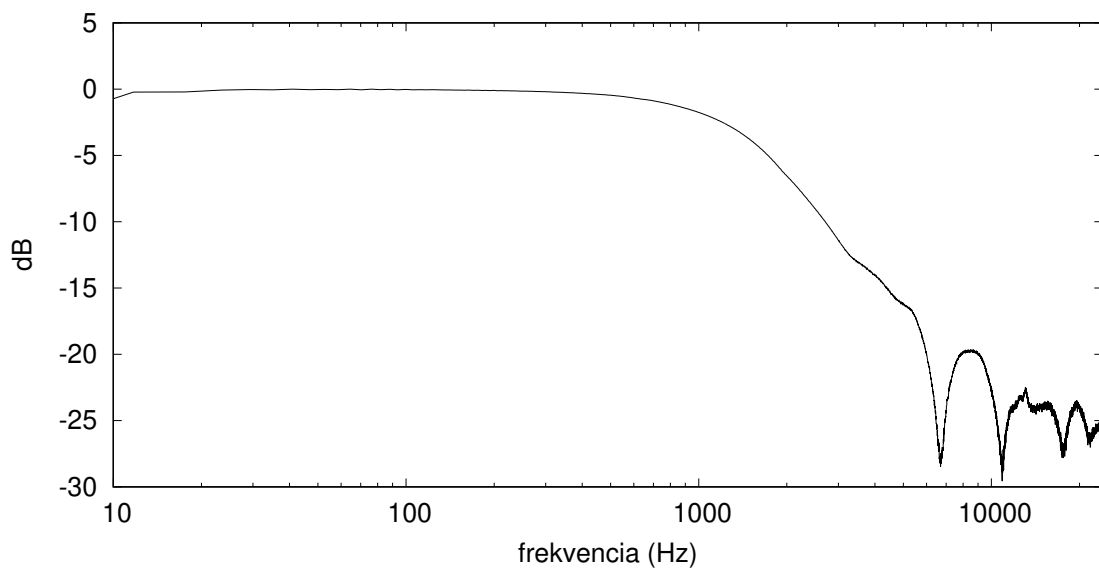
4.2.2. Mikrofonos mérés

A mikrofonos mérés célja kettős: egyrészt összehasonlíthatom a fedlap- és sugárzásmodell impulzusválaszt a mért eredményekkel, másrészt a mérésből származó impulzusválaszt felhasználhatom arra, hogy a fizikai fedlap- és sugárzásmodellt lecseréljem nem fizikai alapú modellre: a húrokból származó erőhatást nem csatolom a fedlapra, hanem konvolválom a mérésből származó impulzusválasszal, aminek az eredménye lesz a modell kimenete. Az első méréshez hasonlóan, itt is kalapáccsal gerjesztettem a gitárt a húrlábnál. A kalapács által mért jel megtalálható a 4.10 ábrán, az amplitúdóspektruma pedig a 4.11 ábrán. Hasonlóan az első méréshez, a rendszer impulzusválaszt dekonvolúcióval határoztam meg: a mikrofon által felvett jelet (4.12 és 4.13 ábra) dekonvolváltam a gerjesztés jelével. A dekonvolúció eredménye a 4.14 és a 4.15 ábrán látható. A dekonvolúció hibája gyakorlatilag nulla, ábrázolást nem igényel. A fizikai modellben is elvégeztem ugyanezt a mérést, a 4.16 ábrán megtekinthető a szimulált gitár hangnyomás impulzusválasza.

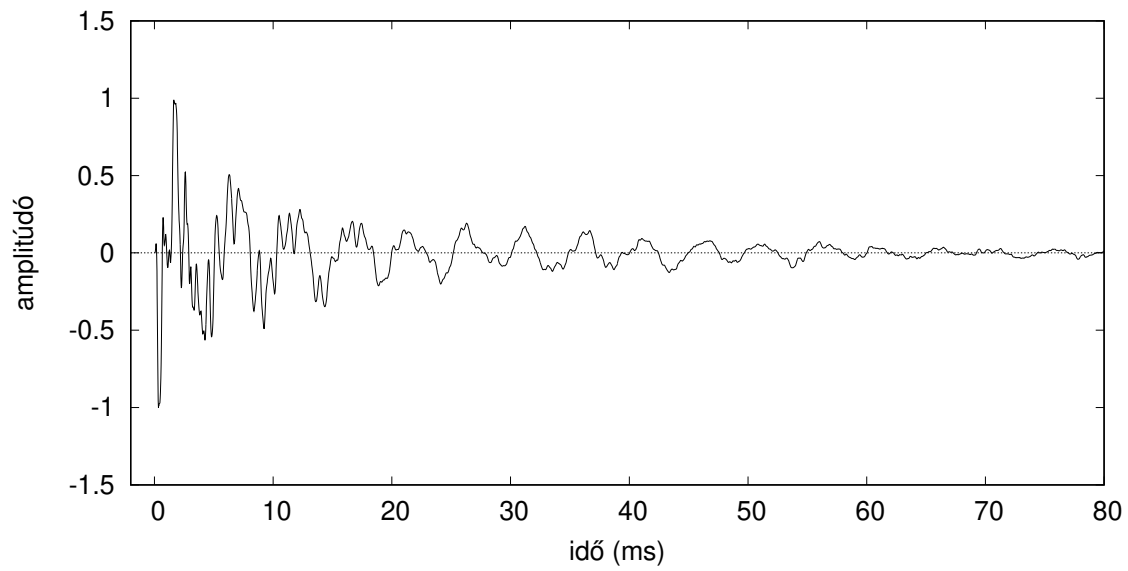
Ez a mérés támpontot ad a sugárzásmodell minőségének megállapításához. Azonos ábrán ábrázoltam az admittancia és a hangnyomás spektrumát, a szimulált (4.17 ábra), és a valós (4.18 ábra) gitár esetében. Az ábrákon az admittancia értékeit megnöveltem 20 dB-lel, hogy a két görbe elkülönüljön egymástól. A 4.17 ábrán az látszik, hogy a hangnyomás spektrumából egyes módusok hiányoznak: az admittanciában, 280 Hz és 550 Hz környékén is van egy csúcs, ami a hangnyomásból teljesen hiányzik. Ennek az az oka, hogy egyes módusok szimmetrikusan rezegnek, és emiatt



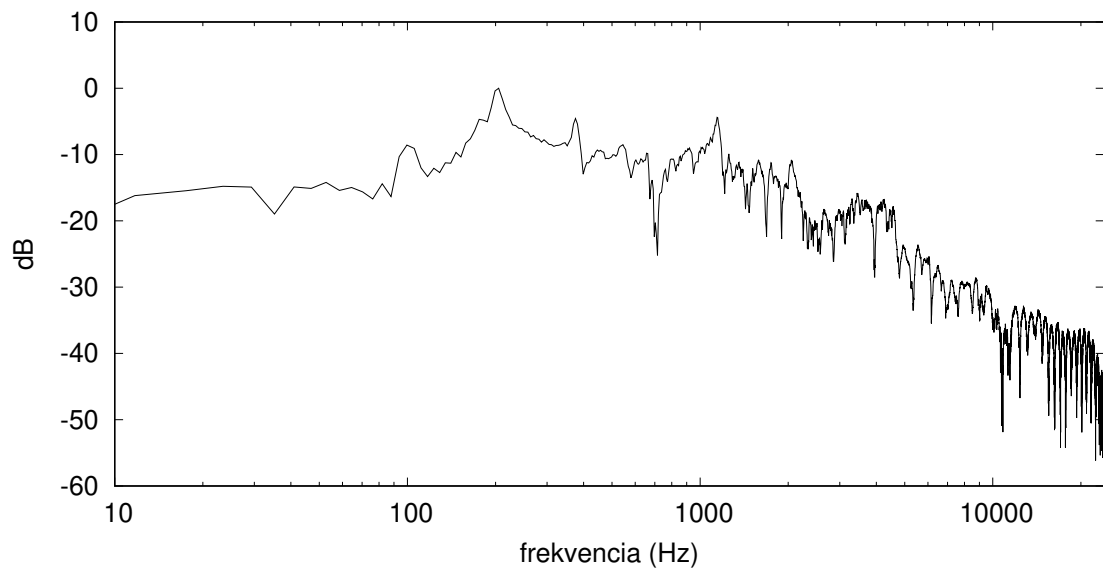
4.10. ábra. A gerjesztés időbeli lefolyása



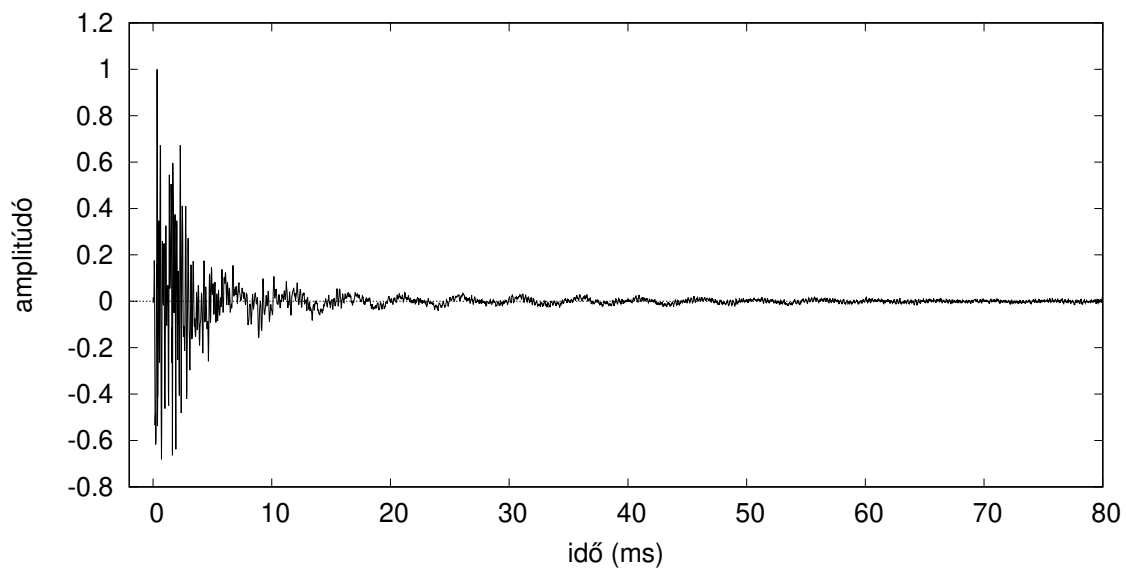
4.11. ábra. A gerjesztés amplitúdóspektruma



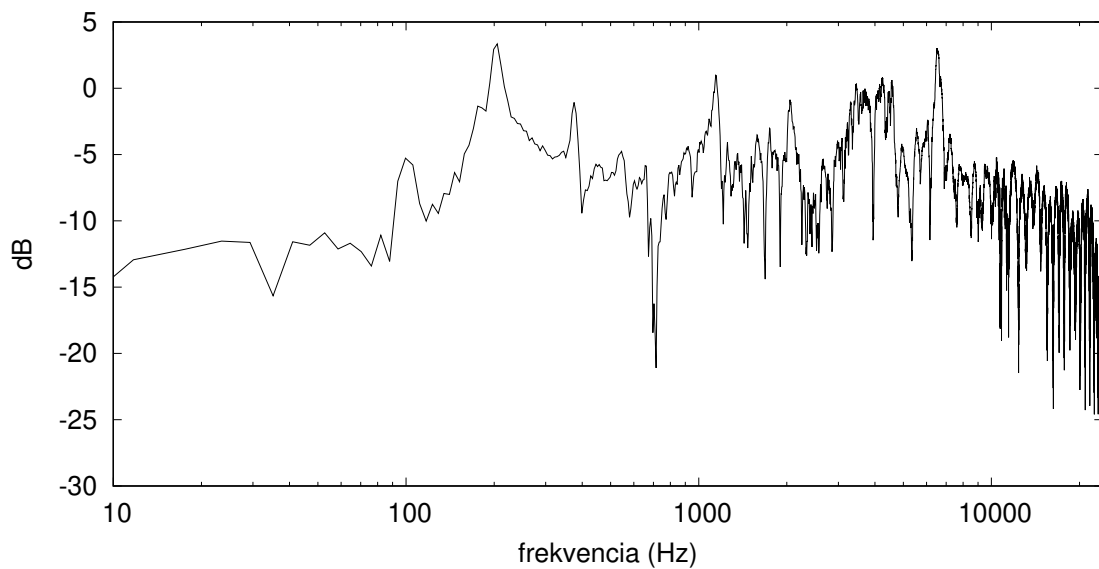
4.12. ábra. A mikrofon által felvett jel (időtartomány)



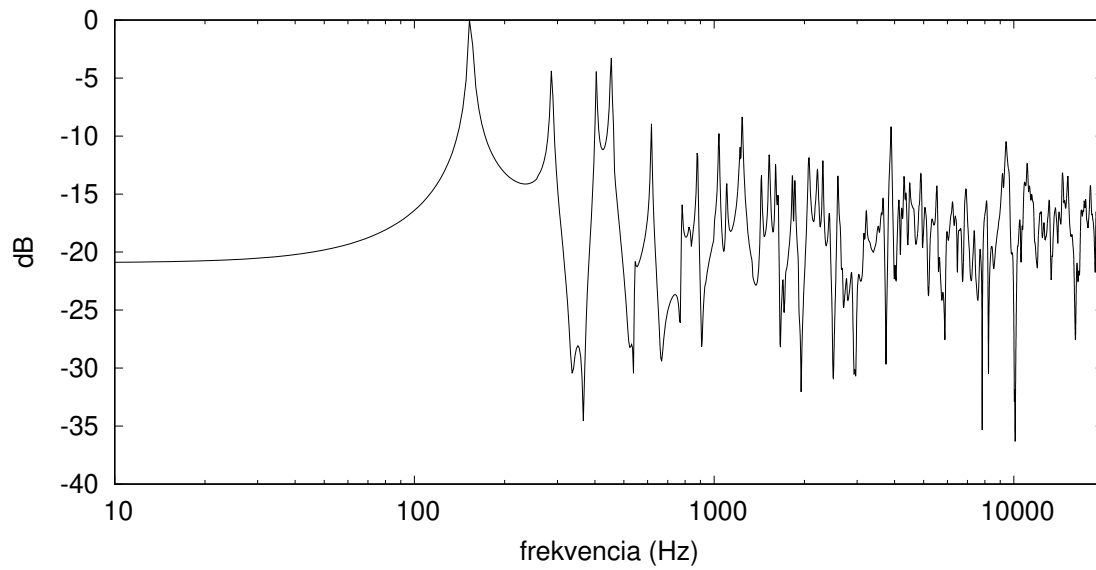
4.13. ábra. A mikrofon által felvett jel (amplitúdóspektrum)



4.14. ábra. A mért gitár hangnyomás impulzusválasza (időtartomány)

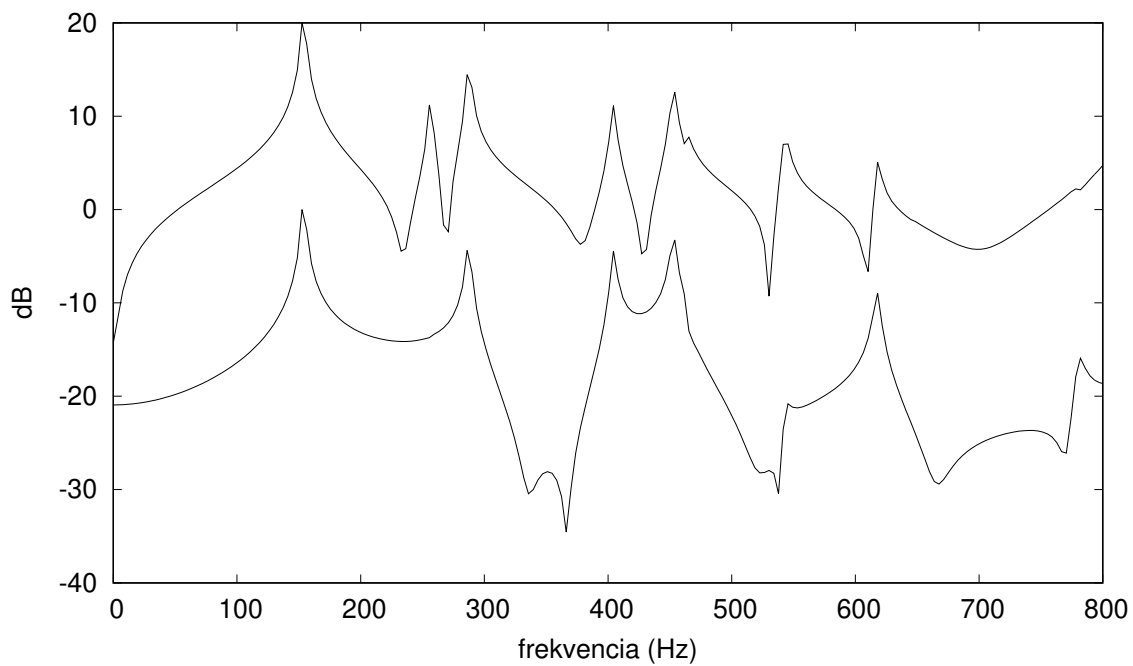


4.15. ábra. A mért gitár hangnyomás impulzusválasza (amplitúdóspektrum)

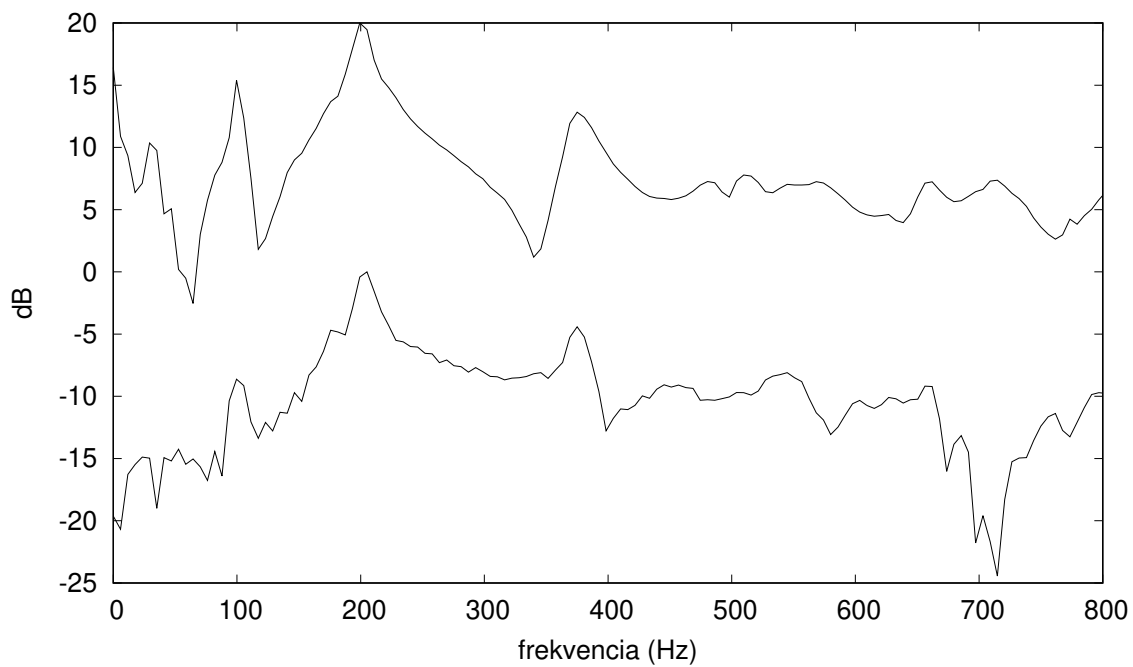


4.16. ábra. A szimulált gitár hangnyomás impulzusválasza (amplitúdóspektrum)

(3.14) alkalmazásakor ezekre a módusokra az összeg nulla lesz. Ez azért probléma, mert valós gitár esetén ilyen hiány nincs, az admittancia összes frekvenciacsúcsa megjelenik a hangnyomásban is, ahogy az a 4.18 ábrán látszik. Ebből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a sugárzásmodell nem elég jó, ezen javítani lehet a későbbiekben.



4.17. ábra. A szimulált modell admittanciája (felül) és hangnyomása (alul)



4.18. ábra. A mért gitár admittanciája (felül) és hangnyomása (alul)

5. fejezet

Modell vezérlése

A modell vezérlése egy kottafájl segítségével történik. A kottafájl tartalmaz minden információt a modellről, ill. tartalmazza magát a kottát. Ez a fájl egy közönséges szövegfájl, amiben megadott struktúra szerint kell átadni a modell paramétereit és a gitáron elvégzendő parancsokat. A fájl formátuma egyszerű, kétféle típusú elemből áll. Az első típusú elem a parancs:

```
parancs pozíció_paraméter1 pozíció_paraméter2 {  
    név_paraméter1 = érték1  
    név_paraméter2 = érték2  
    :  
}
```

Ez azt jelenti, hogy a `parancs` nevű parancsot kell végrehajtani. Minden parancsnak léteznek paramétereit, ezeket név szerint lehet beállítani a kapcsos zárójelek között. Azonban lehetőség van a tömörség miatt bizonyos paramétereket a parancs után közvetlenül írni, ezek jelentését a felhasználó állíthatja be (`define`-nal).

A második típusú elem a `define`, amivel egy már meglévő parancsot lehet rövidebbé tenni:

```
define új_parancs = parancs {  
    név_paraméter1 = érték1
```

```

    név_paraméter2 = érték2
    név_paraméter3 = $1
    :
}

```

Az új_parancs nevű parancsot kiadva, a parancs hajtódik végre, a kapcsos zárójelek közti beállításokkal. Ha \$<szám>-ot használunk értéknek, akkor az jelenti a pozíció paramétert (az értéke nem itt a define-nál állítódik be, hanem mikor az új_parancs-ot kiadjunk, annak a pozíció_paraméter-e fog ide behelyettesítődni).

Példa: létezik egy parancs, a pluck, ami megpenget egy húrt. Ha define-olunk rá egy rövidebb parancsot, (aminek a neve legyen pl)

```

define pl = pluck {
    string = $1
    position = 0.17
    :
}

```

akkor a későbbiekben elég leírni, hogy pl E, ami megpengeti a húrt a define-ban leírt paraméterekkel (a string paraméter értéke "E" lesz).

5.1. Fizikai paraméterek leírása

A lehetséges parancsok a következők:

guitar_string: Hozzáad egy húrt a fizikai modellhez. Paraméterei:

- name: a húr neve
- nNodes: a diszkrét pontok száma
- length: a húr hossza
- tension: a húr feszessége
- linearDensity: a húr lineáris sűrűsége
- damping1y: a húr frekvenciafüggetlen csillapítási tényezője (b_1), fedlapra me-

rőleges rezgés esetében

- **damping2y**: a húr frekvenciafüggő csillapítási tényezője (b_2), fedlapra merőleges rezgés esetében
- **damping1z**: a húr frekvenciafüggetlen csillapítási tényezője (b_1), fedlappal párhuzamos rezgés esetében
- **damping2z**: a húr frekvenciafüggő csillapítási tényezője (b_2), fedlappal párhuzamos rezgés esetében
- **stiffness**: a húr merevsége, az EI tag a húregyenletben
- **outputVolume**: ha nincs a fizikai modellben fedlapmodell, akkor ez határozza meg a húr hangerejét

sound_board: Beállítja a fedlap paramétereit:

- **height**: a fedlap vastagsága
- **density**: a fedlap sűrűsége
- **e1..e4**: a fedlap merevsége, a $E_1..E_4$ paraméterek értéke a lemezegyenletben
- **damping**: a fedlap frekvenciafüggetlen csillapítási tényezője, az R_f tag a lemezegyenletben
- **dampingX.Y**: a fedlap frekvenciafüggő csillapítási tényezői, ahol X lehetséges értékei 1, 3 és 4, Y lehetséges értékei r_1 , s_1 , r_2 és s_2
- **deltaSpatial**: a diszkrétizált fedlap rácspont távolsága
- **outputVolume**: a fedlap hangereje

sound_board_boundary: Hozzáad egy peremet a fedlaphoz. Paramétereit:

- **condition**: a peremfeltétel, lehetséges értékei **clamped**, **simply_supported** és **free**
- **segments**: a perem geometriája: értékét []-k között kell megadni. A geometriát páros számú számmal kell definiálni, ahol a szomszédos számpárok a perem törtvonalának $(x; y)$ koordinátái

sound_board_area: Definiál egy fedlap részterületet, aminek megváltoztatja a fizikai paramétereit (ezzel lehet pl. a húrláb helyét, és fizikai paramétereit beállítani)

- **height**, **density**, **e1..e4**: mint a **sound_board**-nál
- **segments**: a terület pereme, értékét ugyanolyan módon kell beállítani, mint **sound_board_boundary**-nál

attach_string: Hozzáköti egy húrt a fedlaphoz. Paramétereit:

- `string`: a húr neve, amit hozzá kell kötni a fedlaphoz
- `x, y`: a koordináta a fedlapon, ahova kell kötni a húrt
- `parallelCoupling`: szorzószám a húr csatolásának erejére, a fedlappal párhuzamosan rezgő komponensre vonatkozik
- `perpendicularCoupling`: szorzószám a húr csatolásának erejére, a fedlapra merőlegesen rezgő komponensre vonatkozik

`sound_board_impulse_response`: Beállítja a fedlap impulzusválaszt

- `file`: egy wav fájl neve, ennek kell tartalmaznia az impulzusválaszt

A modell háromféleképpen tud működni: ha nincs beállítva se `sound_board`, se `sound_board_impulse_response`, akkor a húrok kitérésének összege lesz a kimenet. Ha `sound_board` be van állítva, akkor fizikai fedlapmodell számolódik. Ha nincs `sound_board` beállítva, de `sound_board_impulse_response` igen, akkor a modell kimenete húrok kitérése konvolválva a megadott impulzusválasszal.

5.2. A kotta leírása

A kottában a parancsok kiadásának idejét az időváltozó határozza meg. A kotta elején ez az idő nulláról indul, majd az `advance` parancs hatására megy előre. Minden kiadott kotta parancs arra az időpontra regisztrálódik be, amennyi ennek az idő változónak az aktuális értéke.

A lehetséges parancsok a következők:

`bpm <érték>`: beállítja a percenkénti ütemszámot a megadott értékre

`advance <érték>`: előremozdítja az időt. Kétféle paramétere lehet: ha `a/b` alakú, akkor az ütemnek `a/b` részével mozdítja előre az időt. Ha nem ilyen alakú, akkor az `<érték>` másodpercet jelent

A következőkben leírt parancsokhoz lehet deltaidő prefixet tenni: ez azt jelenti, hogy a parancs ideje nem pont az aktuális idő, hanem a prefixszel módosított érték. Tehát például, a

`-1/4 p1 E`

parancs egy negyed ütemmel korábban fog végrehajtódni, mint a többi körülötte lévő, prefix nélküli parancs. Ez a funkcionalitás akkor jön jól például, ha a húrt pengetés előtt le kell fogni. A pengetésnek ütemre kell történnie, a lefogásnak pedig egy „picit” hamarabb. Erre szolgál a prefix idő, így nem kell az egy hanghoz tartozó lefogás és pengetés parancsot `advance`-szal „kettétörni”.

A gitáron való játék parancsai a következők:

`pluck`: megpendít egy húrt. Paraméterei:

- `string`: a húr neve, amit meg kell pendíteni
- `position`: a pengetés közepe, a húr hosszának arányában (pl. ha értéke 0.33, akkor a húrt a harmadánál fogja megpendíteni, a húrlábhhoz közelebb)
- `width`: a pengetés szélessége, a húr hosszának arányában
- `attackTime`: a pengetés t_{gerj} értéke
- `sustainTime`: a pengetés t_{kit} értéke
- `releaseTime`: a pengetés t_{el} értéke
- `force`: a pengetés ejere

`addFretting`: lefog egy húrt. Paraméterei:

- `string`: a húr neve, amit le kell fogni
- `fret`: az érintő száma, ahol a húrt le kell fogni
- `attackTime`: a lefogás t_{lef} értéke
- `damping1`: a lefogás frekvenciafüggetlen csillapítási tényezője
- `damping2`: a lefogás frekvenciafüggő csillapítási tényezője
- `force`: a lefogás ejere

`removeFretting`: felenged egy húrt. Paraméterei:

- `string`: a húr neve, amit fel kell engedni
- `fret`: az érintő száma, ahonnét a húrt fel kell engedni
- `releaseTime`: a lefogás t_{el} értéke
- `damping1`: a felengedés frekvenciafüggetlen csillapítási tényezője
- `damping2`: a felengedés frekvenciafüggő csillapítási tényezője

`slideFretting`: elcsúsztat egy lefogást egy húron. Paraméterei:

- `string`: a húr neve, amin a csúsztatást végre kell hajtani
- `fret`: az érintő száma, ahonnét csúsztatni kell

- `targetFret`: az érintő száma, ahova csúsztatni kell
- `time`: a csúsztatás időhossza

`addDamping`: csillapítást tesz egy húrra. Paraméterei:

- `string`: a húr neve, amire a csillapítást tenni kell
- `position`: a csillapítás közepe, a húr hosszának arányában
- `width`: a csillapítás szélessége, a húr hosszának arányában
- `attackTime`: ennyi idő alatt kerül rá a húrra a csillapítás, lineárisan interpolálva
- `sustainTime`: ennyi ideig fog rajtamaradni a húron a csillapítás
- `releaseTime`: ennyi idő alatt fog lekerülni a csillapítás a húrról, lineárisan interpolálva
- `damping1`: a frekvenciafüggetlen csillapítási tényezője
- `damping2`: a frekvenciafüggő csillapítási tényezője

Az E. függelékben található egy példa kottafájl.

6. fejezet

Értékelés, továbbfejlesztési lehetőségek

A diplomaterv célja fizikai modellen alapuló akusztikus gitár szintetizátor létrehozása volt. Ehhez szükséges volt a gitár felépítésének megismerése, majd az egyes elemek fizikai modellezése. Az irodalom felhasználásával elkészítettem a húr modelljét, ami egy parciális differenciálegyenleten alapul. Az egyenletet véges differenciák módszerével oldottam meg, ami egy lényeges ponton eltér a megszokottól: a húrt egyenetlen módon diszkretizáltam, hogy az érintők feletti pontok elhelyezkedése pontos lehessen. Megvizsgáltam a módszer stabilitási kritériumát, amiben az irodalomban szokásostól eltérően figyelembe vettem a csillapításért felelős tagokat is. Vizsgáltam a diszkretizált egyenlet numerikus diszperzióját, és megállapítottam, hogy a gitár modellezésében nem jelent problémát. A húr paramétereinek (merevség, csillapítási együtthatók) megállapításához méréseket végeztem. A különféle játéktechnikákat intuitív módon modelleztem. A modellezett játéktechnikák körét bővíteni lehet: kezelni lehetne a húr nyújtását (a feszítőerő megnövelésével), és a fedlapra ütést is. A húr csatolását a fedlapra elnagyoltan kezeltem, itt továbbfejlesztési lehetőség lehet, hogy modellezük a húrok közti csatolást, ami azért lép fel, mert a húrok egy közös testre (a húrlábra) vannak rögzítve.

A gitár fedlapját a Kirchhoff-Love-féle lemezelmélet segítségével modelleztem, aminek az egyenletét véges differenciák módszerével oldottam meg. Összehasonlítottam

az irodalomban található adatokkal a szimulált lemezmodellt, hogy ellenőrizhessem annak helyességét. Emellett méréseket végeztem a gitáron, hogy összevethessem a szimulált gitár jellemzőit a valós gitáréval. A gitártest modelljének egy kézenfekvő továbbfejlesztési lehetősége, hogy modellezzük a test további részeit: az oldalfalat, hátlapot, és a legfontosabbat, a gitár testében lévő levegőt. Készítettem hangnyomás modellt a fedlaphoz, amiről az analízis során kiderült, hogy túlzó egyszerűsítéseket tartalmaz, mert a fedlap által kibocsátott hangok egy részét „eltünteti”. Tehát a sugárzásmodellen egyértelműen fejleszteni lehet a jövőben.

Megterveztem egy gitárra szabott kottaformátumot, amivel a modell minden paraméterét állítani lehet, és képes egy gitárra írt zenemű leírására. A modellt futtató szintetizátorprogramot C++-ban implementáltam. A teljes modell számítási igénye nagy, ezért nem fut valós időben. Ugyanakkor, ha csak a húrmodell aktív, akkor a szimuláció képes valós időben futni, ami segít abban, hogy a felhasználó a kottát megírja (a kotta módosítása után nem szükséges várni a eredményre, hanem azonnal meg lehet hallgatni).

A modell által kibocsátott hang minősége nem tökéletes (mellékletben meghallgatható, a 2-es számú hangfájl). Egyértelműen gitárszerű, de nincs szép hangja. Ennek elsődleges okai az egyszerű sugárzásmodell, és az, hogy a gitár testében rezgő levegőt nem modellezem. A nem megfelelő hangminőségnek további oka lehet a fedlap paramétereinek nem megfelelő megválasztása: a tapasztalat azt mutatja, hogy ezek nagyon befolyásolják a kiadott hang minőségét. Megváltoztatva az erősítő bordázat geometriáját, teljesen átalakulhat a kiadott hang spektruma (erre egy példa a 3-as számú hangfájl a mellékletben): bizonyos bordázatok „csilingelő”, mások „doboz” jellegű hangot okoznak. Az további kutatás tárgya lehet, hogy a fedlap paramétereire milyen módon befolyásolják a hangot. Kifejleszhető lehetne egy approximációs eljárás, ami egy referencia fedlap impulzusválasza alapján megpróbálná a szimulált fedlap paramétereit úgy beállítani, hogy az minél jobban hasonlítson a referenciára.

A modell által kibocsátott hang minőségének javítására adok egy megoldást: a fedlap fizikai modelljét lehetőség van kicserélni egy mért gitár hangnyomás-impulzusválaszára. Ennek a megoldásnak jobb a hangminősége (melléklet, 4-es számú hangfájl), de még ez sem kielégítő (aminek egyik fő oka az, hogy az impulzusválaszt szolgáltató gitár is rossz minőségű).

Irodalomjegyzék

- [1] Szigetvári Andrea, Loch Gergely. *Az elektroakusztikus zene története*. Typotex Kiadó, 2014
- [2] Kevin Karplus, Alex Strong. Digital Synthesis of Plucked String and Drum Timbres. *Computer Music Journal* (1983) **7**(2): 43-55
- [3] D'Addario. A complete technical reference for fretted instrument string tensions. URL: http://www.daddario.com/upload/tension_chart_13934.pdf
- [4] Vesa Välimäki, Jyri Pakarinen, Cumhur Erkut and Matti Karjalainen. Discrete-time modelling of musical instruments *Reports on Progress in Physics* (2006) **69**(1): 1-78
- [5] Neville H. Fletcher, Thomas D. Rossing. *The Physics of Musical Instruments*. Springer-Verlag, New York, USA, 2nd edition, 1998.
- [6] Balázs Bank. Physics-based Sound Synthesis of String Instruments Including Geometric Nonlinearities, Ph.D. thesis, Budapest University of Technology and Economics, 2006.
- [7] Stefan Bilbao. *Numerical Sound Synthesis: finite difference schemes and simulation in musical acoustics*. John Wiley and Sons, New York, USA, 2009.
- [8] Radnai Gyula. A hajlításról. *KöMaL*, 2005. április
- [9] John C. Strikwerda. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*. SIAM, Philadelphia, USA, 2nd edition, 2004.
- [10] N. Giordano and J. Roberts. Musical Acoustics and Computational Science. *International Conference on Computational Science* (2001): 1041-1050
- [11] Maria Pavlidou. A physical model of the string-finger interaction on the classical Guitar, Ph.D. thesis, University of Wales, Cardiff, 1997.
- [12] S. Timoshenko. *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill Book Company, New York, USA, 2nd edition, 1959, Reissued in 1987.
- [13] A. Chaigne and C. Lambourg. Time-domain simulation of damped impac-

- ted plates. I. Theory and experiments, *Journal Acoustical Society of America* (2001), **109**(4): 1422-1432
- [14] C. Lambourg, A. Chaigne and D. Matignon. Time-domain simulation of damped impacted plates. II. Numerical model and results, *Journal Acoustical Society of America* (2001), **109**(4): 1433-1447
- [15] A. W. Leissa. The free vibration of rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration* (1973) **31**(3): 257-293
- [16] Julius O. Smith III. *Physical Audio Signal Processing for Virtual Musical Instruments and Audio Effects* W3K Publishing, 2010.
- [17] E. V. Jansson. Coupling of string motions to top plate modes in a guitar. *Speech Transmission Laboratory. Quarterly Progress and Status Reports* (1973), **14**(4): 19-38
- [18] Grégoire Derveaux, Antoine Chaigne, Patrick Joly and Eliane Bécache. Time-domain simulation of a guitar: Model and method, *Journal Acoustical Society of America* (2003), **114**(6): 3368-3383
- [19] Horváth Gábor. *Neurális hálózatok és műszaki alkalmazásai*. Műegyetemi Kiadó, 1998.
- [20] Giuseppe Cuzzucoli and Vincenzo Lombardo. A Physical Model of the Classical Guitar, Including the Player's Touch. *Computer Music Journal* (1999), **23**(2): 52-69
- [21] Howard Wright. The acoustics and psychoacoustics of the guitar, Ph.D. thesis University of Wales, 1996.
- [22] Lawrence E. Kinsler, Austin R. Frey, Alan B. Coppens and James V. Sanders. *Fundamentals of acoustics*. John Wiley and Sons, New York, USA, 4th edition, 2000.
- [23] M. Bertero and P. Boccacci. *Inverse problems in imaging*. Institute of Physics Publishing, Bristol, UK, 1998.

A. függelék

Deriváltak közelítése

A.1. Elsőrendű derivált közelítése nem centrálisan

Az f függvény Taylor sora x körül kifejtve:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + O(\Delta x^2).$$

Az egyenletből f' -et kifejezve a következőt kapjuk:

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + O(\Delta x).$$

A.2. Elsőrendű derivált közelítése centrálisan

Az f függvény Taylor sora x körül kifejtve:

$$f(x - \Delta x) = f(x) - f'(x)\Delta x + f''(x)\Delta x^2 + O(\Delta x^3),$$

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + f''(x)\Delta x^2 + O(\Delta x^3).$$

Az egyenletekből f' -et kifejezve a következőt kapjuk:

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2).$$

A.3. Másodrendű derivált közelítése centrálisan

Az f függvény Taylor sora x körül kifejtve:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2}\Delta x^2 + \frac{f'''(x)}{6}\Delta x^3 + O(\Delta x^4),$$

$$f(x - \Delta x) = f(x) - f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2}\Delta x^2 - \frac{f'''(x)}{6}\Delta x^3 + O(\Delta x^4).$$

A két egyenletből f'' -et kifejezve a következőt kapjuk:

$$f''(x) = \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2).$$

A.4. Másodrendű derivált közelítése, általános eset

Az f függvény Taylor sora x körül kifejtve:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2}\Delta x^2 + O(\Delta x^3).$$

Ezt a képletet három különböző Δx -re felírva a következőt kapjuk:

$$\begin{bmatrix} f(x + \Delta x_1) - O(\Delta x_1^3) \\ f(x + \Delta x_2) - O(\Delta x_2^3) \\ f(x + \Delta x_3) - O(\Delta x_3^3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta x_1 & \frac{\Delta x_1^2}{2} \\ 1 & \Delta x_2 & \frac{\Delta x_2^2}{2} \\ 1 & \Delta x_3 & \frac{\Delta x_3^2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x) \\ f'(x) \\ f''(x) \end{bmatrix}.$$

A deltákból képzett 3x3-as mátrixot invertálva f'' -re a következőt kapjuk:

$$f''(x) = 2 \left(\frac{f(x + \Delta x_1) - O(\Delta x_1^3)}{(\Delta x_2 - \Delta x_1)(\Delta x_3 - \Delta x_1)} + \frac{f(x + \Delta x_2) - O(\Delta x_2^3)}{(\Delta x_1 - \Delta x_2)(\Delta x_3 - \Delta x_2)} + \frac{f(x + \Delta x_3) - O(\Delta x_3^3)}{(\Delta x_1 - \Delta x_3)(\Delta x_2 - \Delta x_3)} \right).$$

Legyen $\Delta x_2 = 0$, $\Delta x_1 < 0 < \Delta x_3$, $d_{-1} = -\Delta x_1$, $d_0 = \Delta x_3$, E pedig abszolút értékben legnagyobb Δx . Ekkor:

$$f''(x) = 2 \left(\frac{f(x - d_{-1})}{d_{-1}(d_0 + d_{-1})} - \frac{f(x)}{d_{-1}d_0} + \frac{f(x + d_0)}{(d_{-1} + d_0)d_0} \right) + O(E). \quad (\text{A.1})$$

Megjegyzés: ebbe az eredménybe behelyettesíthetnénk a centrális esetet is ($d_{-1} = d_0 = \Delta x$), az eredmény ugyanaz lenne, mint a A.3. fejezetben, csak a hiba becslése lenne rosszabb (itt a hiba lineáris, A.3-ben pedig négyzetes).

Ha a $\Delta x_1 = 0$, $\Delta x_2 = -\Delta t$ és $\Delta x_3 = -2\Delta t$ helyettesítéssel élünk, akkor a következő eredményt kapjuk (retrográd differencia):

$$f''(t) = \frac{f(t) - 2f(t - \Delta t) + f(t - 2\Delta t)}{\Delta t^2} + O(\Delta t).$$

A.5. Negyedrendű derivált közelítése centrálisan

Az f függvény Taylor sora x körül kifejtve:

$$\begin{aligned}
 f(x + \Delta x) &= f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2}\Delta x^2 + \frac{f'''(x)}{6}\Delta x^3 \\
 &\quad + \frac{f''''(x)}{24}\Delta x^4 + \frac{f''''(x)}{120}\Delta x^5 + O(\Delta x^6), \\
 f(x + 2\Delta x) &= f(x) + 2f'(x)\Delta x + 4\frac{f''(x)}{2}\Delta x^2 + 9\frac{f'''(x)}{6}\Delta x^3 \\
 &\quad + 16\frac{f''''(x)}{24}\Delta x^4 + 25\frac{f''''(x)}{120}\Delta x^5 + O(\Delta x^6), \\
 f(x - \Delta x) &= f(x) - f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2}\Delta x^2 - \frac{f'''(x)}{6}\Delta x^3 \\
 &\quad + \frac{f''''(x)}{24}\Delta x^4 - \frac{f''''(x)}{120}\Delta x^5 + O(\Delta x^6), \\
 f(x - 2\Delta x) &= f(x) - 2f'(x)\Delta x + 4\frac{f''(x)}{2}\Delta x^2 - 9\frac{f'''(x)}{6}\Delta x^3 \\
 &\quad + 16\frac{f''''(x)}{24}\Delta x^4 - 25\frac{f''''(x)}{120}\Delta x^5 + O(\Delta x^6).
 \end{aligned}$$

Az egyenletekből f'''' -et kifejezve a következőt kapjuk:

$$f''''(x) = \frac{f(x + 2\Delta x) - 4f(x + \Delta x) + 6f(x) - 4f(x - \Delta x) + f(x - 2\Delta x)}{\Delta x^4} + O(\Delta x^2).$$

A.6. Negyedrendű derivált közelítése, általános eset

Az f függvény Taylor sora x körül kifejtve:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2}\Delta x^2 + \frac{f'''(x)}{6}\Delta x^3 + \frac{f''''(x)}{24}\Delta x^4 + O(\Delta x^5).$$

Ezt a képletet öt különböző Δx -re felírva a következőt kapjuk:

$$\begin{bmatrix} f(x + \Delta x_1) - O(\Delta x_1^5) \\ f(x + \Delta x_2) - O(\Delta x_2^5) \\ f(x + \Delta x_3) - O(\Delta x_3^5) \\ f(x + \Delta x_4) - O(\Delta x_4^5) \\ f(x + \Delta x_5) - O(\Delta x_5^5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta x_1 & \frac{\Delta x_1^2}{2} & \frac{\Delta x_1^3}{6} & \frac{\Delta x_1^4}{24} \\ 1 & \Delta x_2 & \frac{\Delta x_2^2}{2} & \frac{\Delta x_2^3}{6} & \frac{\Delta x_2^4}{24} \\ 1 & \Delta x_3 & \frac{\Delta x_3^2}{2} & \frac{\Delta x_3^3}{6} & \frac{\Delta x_3^4}{24} \\ 1 & \Delta x_4 & \frac{\Delta x_4^2}{2} & \frac{\Delta x_4^3}{6} & \frac{\Delta x_4^4}{24} \\ 1 & \Delta x_5 & \frac{\Delta x_5^2}{2} & \frac{\Delta x_5^3}{6} & \frac{\Delta x_5^4}{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x) \\ f'(x) \\ f''(x) \\ f'''(x) \\ f''''(x) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

A deltákból képzett 5x5-ös mátrixot invertálva f'''' -re a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} f''''(x) = 24 & \left(\frac{f(x + \Delta x_1) - O(\Delta x_1^5)}{(\Delta x_2 - \Delta x_1)(\Delta x_3 - \Delta x_1)(\Delta x_4 - \Delta x_1)(\Delta x_5 - \Delta x_1)} \right. \\ & + \frac{f(x + \Delta x_2) - O(\Delta x_2^5)}{(\Delta x_1 - \Delta x_2)(\Delta x_3 - \Delta x_2)(\Delta x_4 - \Delta x_2)(\Delta x_5 - \Delta x_2)} \\ & + \frac{f(x + \Delta x_3) - O(\Delta x_3^5)}{(\Delta x_1 - \Delta x_3)(\Delta x_2 - \Delta x_3)(\Delta x_4 - \Delta x_3)(\Delta x_5 - \Delta x_3)} \\ & + \frac{f(x + \Delta x_4) - O(\Delta x_4^5)}{(\Delta x_1 - \Delta x_4)(\Delta x_2 - \Delta x_4)(\Delta x_3 - \Delta x_4)(\Delta x_5 - \Delta x_4)} \\ & \left. + \frac{f(x + \Delta x_5) - O(\Delta x_5^5)}{(\Delta x_1 - \Delta x_5)(\Delta x_2 - \Delta x_5)(\Delta x_3 - \Delta x_5)(\Delta x_4 - \Delta x_5)} \right). \end{aligned}$$

Legyen $\Delta x_3 = 0$, $\Delta x_1 < \Delta x_2 < 0 < \Delta x_4 < \Delta x_5$, $d_{-2} = -\Delta x_1 + \Delta x_2$, $d_{-1} = -\Delta x_2$, $d_0 = \Delta x_4$, $d_1 = \Delta x_5 - \Delta x_4$, E pedig abszolút értékben legnagyobb Δx . Ekkor:

$$\begin{aligned} f''''(x) = 24 & \left(\frac{f(x - d_{-1} - d_{-2})}{d_{-2}(d_{-1} + d_{-2})(d_0 + d_{-1} + d_{-2})(d_0 + d_1 + d_{-1} + d_{-2})} \right. \\ & - \frac{f(x - d_{-1})}{d_{-2}d_{-1}(d_0 + d_{-1})(d_0 + d_1 + d_{-1})} \\ & + \frac{f(x)}{(d_{-1} + d_{-2})d_{-1}d_0(d_0 + d_1)} \\ & - \frac{f(x + d_0)}{(d_{-1} + d_{-2} + d_0)(d_{-1} + d_0)d_0d_1} \\ & \left. + \frac{f(x + d_0 + d_1)}{(d_{-1} + d_{-2} + d_0 + d_1)(d_{-1} + d_0 + d_1)(d_0 + d_1)d_1} \right) + O(E). \end{aligned}$$

Megjegyzés: hasonlóan f'''' -hez, f'' -t is ki lehet fejezni (A.2)-ből, ezáltal pontosabb közelítést érhetünk el (A.1)-nél ($O(E)$ helyett $O(E^3)$ a közelítés hibája).

B. függelék

Húregyenlet diszkretizációja

Használjuk a következő jelöléseket (x_i az i -edik pont koordinátája):

$$w_i^m = w(x_i, m\Delta t),$$

$$d_i = x_{i+1} - x_i.$$

Az A. függelékben leírt közelítések segítségével a következő összefüggések írhatóak fel a (2.5) egyenletben lévő tagokra:

$$\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \approx \frac{w_i^{m+1} - 2w_i^m + w_i^{m-1}}{\Delta t^2},$$

$$\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \approx 2 \left(\frac{w_{i-1}^m}{d_{i-1}(d_i + d_{i-1})} - \frac{w_i^m}{d_{i-1}d_i} + \frac{w_{i+1}^m}{d_i(d_i + d_{i-1})} \right),$$

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \approx \frac{w_i^m - w_i^{m-1}}{\Delta t},$$

$$\frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial t \partial x^2} \approx \frac{2}{\Delta t} \left(\frac{w_{i-1}^m - w_{i-1}^{m-1}}{d_{i-1}(d_i + d_{i-1})} - \frac{w_i^m - w_i^{m-1}}{d_{i-1}d_i} + \frac{w_{i+1}^m - w_{i+1}^{m-1}}{d_i(d_i + d_{i-1})} \right),$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} \approx & 24 \left(\frac{w_{i-2}^m}{d_{i-2}(d_{i-1} + d_{i-2})(d_i + d_{i-1} + d_{i-2})(d_i + d_{i+1} + d_{i-1} + d_{i-2})} \right. \\
& - \frac{w_{i-1}^m}{d_{i-2}d_{i-1}(d_i + d_{i-1})(d_i + d_{i+1} + d_{i-1})} \\
& + \frac{w_i^m}{(d_{i-1} + d_{i-2})d_{i-1}d_i(d_i + d_{i+1})} \\
& - \frac{w_{i+1}^m}{(d_{i-1} + d_{i-2} + d_i)(d_{i-1} + d_i)d_id_{i+1}} \\
& \left. + \frac{w_{i+2}^m}{(d_{i-1} + d_{i-2} + d_i + d_{i+1})(d_{i-1} + d_i + d_{i+1})(d_i + d_{i+1})d_{i+1}} \right).
\end{aligned}$$

Az (2.5) egyenletbe helyettesítve a közelítéseket, és w_i^{m+1} -t kifejezve a következő összefüggésre jutunk:

$$\begin{aligned}
w_i^{m+1} = & w_{i-2}^m \frac{-24EI\Delta t^2}{\mu d_{i-2}(d_{i-1} + d_{i-2})(d_i + d_{i-1} + d_{i-2})(d_i + d_{i+1} + d_{i-1} + d_{i-2})} \\
& + w_{i-1}^m \left(\frac{2\Delta t(T\Delta t + \mu b_2)}{\mu d_{i-1}(d_{i-1} + d_i)} + \frac{24EI\Delta t^2}{\mu d_{i-2}d_{i-1}(d_i + d_{i-1})(d_i + d_{i+1} + d_{i-1})} \right) \\
& + w_i^m \left(2 - b_1\Delta t - \frac{2\Delta t(T\Delta t + \mu b_2)}{\mu d_{i-1}d_i} + \frac{-24EI\Delta t^2}{\mu(d_{i-2} + d_{i-1})d_{i-1}d_i(d_i + d_{i+1})} \right) \\
& + w_{i+1}^m \left(\frac{2\Delta t(T\Delta t + \mu b_2)}{\mu d_i(d_{i-1} + d_i)} + \frac{24EI\Delta t^2}{\mu(d_{i-1} + d_{i-2} + d_i)(d_{i-1} + d_i)d_id_{i+1}} \right) \\
& + w_{i+2}^m \frac{-24EI\Delta t^2}{\mu(d_{i-1} + d_{i-2} + d_i + d_{i+1})(d_{i-1} + d_i + d_{i+1})(d_i + d_{i+1})d_{i+1}} \\
& + w_{i-1}^{m-1} \frac{-2b_2\Delta t}{d_{i-1}(d_{i-1} + d_i)} \\
& + w_i^{m-1} \left(-1 + b_1\Delta t + \frac{2b_2\Delta t}{d_{i-1}d_i} \right) \\
& + w_{i+1}^{m-1} \frac{-2b_2\Delta t}{d_i(d_{i-1} + d_i)}.
\end{aligned}$$

C. függelék

Másodfokú függvény gyökei abszolútértékének ≤ 1 feltétele

Tekintsük a $x^2 + bx + c = 0$ egyenletet. Kérdés, hogy milyen b és c értékekre lesz igaz az összes gyökre, hogy $|x| \leq 1$. Az egyenlet gyökei:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

Ha $b^2 - 4c \geq 0$ és $b \geq 0$, akkor ennek az egyenlőtlenségnek kell igaznak lennie:

$$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \geq -1,$$

amiből ez a feltétel számolható:

$$c \geq b - 1, b \leq 2.$$

Hasonlóan, ha $b^2 - 4c \geq 0$ és $b < 0$, akkor ennek az egyenlőtlenségnek kell igaznak lennie:

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \leq 1,$$

amiből ez a feltétel számolható:

$$c \geq -b - 1, b \geq -2.$$

Ha $b^2 - 4c < 0$, akkor ennek az egyenlőtlenségnek kell igaznak lennie:

$$\frac{|-b + j\sqrt{4c - b^2}|}{2} \leq 1,$$

amiből ez a feltétel számolható:

$$c \leq 1.$$

A három eset uniója adja a megoldást: $|c| \leq 1$ és $c \geq |b| - 1$.

D. függelék

Húregyenlet erősítési tényezőjének $c \geq |b| - 1$ vizsgálata

A húregyenlet stabilitás vizsgálatánál a következő összefüggésre jutottunk:

$$b = -2K_0 \cos(2\omega) - 2K_1 \cos(\omega) - K_2,$$

$$c = -2K_3 \cos(\omega) - K_4 = 0.$$

Kérdés, hogy milyen $K_{1..5}$ mellett teljesül a $c \geq |b| - 1$ egyenlőtlenség (bármilyen ω mellett). Helyettesítsük be az egyenlőtlenségbe a b és c tagokat, majd fordítsuk meg az egyenlőtlenséget. Azaz azt vizsgáljuk, hogy mikor lehet ω -nak olyan értéke, amikor a fordított egyenlőtlenség igaz, tehát a rendszer instabil.

$$-2K_3 \cos(\omega) - K_4 < | -2K_0 \cos(2\omega) - 2K_1 \cos(\omega) - K_2 | - 1.$$

Jelöljük s -sel az abszolút értékben lévő tag előjelét:

$$s = \operatorname{sgn}(-2K_0 \cos(2\omega) - 2K_1 \cos(\omega) - K_2). \quad (\text{D.1})$$

Használjuk fel s -et az abszolút érték kiváltására, és rendezzük át az egyenletet. Ezzel a következőre jutunk:

$$-K_4 + K_2 s + 1 < -2K_0 \cos(2\omega) s - 2(K_1 s - K_3) \cos(\omega). \quad (\text{D.2})$$

Az egyenlőtlenséget csak a jobb oldal lokális maximum helyein kell megvizsgálni, mivel ha ezekben a pontokban az egyenlőtlenség nem igaz, akkor semmilyen ω mellett sem lehet igaz. Tehát keressük azokat az ω értékeket, ahol jobb oldal deriváltja 0-t vesz fel:

$$4K_0 \sin(\omega) \cos(\omega)s + (K_1s - K_3) \sin(\omega) = 0. \quad (\text{D.3})$$

Az első lehetséges zérus helyek azonnal látszanak: $\omega = k\pi$. Helyettesítsük be ezt (D.2)-be:

$$-K_4 + K_2s + 1 < -2K_0 \cos(2k\pi)s - 2(K_1s - K_3) \cos(k\pi).$$

Ez az egyenlőtlenséget a \cos periódikussága miatt csak két k értéknél kell megvizsgálni. Helyettesítsük be a $k = 0, 1$ értéket (D.1) és (D.2)-be! $k = 0$ eset:

$$s = \text{sgn}(-2K_0 - 2K_1 - K_2),$$

$$-K_4 + K_2s + 1 < -2K_0s - 2(K_1s - K_3).$$

Behelyettesítve s -et az egyenlőtlenségbe, a következőt kapjuk:

$$-K_4 + 1 - 2K_3 < | -2K_0 - 2K_1 - K_2 |.$$

Ez az első eredmény: ha ez igaz, akkor az egyenlet nem stabil. A $k = 1$ esetet hasonlóan lehet levezetni, a feltétel a következőnek adódik:

$$-K_4 + 1 + 2K_3 < | -2K_0 + 2K_1 - K_2 |.$$

(D.3)-nek lehetnek további zérushelyei: osszuk el az egyenletet $\sin(\omega)$ -val, és rendezzük $\cos(\omega)$ -ra:

$$\cos(\omega) = -\frac{K_1s - K_3}{4K_0s}. \quad (\text{D.4})$$

Ez az összefüggés akkor teljesíthető, ha:

$$\left| \frac{K_1s - K_3}{4K_0s} \right| \leq 1. \quad (\text{D.5})$$

Ekkor az (D.3) egyenletnek további zérushelyei vannak. Helyettesítsük be (D.4)-t (D.1)-be és (D.2)-be:

$$s = \operatorname{sgn} \left(\frac{K_1^2 - K_3^2}{4K_0} + 2K_0 - K_2 \right), \quad (\text{D.6})$$

$$-K_4 + 1 + K_2s < \frac{(K_1s - K_3)^2}{4K_0s} + 2K_0s. \quad (\text{D.7})$$

Ennek az esetnek az ellenőrzése a következő: először kiszámoljuk s értékét (D.6) alapján. Ezek után ellenőrizzük, hogy (D.5) igaz-e. Ha igen, akkor ellenőrizzük, hogy (D.7) igaz-e. Ha igen, akkor az egyenlet nem stabil. Ha a felsorolt összes feltétel hamisnak bizonyul, akkor az egyenlet stabil.

E. függelék

Egy példa kottafájl

Ez a kottafájl egy akusztikus gitár fizikai paramétereit, és a „Dust in the wind” című zeneszám első négy ütemét tartalmazza:

```
//  
// fizikai paraméterek  
//  
define gs = guitar_string {  
    length = 0.65  
    damping1y = 0.5  
    damping2y = 0.0008  
    damping1z = 0.5  
    damping2z = 0.0008  
    outputVolume = 2  
}  
gs {  
    name = E  
    nNodes = 300  
    tension = 92.819  
    linearDensity = 0.0080876  
    stiffness = 0.00014  
}  
gs {  
    name = A  
    nNodes = 300  
    tension = 113.5751  
    linearDensity = 0.0055583  
    stiffness = 0.00014  
}  
gs {  
    name = D  
    nNodes = 300  
    tension = 122.7168  
    linearDensity = 0.003368  
    stiffness = 0.00014  
}  
gs {  
    name = G  
    nNodes = 250  
    tension = 125.2231  
    linearDensity = 0.0019288  
    stiffness = 0.00014  
}  
gs {  
    name = B  
    nNodes = 200  
    tension = 79.9092  
    linearDensity = 0.00077539  
    stiffness = 0.00016  
}  
gs {  
    name = e  
    nNodes = 200  
    tension = 72.6336  
    linearDensity = 0.00039555  
    stiffness = 0.00004  
}
```

```

sound_board {
  height = 0.0029
  density = 350
  e1 = 10.2e9
  e2 = 0.6e9
  e3 = 0.9e9
  e4 = 2.4e9
  damping = 7

  damping1.r1 = 8.18e-3
  damping1.s1 = 3.2e3
  damping1.r2 = 10e-3
  damping1.s2 = 50.2e3

  damping3.r1 = 16.7e-3
  damping3.s1 = 1.1e3
  damping3.r2 = 70e-3
  damping3.s2 = 50.2e3

  damping4.r1 = 15.2e-3
  damping4.s1 = 1.75e3
  damping4.r2 = 35e-3
  damping4.s2 = 50.2e3

  outputVolume = 0.003
  deltaSpatial = 0.01
}
sound_board_boundary {
  condition = clamped
  segments = [
    -0.25 0
    -0.2493 -0.0179
    :
    -0.2493 0.0179
    -0.25 0
  ]
}
sound_board_boundary {
  condition = free
  segments = [
    0.0569 0 0.0601 -0.0159
    :
    0.0601 0.0159 0.0569 0
  ]
}
// bridge
sound_board_area {
  height = 0.006
  density = 400
  e1 = 0.96e9
  e2 = 0.6e9
  e3 = 10.8e9
  e4 = 3.34e9
  segments = [ -0.115 -0.06 -0.090 -0.06 -0.090 0.06 -0.115 0.06 -0.115 -0.06 ]
}
// strut
sound_board_area {
  height = 0.014
  density = 400
  e1 = 1.2e9
  e2 = 0.72e9
  e3 = 15e9
  e4 = 3.6e9
  segments = [ 0.17 -0.13 0.16 -0.13 0.16 0.13 0.17 0.13 0.17 -0.13 ]
}
// strut x1
sound_board_area {
  height = 0.014
  density = 400
  e1 = 1.2e9
  e2 = 0.72e9
  e3 = 15e9
  e4 = 3.6e9
  segments = [ 0.08 0.10 -0.15 -0.17 -0.16 -0.16 0.07 0.11 0.08 0.10 ]
}
// strut x2
sound_board_area {
  height = 0.014
  density = 400
  e1 = 1.2e9
  e2 = 0.72e9
  e3 = 15e9
  e4 = 3.6e9
  segments = [ 0.08 -0.10 -0.15 0.17 -0.16 0.16 0.07 -0.11 0.08 -0.10 ]
}
define as = attach_string {
  parallelCoupling = 1
  perpendicularCoupling = 1
}
as { string = E x = -0.1025 y = 0.025 }
as { string = A x = -0.1025 y = 0.015 }
as { string = D x = -0.1025 y = 0.005 }
as { string = G x = -0.1025 y = -0.005 }
as { string = B x = -0.1025 y = -0.015 }

```



```

as { string = e x = -0.1025 y = -0.025 }

define af = addFretting {
  string = $1
  fret = $2
  attackTime = 0.04
  damping1 = 100000
  force = 8
}
define rf = removeFretting {
  string = $1
  fret = $2
  releaseTime = 0.03
  damping1 = 100000
}
define pl = pluck {
  string = $1
  position = 0.17
  attackTime = 0.01
  sustainTime = 0.01
  releaseTime = 0.0
  force = 2
}

//
// a kotta
//

bpm 93;
-1/8 af A 3;
-1/8 af B 1;
  pl A; pl B;
  advance 2/4;

-1/8 af D 2;
  pl D;
  advance 1/4;

  pl G; advance 1/4;

  pl A; advance 1/4;
  pl B; advance 1/4;
  pl D; advance 1/4;
  pl G; advance 1/4;

// =====
-1/8 rf B 1;
  pl A; pl B;
  advance 2/4;

-1/8 af D 2;
  pl D;
  advance 1/4;

  pl G; advance 1/4;

  pl A; advance 1/4;
  pl B; advance 1/4;
  pl D; advance 1/4;
  pl G; advance 1/4;

// =====
-1/8 af B 3;
  pl A; pl B;
  advance 2/4;

-1/8 af D 2;
  pl D;
  advance 1/4;

  pl G; advance 1/4;

  pl A; advance 1/4;
  pl B; advance 1/4;
  pl D; advance 1/4;
  pl G; advance 1/4;

// =====
-1/8 af B 1;
-1/8 rf B 3;
  pl A; pl B;
  advance 2/4;

-1/8 af D 2;
  pl D;
  advance 1/4;

  pl G; advance 1/4;

  pl A; advance 1/4;
  pl B; advance 1/4;
  pl D; advance 1/4;
  pl G; advance 1/4;

```