

# **DIPLOMATERV**

Ébner Tibor  
2009.

# Tartalomjegyzék

<b>Kivonat</b>	<b>iii</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>1. Bevezető</b>	<b>1</b>
<b>2. Aktív zajcsökkentés</b>	<b>3</b>
2.1. Motiváció . . . . .	3
2.2. Adaptív zajcsökkentés . . . . .	4
<b>3. Adaptív IIR szűrők</b>	<b>8</b>
3.1. Rekurzív szűrőstruktúrák . . . . .	11
3.1.1. Direkt formák paraméterezése . . . . .	13
3.1.2. Normalizált lattice szűrő . . . . .	15
3.1.3. Kautz- és Laguerre-szűrő . . . . .	18
3.2. Klasszikus identifikáció és approximáció . . . . .	20
3.2.1. A Padé, EE és OE approximáció értelmezése Hankel-normával	21
3.2.2. Approximáció Hankel-normával . . . . .	23
3.2.3. $\mathcal{H}_2$ approximáció . . . . .	24
3.3. Idővariáns rekurzív szűrők stabilitása . . . . .	27
3.3.1. Stabilitásfogalmak, Ljapunov-módszer . . . . .	28
3.3.2. ODE módszer . . . . .	29
<b>4. Rekurzív adaptációs algoritmusok</b>	<b>31</b>
4.1. Sztochasztikus gradiens algoritmusok . . . . .	32
4.1.1. Algoritmusok direkt formára . . . . .	32
4.1.2. Lattice gradiens algoritmusok . . . . .	37
4.1.3. Alkalmazás aktív zajcsökkentésben . . . . .	44
4.2. RLS algoritmusok . . . . .	49
4.2.1. IIR-RLS algoritmusok . . . . .	51
4.2.2. Alkalmazás aktív zajcsökkentésben . . . . .	53
4.3. A Steiglitz-McBride algoritmusok családja . . . . .	53
4.3.1. Direkt formájú és lattice on-line algoritmus . . . . .	55
4.4. Hiperstabil algoritmusok . . . . .	58
4.4.1. HARF és SHARF . . . . .	59
4.4.2. Lattice SHARF változat . . . . .	62

---

<b>5. Szimulációk</b>	<b>63</b>
5.1. Az <i>ANCsim</i> környezet bemutatása . . . . .	64
5.2. Modellek és paraméterek . . . . .	66
5.3. Másodfokú rendszer zajjal terhelt identifikációja . . . . .	68
5.4. Ötödfokú rendszer zajmentes indentifikációja . . . . .	78
5.5. Aktív zajcsökkentés ( $F(z) = 0$ ) . . . . .	87
5.6. Aktív zajcsökkentés ( $F(z) \neq 0$ ) . . . . .	93
5.7. Következtetések . . . . .	97
<b>6. Utószó</b>	<b>99</b>
<b>A. Példa az <i>ANCsim</i> környezet használatára</b>	<b>105</b>

# Kivonat

A dolgozatban adaptív IIR szűrők aktív zajcsökkentésben való használatának lehetőségeit vizsgáljuk számítógépes szimulációk segítségével. Az adaptív rekurzív szűrőstruktúrák és adaptációs algoritmusok átfogó elméleti áttekintése után az ismert adaptív szűrőket egy saját fejlesztésű MATLAB szimulációs környezetben teszteljük, ahol lehetőség nyílik aktív zajcsökkentési problémákra jellemző, a realitáshoz közelítő körülmények kialakítására. Célunk, hogy egy potenciális fizikai rendszerimplementációhoz a szükséges előismereteket megszerezzük, az adaptív szűrők különféle tulajdonságairól egy, a tervezésben is jól alkalmazható, komparatív körképet adjunk.

Az aktív zajcsökkentés, mint a zaj- és rezgésvédelem egy ötletes és adott esetben igen hatékony formája, nyilvánvaló jelentőséggel bírhat korunk zajszennyezetségi viszonyai közepette. Amennyiben sikerül a technikai nehézségeket áthidalni, olcsó, széles körben alkalmazható, hathatós megoldást kínál számos, az iparban és a hétköznapi életben felmerülő problémára. Az aktív zajcsökkentő rendszerek kulcsfontosságú részét képezi az adaptív jelfeldolgozó egység. Ennek robusztussága, megfelelő (inverz) modellezési és követési képességei elengedhetetlenek egy gyakorlatban is jól működő rendszer létrehozásához.

Mind a mai napig az FxLMS algoritmusra – illetve variánsaira – épülő FIR szűrős implementációk a jellemzőek, annak ellenére, hogy jó néhány helyzetben, például akusztikai zajcsökkentésben, az adaptív IIR szűrők a gyakorlatban is igazolták az elmélettől várható zajelnyomás-növekedést. Komplex, modális viselkedést mutató, illetve inverz rendszerek kielégítő pontosságú modellezését az IIR szűrők kevesebb együtthatóval, és az ehhez tartozó kisebb számításigénnyel is biztosítani tudják, ami egyrészt költségtakarékossági szempontból előnyös, másrészt az együtthatók számának csökkenése végeredményében az adaptációs folyamat gyorsabb lefutását, kisebb beállási idejét eredményezheti. A fenti előnyöknek természetesen az árak is megvan.

Ha el is tekintünk az adaptációs algoritmusok bonyolódásától, akkor is szembe kell néznünk az adaptív IIR szűrőket kísérő konvergencia- és stabilitási problémákkal. Konzisztens elméleti keretrendszerben szerencsére a problémák jól vizsgálhatók, az évek során felgyülemlett, különböző irányú kutatások között pedig szép számmal találhatunk megoldási javaslatokat. Tökéletes megoldás persze nincs: a számítógépes szimulációk feltárják, hogy hogyan viselkednek, milyen tulajdonságokkal rendelkeznek a kiszemelt adaptív szűrők egy aktív zajcsökkentési összeállításban, milyen az egymáshoz való viszonyuk, teljesítményük. Arra a kérdésre, hogy vajon érdemes-e zajcsökkentésre IIR szűrőket használni, a szimulációk alapján mindenképpen igen feltehetjük, még ha – mint azt látni fogjuk – egyes megoldások jobban meg is felelnek a feladatnak, mint mások.





# Abstract

With the help of computer simulations, we are going to explore in this diploma thesis the feasibility and possible usage scenarios of adaptive IIR filters in the field of Active Noise Control. After a comprehensive review of the theoretical background of adaptive recursive filter structures and adaptation algorithms, we conduct a series of ANC simulation studies which were accomplished in a versatile MATLAB simulation environment developed by the author. Obtained simulation results then form the basis of assessment and considerations for physical ANC systems implementations and also serve as a useful comparative overview of adaptive IIR filters' performance characteristics in this setting.

Being an astute and sometimes very effective noise and vibration reduction technique, active noise control systems' ever-increasing role in the noisy environment we live in these days is easy to understand. ANC presents solutions in a wide range of applications scenarios, in all walks of life. As the adaptive control unit constitutes an essential part of working ANC systems, robustness, good (inverse) modeling and tracking properties of this is of utmost importance in any useful implementation.

Adaptive FIR filters with the corresponding FxLMS weight update algorithm—and its variants—have dominated the field of ANC for decades now, and even today their application is overwhelming, contrary to the fact that adaptive IIR filters turned out to realize their predicted noise reduction gain in a variety of practical situations, e.g. in acoustic environments. One can obtain a reasonably precise model of a complex system with modal behavior, or of an inverse system using less filter coefficients when IIR filters are utilized. Reduction in coefficient number will ease the computational burden and, in addition to that, speed up of convergence might be observed as a welcomed by-product. The advantages are not without a cost, however.

Neglecting the increased complexity of adaptations algorithms, there are also convergence and stability issues with IIR filters. Fortunately, it is possible to analyze and understand the nature of the problems in a consistent theoretical framework, and several solutions have been proposed in the literature as a result of decades of active research in the topic. There is no perfect solution, however: computer simulations are to examine the pre-selected adaptive filters' behavior, performance and relations to each other, particularly in ANC settings. Some filters are more apt than others. Nonetheless, the question of whether adaptive IIR filters have a place in active noise control has a truly positive answer, at least according to our simulations.

# 1. fejezet

## Bevezető

Az aktív zajcsökkentő rendszerek jelentősége vitathatatlan, elterjedtségük rohamos mértékben növekszik. Napjainkra már hétköznapi szórakoztató elektronikai cikkekben éppúgy megtaláljuk őket, mint ipari rendszerekben, gépjárművekben, középületekben, vasúti közlekedésben. A kutatások évtizedeken keresztül, több szálon folytak, a hardverek az elmélettel karöltve fejlődtek. A gyakorlati megvalósításokat a korszerű és olcsó tömegtermelés és a mára igencsak lerövidült termékfejlesztési ciklus hatékonyan támogatja; ennek is tudható be talán, hogy mindennapjaink részévé vált, és a jövőben még inkább válhat az aktív zajcsökkentés, annak minden – potenciális – előnyével együtt.

Az előnyök kézzelfoghatók, a zajcsökkentés jól működő rendszerekben jelentős és látványos lehet, a kutatások azonban természetesen nem álltak le. Egyfajta kiábrándultság, fásultság jelentkezett és kutatóintézetek fordultak el a témától, amikor a zajcsökkentő rendszerek elérni látszottak teljesítőképességük határait. Kiforrott módszerek alakultak ki a tervezésre, akusztikai és mechanikai jellegű problémák egész sorában nyert alkalmazást az elmélet, mégis érzékelhető volt, és érzékelhető még ma is, a korlát, mely igen szívósan ellenáll a fejlesztéseknek.

Az életben való elterjedésnek ez a tény nem feltétlenül szab határt, elvégre a jelenlegi eszközök is sokszor – szubjektíve – meglepően hatékony rendszerek megvalósítását teszik lehetővé bizonyos, jól definiált helyzetekben és környezetben. Kutatóként mégis az a természetes igényünk, hogy minél inkább kitágítsuk az elmélet és a gyakorlat határait, nem elégszünk meg pusztán „félmegoldásokkal”. Minthogy az adaptív szűrés, azon belül az aktív zajcsökkentés elméleti hátterét megalapozó kutatások túlnyomórészt transzverzális FIR szűrőkre alapulnak, egyik szempontból kézenfekvő lehetőség IIR struktúrák és adaptációs algoritmusok vizsgálata.

Mivel az IIR szűrők fizikai megfontolások alapján is kedvező helyzetben vannak, jó eséllyel számíthatunk a korlátok kitolódására abban az esetben, ha sikerül megtalálnunk azoknak a tervezési és analízis módszereknek a megfelelőit, amelyeket már sikerrel alkalmaztak FIR szűrős rendszerek megvalósításához. Eredményes, működőképes adaptív IIR realizációk létrehozásának elengedhetetlen feltétele a rendelkezésre álló algoritmusok lehetőségeinek és korlátainak ismerete, mind elméleti, mind pedig a mérnöki munkához szükséges gyakorlati szempontokból.

Egy diplomamunka keretein belül természetesen nem vállalkozhattam kimerítő elemzésre; még csak áttekintést adni a témáról sem kis feladat, lévén a rendelkezésre álló irodalom óriási. Az IIR szűrők aktív zajcsökkentő rendszerekben való alkalmazása mindamellet ma sem számít kimondottan közhelyszerű jelenségnek. Általá-

nos megoldásokat, algoritmusokat speciális helyzetekre alkalmazni csak megfelelő elméleti előkészítés után lehet, azt a nehézséget sem figyelmen kívül hagyva, hogy némelyik algoritmus működésének megértése – akár fejlesztési, akár implementálási szándékoktól vezérelve – önmagában is problematikus, nem kevés irodalomkutatást igényel(t).

Mindezeket előre vetítve dolgozatom célja, hogy a szükséges és kívánatos mélységű elméleti, történeti áttekintés után számítógépes szimulációk segítségével vizsgálja, alkalmazza „éles” helyzetekben a tárgyalásra kerülő algoritmusokat. Az elméleti megalapozottság és a szimulációk együtt lehetőséget biztosítanak arra, hogy egy valós, fizikai (DSP alapú) rendszer megvalósításához minden szükséges előzetes információt megszerezzünk, és a megfelelő algoritmus család és variáns kiválasztásra kerülhessen. A fejlesztői környezet és a hardver sajátosságaihoz igazodó kódolás ezek után már „könnyen” megtehető, az algoritmus szabad paramétereit pedig utólag, kísérleti, illetve tapasztalati úton hangolhatók. Ha a szimulációk előrejelzései elég pontosak, minden valószínűség szerint sok felesleges próbálkozással töltött fejlesztési idő takarítható meg.

A 2. fejezetben röviden bemutatom az aktív zajcsökkentés motivációját, történetét, eszközrendszerét. Az adaptív jelfeldolgozás tárgyalásmódjához illeszkedve ismertetem a zavarjelek fajtáit, a rendelkezésre álló zajcsökkentő struktúrákat, algoritmus típusokat.

Minden adaptív rendszernek két lényeges eleme van: egy adaptív szűrő, mely a bemeneti jelből valamilyen számunkra hasznos kimenetet produkál, illetve egy adaptációs algoritmus, mely az előbbi szűrő paramétereit hangolja. A 3. fejezetben az adaptív szűrőket vesszük közelebbről szemügyre, egyúttal előkészítjük a 4. fejezetben sorra kerülő adaptációs algoritmusok elméletileg megalapozott tárgyalását. Szó fog esni a különböző szűrő típusokról, az identifikáció és approximáció fajtáiról, valamint az idővariáns rendszerek stabilitásának kérdéseiről.

A szimulációkban használt algoritmusokat ismertetem a 4. fejezetben. Az egyes algoritmusok szélesebb áttekintésben, az irodalomban szokásos családokba csoportosítva kerülnek elő. A mögöttes megfontolások, a pseudokód és az általános jellemzők fényében figyelmet szentelünk az adott algoritmus aktív zajcsökkentésben előrevetíthető szerepének is.

Az 5. fejezetben szisztematikus, célzott szimulációkat végzünk annak kiderítésére, hogy milyen teljesítményt várhatunk a különböző szűrőstruktúráktól és adaptációs algoritmusoktól egy valós aktív zajcsökkentő rendszer részeként alkalmazva őket. Kijelöljük a vonatkozó teljesítményparamétereket és értékeljük a kapott adatokat. Futólag sort keríték annak a komplex MATLAB szimulációs környezetnek az ismertetésére is, melyet a dolgozat elkészítéséhez használtam.

Összegzem a tapasztalatokat és tanulságokat a 6. fejezetben, az elvégzett irodalomkutatás alapján pedig megkísérlem kijelölni az irányokat, motivációkat a lehetséges további kutatás számára. További ábrák, összefüggések és az *ANCsim* környezet részletes dokumentációja található meg a Függelékben.

Ezúton köszönöm konzulensem, Dr. Sujbert László iránymutató tanácsait, segítségét és támogatását, amelyek nagyban hozzájárultak a diplomamunka elkészüléséhez.

## 2. fejezet

# Aktív zajcsökkentés

A dolgozatban közölt eredmények, a levont következtetések elsődleges célja, hogy sikeres aktív zajcsökkentő rendszerek tervezésében és megvalósításában találjanak alkalmazásra. Az elméleti háttér, az adaptív szűrők és az algoritmusok analízisére és szintézisére vonatkozó ismeretek az irodalomban általános megfogalmazásban kerülnek elő, azokat az alkalmazás érdekében a megcélzott gyakorlati problémához kell igazítani. Első lépésként az aktív zajcsökkentés mögött meghúzódó rációt és az idő próbáját már kiállt módszereket vesszük górcső alá.

Az előrecsatolt (*feedforward*), szélessávú zajcsökkentő rendszer a szakterület átlatorvosi lova és Szent Grálja is egyben: szinte minden bevezető jellegű mű evvel a modellel – pontosabban annak egycsatornás változatával – kezdi az aktív zajcsökkentés elvének bemutatását, ugyanakkor ez az a struktúra, melyet az élet legtöbb területén szívesen látnánk viszont, több 10 dB-es zajelnyomás kíséretében. Az IIR szűrők alkalmazásának lehetőségét ebben az általános és igen sokoldalú struktúrában szeretnénk megvizsgálni. A későbbi fejezetek több pontján is jelentkezni fognak ennek következményei mint a lineáris modellre vonatkozó a priori feltevések, a kiválasztott teljesítményparaméterek és a kiértékelés szempontjai.

A zavarjelek sáv szélességére nem teszünk kikötéseket, itt csupán annyit jegyzünk meg, hogy aktív zajcsökkentő rendszerek hatékonyan kb. 500 Hz alatt működtethetők – ebben a sávban érdemes alkalmazni őket –, aminek többnyire praktikus okai vannak (lásd a következő pontban).

### 2.1. Motiváció

A civilizációs eredetű környezeti zajártalom gyors növekedése szembeötlő és nyugtalanító jelenség napjainkban. Szükséges volna valamilyen ellenintézkedés fogantatása, lehetőleg olyan, amely ésszerű ráfordítások mellett hatékony védelmet kínál. A zaj- és rezgésvédelem régóta sikerrel alkalmazza a passzív zajcsökkentési módszereket. A rezisztív (hangelnyelő) és reaktív (rezonátor) akusztikai elemek, illetve a tömeg-rugó rendszerek hathatós eszköznek bizonyulnak szélessávú zavarok (zajok) korlátozásánál mind akusztikai, mind mechanikai rendszerekben; kisfrekvencián azonban alkalmazásuk előnytelenné és drágává válik [1]. Az aktív zajcsökkentés (*Active Noise Control – ANC*) igyekszik orvosolni a problémát: megfelelő mértékű zajelnyomás kisfrekvencián, hely- és költségtakarékossággal párosulva.

Az ötlet nem új keletű, az első szabadalmat Lueg nyújtotta be 1936-ban [1]. Minthogy itt egy elektroakusztikus/elektromechanikus rendszerről van szó, amely a

szuperpozíció elvét kihasználva igyekeznek „ellenzajt” létrehozni, így érve el az óhajtott zajelnyomást – ideális esetben kioltást –, érezhető, hogy a 30-as évek technikai színvonala még nem tette lehetővé a gyakorlatban is működő berendezések készítését. Valóban, a relatíve gyors, valósidejű DSP hardverek megjelenése adott lökést a 80-as években a kutatásoknak. Korán világossá vált ugyanis, hogy a digitális jelfeldolgozás óriási előnyöket hordoz mind elméletben, mind a gyakorlatban [1].

Mivel a környezeti feltételek szinte sosem állandók sem az akusztikai, sem a mechanikai rendszerekben, ezért jogos elvárás zajcsökkentő berendezésekkel kapcsolatban, hogy azok képesek legyenek alkalmazkodni a változásokhoz, más szóval legyenek adaptívak. Valójában az adaptivitás az, ami kulcsfontosságú szerepet játszott/játszik abban, hogy a digitális, mintavételezett jelfeldolgozás mellett tesszük le a voksunkat (egy példa analóg rendszerre Morgan [2] cikkében). A megfelelő adaptivitás hatékony zajelnyomást és robusztusságot biztosít, egyszerűsítheti a rendszerek tervezését és üzembe helyezését, míg a digitális elektronika alapvető tulajdonságai közé tartozik a megbízhatóság, a stabilitás és a költséghatékonyság. Az adaptív rendszerek kutatása is a digitális forradalommal kapott lökést: bonyolult, kifinomult algoritmusok valósidejű futtatására csak gyors hardveren nyílik lehetőség.

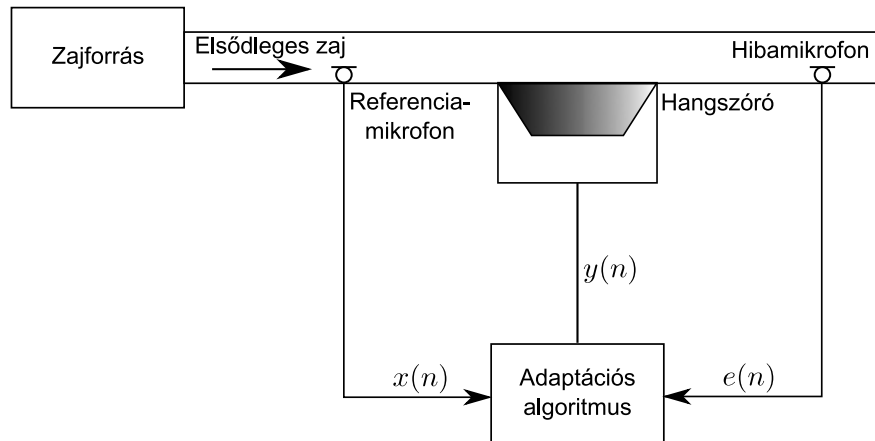
Adottak tehát a potenciális előnyök, a hatékony kisméretű zajelnyomás, a méret- és költségcsökkenés; úgy tűnik, a mikroelektronika a kívánt fejlettségi szintre jutott, érzékelőink és beavatkozóink, mikrofonjaink és hangsugárzóink jó paraméterekkel rendelkeznek, az adaptív jelfeldolgozás, azon belül is aktív zajcsökkentés mögött hatalmas tudásanyag halmozódott fel. A megvalósított rendszerek széles spektrumon mozognak ugyan, mégis általánosan jellemző teljesítményadat, hogy szélessávú zajelnyomás max. 15-20 dB érhető el [3]. A probléma természetének mélyrehatóbb vizsgálatához az adaptív jelfeldolgozás és szabályozás fogalomrendszerét hívjuk segítségül.

## 2.2. Adaptív zajcsökkentés

Az, hogy egy rendszer adaptív, annyit tesz: képes alkalmazkodni a változó környezeti feltételekhez. Alapvető különbség ez a hagyományos lineáris szabályozó- és jelfeldolgozó rendszerekhez képest. Adaptív szabályozásra két okból is szükség van: egyrészt tipikus aktív zajcsökkentési szituációkban a rendszer kulcsfontosságú elemeiről nem áll rendelkezésre mérési adat, matematikai modell, másrészt különböző fizikai paraméterek (hőmérséklet, páratartalom, áramlási sebesség stb.) széles határok között változhatnak, más szóval a rendszerünk a priori idővariáns.

Az adaptív szabályozó, más megközelítésben idővariáns szűrő, nemlineáris elem, jellemzéséhez egy hangolható struktúra és egy hangoló (adaptációs) algoritmus tartozik. Analízise, szintézise sokszor bonyolult, nemtriviális feladat, ellenben komoly előnyökkel kecsegtet, széleskörűen alkalmazható szabályozási, jelfeldolgozási, rendszeridentifikációs célokra. Az alkalmazásokban, legyenek bármily szerteágazóak is, jellegzetes elemeket mutatnak, mindegyikben többé-kevésbé beazonosítható valamilyen tiszta adaptív identifikációs vagy jelfeldolgozási modell.

A 2.1. ábra egy tipikus szélessávú, egycsatornás, előreecsatolt ANC rendszert ábrázol. Hosszú csövekben terjedő, akusztikai eredetű zajok (pl. szellőző- és légkondicionáló berendezések zaja) elnyomása az egyik első és ígéretes alkalmazása az említett rendszerstruktúrának, egyben demonstrációs célokra is kitűnő.



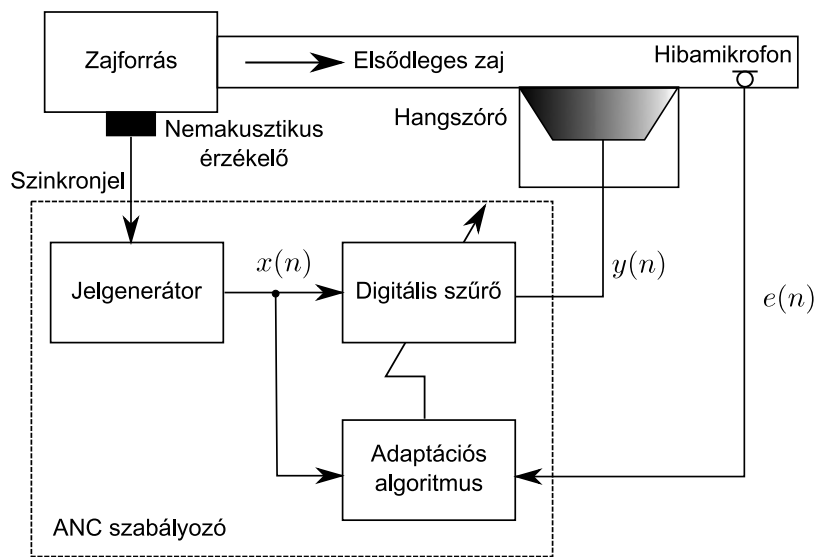
2.1. ábra. Előrecsatolt, egycsatornás, szélessávú aktív zajcsökkentő rendszer.

A referenciaérzékelő (itt mikrofon) szerepe, hogy a zajforrás folyamatról koherens mérési adatokat gyűjtsön. A méréshez természetesen zaj is adódik, melyet itt a zajfolyamattal nem korreláló jelforrásként értelmezünk. A referenciaérzékelő jele, a referenciajel a jelfeldolgozóba jut, mely a másodlagos zajforrást táplálja. A jelfeldolgozás célja, hogy az elsődleges zajfolyamat mintáiból előálljon a csendzóna létrehozásához szükséges ellenfázisú másodlagos zajfolyamat (zajjel). Egy hibaérzékelő (hibamikrofon) jele szolgáltatja az adaptációhoz szükséges vezérlőinformációt, így egy zárthurkú szabályozási kör valósul meg. Fontos, hogy itt a hibajel nem csatolódik vissza a rendszerbe. Káros visszacsatolás a másodlagos forrás és a referenciaérzékelő között lehetséges, ennek kivédésére és kompenzálására is léteznek stratégiák (lásd [3]). Később visszatérünk még a kérdésre.

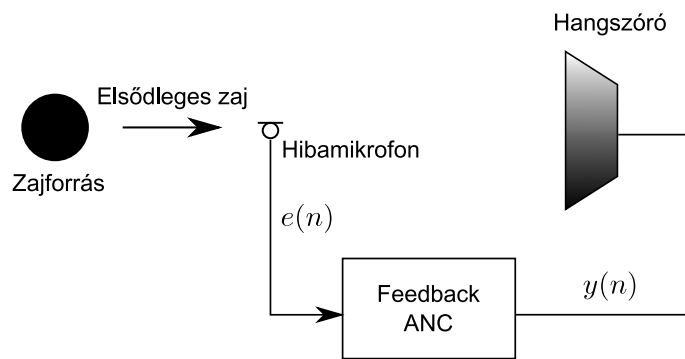
A zajelnyomás mértékét ebben az elrendezésben számos tervezési paraméter befolyásolja: a referenciamikrofon elhelyezése és zavarérzékenysége (légáramlás keltette turbulens hangok), a jelfeldolgozás bonyolultsága, sebessége, robusztussága, a másodlagos forrás sugárzási karakterisztikái és elhelyezése a hiba- és a referenciamikrofonhoz képest, a hibamikrofon átviteli tulajdonsága és zavarérzékenysége. Egyetlen másodlagos forrással – általában – csak síkhullámként terjedő zaj ellen vehetjük fel sikerrel a harcot, több módus megjelenése esetén, valamint kiterjedt csendzónák létrehozásához többcsatornás ANC rendszerekre van szükség (2.2c ábra), több referencia- és hibaérzékelővel, valamint másodlagos forrással [1].

Periodikus, tehát vonalas spektrumú zavarjelenségek a gyakorlati életben sűrűn fordulnak elő (pl. motorok, forgó alkatrészek), különbség a 2.1. ábrán szereplő elrendezéshez képest csak a referenciaérzékelőt tekintve jelentkezik (lásd 2.2a ábra). A referenciajel ebben az esetben a zavarjel periódusidejével egyező periódusidejű triggerjel (pl. fordulatszám-mérő impulzusai). A zajelnyomás érthető okokból – nincs a fenti visszacsatolás – nagyobb lehet, mint szélessávú esetben. Létezik még visszacsatolt ANC struktúra is (nincs referenciajel), ennek a struktúrának a jelentősége azonban társaiénál jóval kisebb (2.2b ábra).

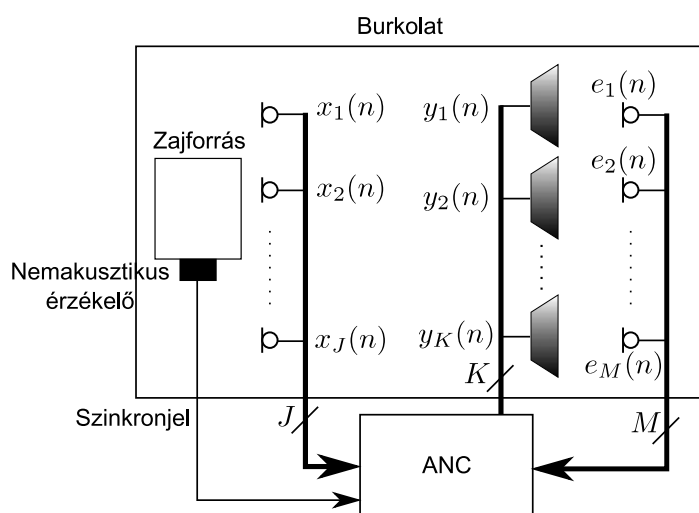
A jelfeldolgozás összetevőt tekintve, tervezési paraméterként különböző szűrőstruktúrákból és adaptációs algoritmusokból választhatunk. Végezhetünk szűrést direkt módon (FIR és IIR szűrők), lattice struktúrában és transzformált tartományban (pl. frekvenciatartomány) is [1]. A lehetséges adaptációs algoritmusok a szű-



(a)



(b)



(c)

2.2. ábra. ANC struktúrák: (a) keskenysávú; (b) feedback; (c) többcsatornás.



rőstruktúrához igazodnak, és eltérőek az adaptív modell típusától függően is (polinomiális vagy racionális átviteli függvény-modellek). Elmondható, hogy jelenleg az adaptív transzverzális (FIR) szűrőstruktúra – FxLMS algoritmus páros dominál a működő rendszerekben, lévén a tervezési módszerek jól kidolgozottak, a konvergencia kézben tartható és előzetes teljesítménybecslés is lehetséges. A kutatások azonban mára már kimeríteni látszanak az ebben a kombinációban rejlő lehetőségeket [6, Bevezetés].

Az adaptív jelfeldolgozás önálló szakterület [4], kölcsönhatásban a jelfeldolgozással, a szabályozáselmélettel, a nemlineáris rendszerek elméletével, valamint a már említett rendszeridentifikációval. Az ANC probléma az adaptív modellezés, vagy, mint később látni fogjuk, adaptív approximáció egy alkalmazási területeként rendelkezik bizonyos specialitásokkal ugyan, összességében a jelfeldolgozási elmélet természetesen nem elsősorban az aktív zajcsökkentéshez kötődik. Ebből következik, hogy a jelfeldolgozási kutatások az ANC rendszerek fejlesztésétől függetlenül folytathatók, és az elért, sokszor tiszta elméleti eredmények nem feltétlenül csatolódnak vissza a tervezésbe. Másrészt megvizsgálandó az is, hogy az algoritmusok fejlődésétől milyen realizálható zajelnyomás-javulás várható. A javulás mértéke erősen függhet az adott realizáció egyéb sajátosságaitól, kívánalmaitól, hivatkozva mindenekelőtt a Morgan által felállított ANC tervezési és értékelési szempontrendszerre [3, 14. oldal].

Mivel magyarázhatjuk tehát a fentebbi állítás igazságát, miszerint az aktív zajcsökkentés potenciális előnyeit nem feltétlenül sikerült a gyakorlatban kiaknázni? A Morgan-féle hierarchikus értékelés világosan mutatja, hogy elméleti és gyakorlati korlátok is léteznek. A gyakorlati korlátok feloldására általános lehetőség az érzékelők és másodlagos források releváns paramétereinek javítása, a hardverek gyorsítása. A zajcsökkentési környezet (akusztikus vagy mechanikus) alapos megismerése modellezés és szimulációk útján segítheti a érzékelők és másodlagos források megfelelő elhelyezését [3, 4. oldal] (ehhez kapcsolódik még a megfelelő pszichoakusztikai zajosság-kritérium felállítása is). Végül javítható az adaptációs algoritmus, esetleg a szűrőstruktúra, és megalapozott elméleti háttér mentén az adott alkalmazáshoz leginkább illő szűrőstruktúra-algoritmus páros kiválasztása biztosítható. Ez utóbbi alkotóelem az, mellyel dolgozatomban részletesen foglalkozom.

## 3. fejezet

# Adaptív IIR szűrők

Ebben a fejezetben tekintünk át minden olyan összefüggést, amely a kiválasztott konkrét adaptációs algoritmustól függetlenül érvényes, illetőleg támpontokat ad új algoritmusok tervezéséhez, meglévők analíziséhez. Szó lesz az adaptív szűrők különböző realizációiról, idővariáns rendszerek stabilitási kérdéseiről, adaptációs algoritmusok konvergenciavizsgálatáról, valamint dióhéjban összegezzük az identifikáció és approximáció elméletének témánk szempontjából fontos eredményeit. Ez utóbbi célunk eléréséhez elsősorban [5] hivatkozásra támaszkodunk.

Mint arra már fentebb utaltunk, a kutatási eredmények és a gyakorlati tapasztalatok többsége a FIR szűrőkkel megvalósított adaptív jelfeldolgozás vonatkozásában halmozódott fel. E szűrők előnyeként említhető [4]

- a triviális fizikai (DSP vagy egyéb) realizáció – az angol elnevezés ezt jól mutatja: *adaptive linear combiner*;
- a feltétel nélküli stabilitás, lévén a szűrőnek nincsenek pólusai;
- a hibanégyzet várható értékére (*MSE*) vonatkozó skalár-vektor függvény unimodalitása, azaz lokális szélsőértékektől való mentessége: a gradiens alapú szűrőadaptációs algoritmusok így mindig a globális szélsőértékhez (minimumhoz) konvergálnak;
- az egyszerűen levezethető formulakészlet és az ebből következő tervezhetőség.

A tapasztalatok felhalmozódásával azonban a FIR szűrők korlátai is megmutatkoztak, ami könnyen érthető, ha figyelembe vesszük, hogy a szűrők, tehát az általuk modellezett rendszerek impulzusválasza véges hosszúságú. Különösen szembetűnő ez a hiányosság akusztikai problémák esetében. Modellezési tapasztalatainkkal összhangban az akusztikai rendszerek gyakran írhatók le lineáris differenciálegyenletekkel és a nekik megfelelő differenciálegyenletekkel, ez utóbbiakat  $z$ -transzformálva pedig racionális átviteli függvényeket kapunk, a hozzájuk tartozó végtelen impulzusválasszal egyetemben [5]. Nyilvánvaló tehát a racionális átviteli függvények modellezésbeli lépéselőnye a polinom átviteli függvényekkel szemben.

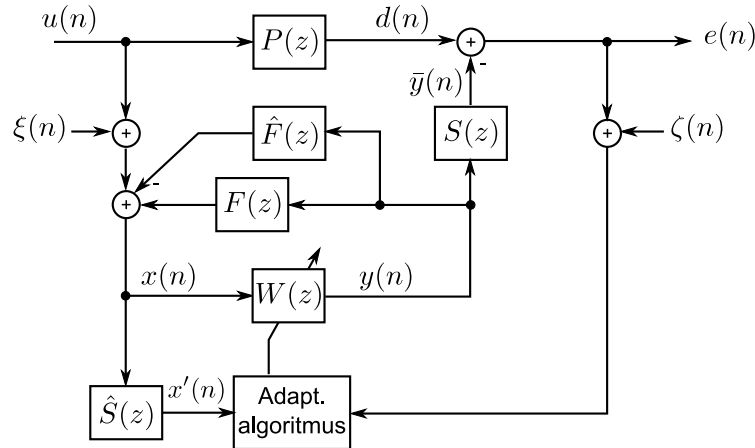
Az előnyökhöz azonban szokás szerint hátrányok is társulnak, amik a következőkben foglalhatók össze [6], [4]:

- az IIR szűrő instabillá válhat, pl. ha valamely pólusa az adaptáció során az egységkörön kívülre kerül;

- a MSE függvény nem unimodális, a gradiens alapú algoritmusok beragadhatnak lokális minimumokba;
- a konvergencia igen lassú lehet, ha a pólusok alulcsillapítottak;
- globálisan nem garantálható a konvergencia;
- a stacionárius pont torzított (*biased*) modellt szolgáltat;
- alulmodellezett esetekre a konvergenciatulajdonságok leromlanak.

A különböző problémákra különböző megoldási javaslatok születtek az évek során, egy egységes elméleti keretrendszer kidolgozása azonban jórészt még várat magára. Nem elhanyagolható az aktív zajcsökkentési feladat specialitása, a szűrt hiba (*filtered error*) sem (lásd 3.1. ábra), ez ugyanis megakadályozza, hogy az adaptív rekurzív szűrők területén elért klasszikus eredmények közvetlenül, változatlan formában át-emelhetők legyenek az aktív zajcsökkentés realitásába [3, 90. oldal].

Szerepeljen most egy témánk szempontjából fontos alkalmazási lehetőség. Már esett szó (lásd 2.2. pont) szélessávú ANC problémákban jelentkező káros visszacsatolásról a referenciaérzékelő és a másodlagos forrás között. Ha megvizsgáljuk a 3.1. ábrát, jobban ráláthatunk a visszacsatolás természetére. Feltűnhet, hogy  $P(z)$  modellezését az  $F(z)$  visszacsatolás azáltal nehezíti meg, hogy pólusokat visz be a  $W(z)$  által előállítandó átviteli függvénybe. Azonnal adódik a megoldás: legyen az adaptív szűrőnk rekurzív, a nevezett pólusokat ezáltal maga a szűrő állíthatja elő, nincs szükség külön kompenzációra vagy más technikákra [7]. Világos, hogy miért lehet kívánatos az IIR szűrőket szélessávú akusztikai zajcsökkentésben használni [7], [8].



3.1. ábra. Általános ANC struktúra blokkdiagramja.

Lássuk most az alapvető fogalmakat és jelöléseket! Jelölje  $\mathcal{H}_2$  a stabil és kausalis  $f(z)$  függvények Hardy-féle alterét ( $z^{-1}$  az egységnyi késleltetés operátora). Bővebben ez azt jelenti, hogy  $f(z) \in L_2$  és  $f(z)$  Fourier-sorfejtése egyoldalas:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{jk\omega} \quad \text{és} \quad f_k = 0, \quad k < 0.$$

Egy  $f(z)$  függvény eleme az  $L_2$  függvények terének, ha négyzetesen integrálható az egységkörön, vagyis

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{j\omega})|^2 d\omega = \|f(e^{j\omega})\|_2^2 < \infty.$$

Másképpen fogalmazva, az  $f(z)$  által reprezentált rendszer stabil.  $\|f(e^{j\omega})\|_2^2 = \langle f(z), f(z) \rangle, |z| = 1$ , ahol  $\langle \cdot \rangle$  a skalárszorzatot jelöli a következő, mátrixokra kiterjesztett definícióval:

$$\langle \mathbf{F}(z), \mathbf{G}(z) \rangle = \frac{1}{2\pi j} \oint \mathbf{F}(z) \mathbf{G}^t(z^{-1}) \frac{dz}{z}.$$

Az adaptív IIR szűrés alapproblémája a következő [5, 5. oldal]: Adott két mintasorozat,  $u(n)$  és  $y(n)$ , köztük a kapcsolatot az

$$y(n) = H(z)u(n) + \zeta(n) \quad (3.1)$$

egyenlet teremti meg, ahol  $\zeta(n)$  egy  $u(n)$ -től statisztikus értelemben független mintasorozat. (3.1) egyenletben az irodalomban elterjedt kevert jelölési módot alkalmaztuk, miszerint

$$H(z)u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^{-k} u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k u(n-k).$$

Célunk  $H(z)$  – vagy annak valamilyen becslője – előállítására  $u(n)$  és  $y(n)$  ismeretében. Ezt úgy érjük el, hogy készítünk egy hangolható  $M$ -edfokú (itt  $M$  az átviteli függvény ún. McMillan-foka) racionális modellt,  $\hat{H}(z)$ -t:

$$\hat{H}(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_M z^{-M}}. \quad (3.2)$$

$\hat{H}(z)$  bemenetére  $u(n)$  kerül, kimenetén pedig megjelenik  $\hat{y}(n)$ :

$$\hat{y}(n) = \hat{H}(z)u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{h}_k u(n-k).$$

A dolgunk ezután az  $b_k$  és  $a_k$  együtthatók állítása (*algorithmus*) oly módon, hogy az  $\hat{y}(n)$  sorozat valamilyen értelemben (*approximációs kritérium*) hasonlítson az  $y(n)$  sorozatra. Ha három további kikötést teszünk, nevezetesen, hogy

- $H(z)$  egy legfeljebb  $M$ -edfokú racionális átviteli függvény;
- a  $\zeta(n)$  zavar nincs jelen;
- az  $u(n)$  bemeneti sorozat perzisztens gerjesztést ad;

akkor belátható, hogy  $\hat{y}(n) = y(n)$  akkor és csak akkor teljesül, ha  $\hat{H}(z) = H(z)$ . Ezzel eljutottunk a *rendszeridentifikáció* problémájához.

Megjegyzendő, hogy a fenti kikötések közül az első, szinte biztosra vehetjük, nem teljesül a gyakorlatban (elégtelen modell – *undermodelled case*)[5]. Identifikáció helyett tehát valójában approximációval van dolgunk, annak minden tulajdonságával,

lehetőségével/korlátjával együtt. Az adaptív IIR szűrők irodalmát nagyrészt olyan eredmények teszik ki, melyek az identifikáció lehetőségét, tehát az első kikötés teljesülését (kielégítő modell – *sufficient order case*) feltételezik. Ez a felismerés, azon túl, hogy új, approximációs szemszögből tárja elénk az egész adaptív jelfeldolgozás témakörét, szakítva a hagyományos identifikációs megközelítéssel, magyarázatot adhat arra is, hogy sokszor miért nem sikerül a racionális modellektől várt teljesítményeket realizálni a gyakorlatban.

### 3.1. Rekurzív szűrőstruktúrák

Lineáris, időinvariáns (*Linear Time-Invariant, LTI*) szűrők vizsgálatának hatékony eszköze az állapotváltozós formalizmus. Számptalan hasznos tulajdonságra fényt deríthetünk segítségével. Az ekvivalens realizációk és különböző paraméterezéseik kapcsolata szemléletesen jelenik meg ebben a leírási módban, mely külön előnyökkel kecsegtet jelen témánk, a rekurzív szűrőstruktúrák vizsgálata szempontjából.

Amennyiben  $\hat{H}(z)$  jelöli a racionális átviteli függvény-modellünket, a  $\hat{y}(n) = \hat{H}(z)u(n)$  kapcsolat felírható a következő módon:

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{b}u(n), \quad (3.3)$$

$$\hat{y}(n) = \mathbf{c}\mathbf{x}(n) + du(n), \quad (3.4)$$

ahol  $\mathbf{x}(\cdot)$  az állapotvektor, az  $M$  állapotváltozót összefogó oszlopvektor. Az átviteli függvény formája ekkor

$$\hat{H}(z) = d + z^{-1}\mathbf{c}(\mathbf{I} - z^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{h}_k z^{-k},$$

az impulzusválasz megfeleltetése pedig

$$\hat{h}_k = \begin{cases} d, & k = 0; \\ \mathbf{c}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{b} & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Élünk az  $\mathbf{A}_0 = \mathbf{I}$  konvencióval, ahol  $\mathbf{I}$  az egységmátrixot jelöli. Az  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, d)$  négyes elemei paraméterezik a rendszert. A paramétereket az idő függvényében változtatva természetes módon adódik a formalizmus kiterjesztése idővariáns rendszerek leírásához.

Bevezetjük még a lineáris rendszerek analízisében kulcsfontosságú szerepet játszó  $\mathbf{K}$  és  $\mathbf{W}$  irányíthatósági és megfigyelhetőségi Gramm-mátrixokat, melyek kielégítik az alábbi Ljapunov-egyenleteket:

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}\mathbf{K}\mathbf{A}^t + \mathbf{b}\mathbf{b}^t, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{A}^t\mathbf{W}\mathbf{A} + \mathbf{c}^t\mathbf{c}. \quad (3.6)$$

Belátható, hogy minden stabil rendszert reprezentáló  $\mathbf{A}$  mátrixhoz és  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  hármashoz létezik és egyértelmű  $\mathbf{K}$  és  $\mathbf{W}$ , továbbá legalább pozitív szemidefinit.  $\mathbf{K}$ , illetve  $\mathbf{W}$  pontosan akkor pozitív definit, ha  $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  irányítható, illetve  $(\mathbf{A}, \mathbf{c})$  megfigyelhető.

Az irányíthatóság és a megfigyelhetőség a szokásos módon értelmezett, példaként az irányíthatóságra az  $M \times M$ -es

$$[\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{b} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{M-1}\mathbf{b}]$$

mátrix reguláris, vagyis rangja  $M$ . A irányíthatósági mátrix, rangját megőrizve végtelen tagra is kiterjeszthető:

$$\mathcal{C} \triangleq [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{M-1}\mathbf{b} \quad \mathbf{A}^M\mathbf{b} \quad \dots].$$

$\mathcal{C}$ -t végtelen irányíthatósági mátrixnak nevezzük. Hasonlóképpen bevezethető a végtelen megfigyelhetőségi mátrix,  $\mathcal{O}$  is:

$$\mathcal{O} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}\mathbf{A}^{M-1} \\ \mathbf{c}\mathbf{A}^M \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Belátható, hogy  $\mathcal{C}\mathcal{C}^t = \mathbf{K}$  és  $\mathcal{O}^t\mathcal{O} = \mathbf{W}$ , innen az elnevezés.  $\mathbf{K}$  szemléletes értelmezése a (3.5) Ljapunov-egyenletekből következik:  $E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^t(n)] = \mathbf{K}$ , vagyis  $\mathbf{K}$  megegyezik az aszimptotikus állapotvektorral, amennyiben az  $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  rendszer gerjesztése  $\{u(\cdot)\}$  fehér zaj.

$\hat{H}(z)$  egy realizációja definíció szerint minimális, ha irányítható és megfigyelhető (vagyis, ha  $\mathbf{K}$  és  $\mathbf{W}$  pozitív definit). Ebben az esetben  $\mathbf{x}(\cdot)$  a lehető legkevesebb elemet tartalmazza, a felhasználandó tároló elemek száma minimális.  $\hat{H}(z)$  paraméterezéshez kézenfekvő választásnak tűnhet az  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, d)$  négyes választása, azonban alapesetben egy ilyen realizáció  $(M+1)^2$  szorzást és összeadást igényel minden iterációnál, megvalósítása gazdaságtalan. Szerencsére azonban kihasználhatjuk, hogy a (3.3) állapotváltozós felírás nem egyértelmű. Legyen  $\mathbf{T}$  egy  $M \times M$ -es reguláris (invertálható)mátrix és legyen  $\mathbf{z}(n) = \mathbf{T}\mathbf{x}(n)$ . Ekkor a (3.3) rendszer a

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(n+1) &= [\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}] \mathbf{z}(n) + [\mathbf{T}\mathbf{b}] u(n), \\ \hat{y}(n) &= [\mathbf{c}\mathbf{T}^{-1}] \mathbf{z}(n) + du(n), \end{aligned}$$

rendszerre transzformálódik, a hozzá tartozó  $(\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}, \mathbf{T}\mathbf{b}, \mathbf{c}\mathbf{T}^{-1}, d)$  négyessel.  $\mathbf{T}$  megfelelő választásával mindig található olyan realizáció, mellyel a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(n+1) \\ \hat{y}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(n) \\ u(n) \end{bmatrix}$$

vektorszorzat  $2M+1$  művelettel kiszámítható.

Könnyen belátható, hogy a  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, d) \rightarrow (\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}, \mathbf{T}\mathbf{b}, \mathbf{c}\mathbf{T}^{-1}, d)$  koordinátatranszformáció a  $\mathbf{K}\mathbf{W}$  szorzatot a  $\mathbf{K}\mathbf{W} \rightarrow \mathbf{T}^{-t}\mathbf{K}\mathbf{W}\mathbf{T}^t$  alakba transzformálja. Ez egy hasonlósági transzformáció,  $\mathbf{K}\mathbf{W}$  sajátértékeit megőrzi, azokat tehát  $\hat{H}(z)$  egyértelműen meghatározza. Igaz továbbá, hogy  $\mathbf{K}\mathbf{W}$  sajátértékei mindig pozitív valósak, amennyiben a realizáció minimális.

A  $\hat{H}(z)$ -hez tartozó Hankel-formát a

$$\Gamma_{\hat{H}} = \begin{bmatrix} \hat{h}_1 & \hat{h}_2 & \hat{h}_3 & \dots \\ \hat{h}_2 & \hat{h}_3 & \hat{h}_4 & \dots \\ \hat{h}_3 & \hat{h}_4 & \hat{h}_5 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

végtelen mátrix (a  $\hat{h}_0 = d$  tag nélkül). Kronecker tétele szerint  $\Gamma_{\hat{H}}$  rangja akkor és csak akkor véges, jelölje ezt  $M$ , ha  $\hat{H}(z)$  McMillan-foka  $M$ . Egyszerűen belátható, hogy  $\Gamma_{\hat{H}} = \mathcal{OC}$  és

$$\sigma_k(\Gamma_{\hat{H}}) = \sqrt{\lambda_k(\Gamma_{\hat{H}}\Gamma_{\hat{H}})} = \sqrt{\lambda_k(\mathbf{KW})},$$

ahol  $\sigma_k$  jelöli a szinguláris értékeket, amelyek definíció szerint megegyeznek a mátrixhoz tartozó Gramm-mátrix sajátértékeinek négyzetgyökével.

Bizonyítható, hogy mindig létezik olyan  $\mathbf{T}$  transzformációs mátrix, mellyel  $\mathbf{K}$  és  $\mathbf{W}$  szimultán és azonosan diagonalizálható:

$$\mathbf{K} = \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \sigma_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \sigma_M \end{bmatrix}.$$

Az ilyen realizációkat kiegyensúlyozottnak (*balanced*) nevezi a szakirodalom és kedvező numerikus tulajdonságokkal bírnak.

### 3.1.1. Direkt formák paraméterezése

A direkt formák nevüket onnan kapták, hogy a  $\hat{H}(z) = B(z)/A(z)$  racionális modellefüggvény együtthatóiból felírható  $A(z)\hat{y}(n) = B(z)u(n)$  differenciaegyenlet átrendezésével, és a tagok különféle csoportosításával közvetlenül megkaphatók, a numerikus számítási algoritmusok egyszerűen származtathatók ezekből a formulákból. Legalapvetőbb a I. direkt forma (3.2. ábra):

$$\hat{y}(n) = b_0u(n) + b_1u(n-1) + \dots + b_Mu(n-M) - a_1\hat{y}(n-1) - a_2\hat{y}(n-2) - \dots - a_M\hat{y}(n-M),$$

melynek minimális, kanonikus megfelelője a II. direkt forma a  $B(z)$  és  $1/A(z)$  tagok egyszerű felcserélésével adódik (3.3a ábra).

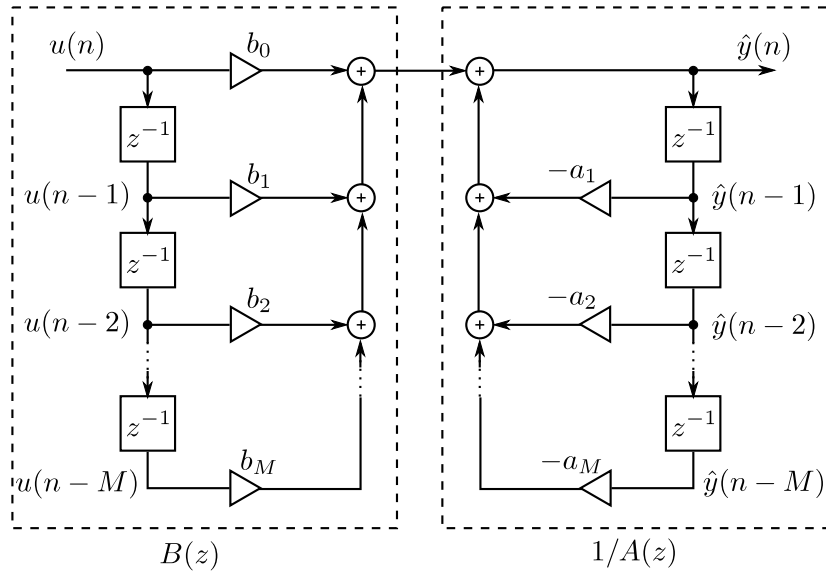
A II. direkt forma állapotváltozós alakja

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \\ \vdots \\ x_M(n+1) \\ w(n) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_M & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_Q \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ \vdots \\ x_M(n) \\ u(n) \end{bmatrix},$$

$$\hat{y}(n) = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_M] \begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \\ \vdots \\ x_M(n+1) \\ w(n) \end{bmatrix}.$$

A felírásban szereplő  $Q = \begin{bmatrix} -\mathbf{a}^t & 1 \\ \mathbf{I}_M & \mathbf{0}_M \end{bmatrix}$  rendszermátrix invertálható, inverze almátrixokkal egyszerűen kifejezhető.  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  a továbbiakban  $A(z)$  és  $B(z)$  együtthatóiból alkotott oszlopvektorokat jelöli:

$$\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_M]^t, \quad \mathbf{b} = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_M]^t.$$



3.2. ábra. Direkt formájú szűrőrealizáció – I. direkt forma.

Numerikus szempontból általában kedvezőbb a II. direkt formából nyerhető transzponált II. direkt forma [9], [10]. A transzponálás jelfolyamábrán megfelel a bemenet és kimenet, illetve az összegző és az elágazó csomópontok felcserélésének (3.3b ábra). Az állapotváltozós felírás

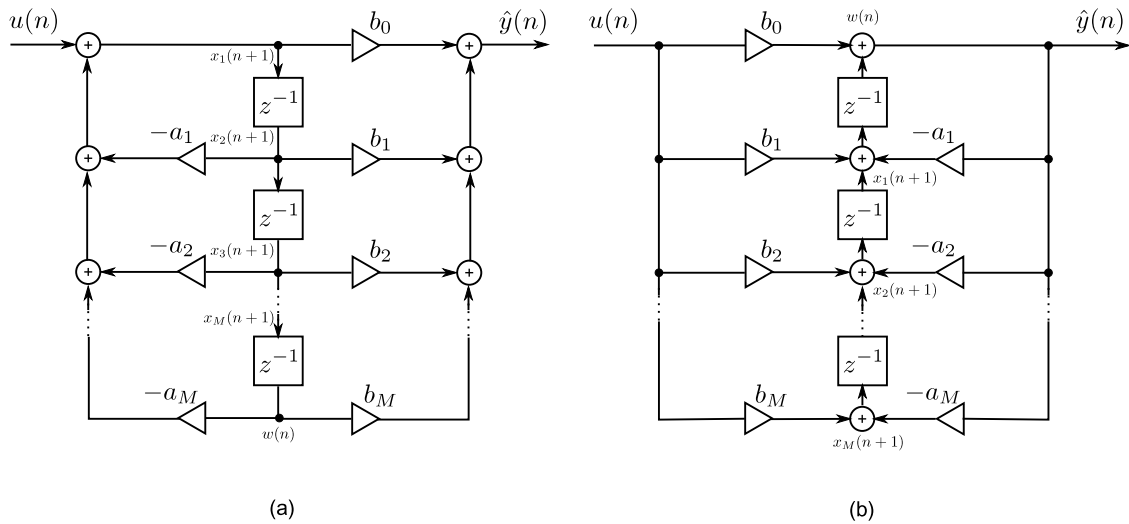
$$\begin{bmatrix} \hat{y}(n) \\ x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \\ \vdots \\ x_M(n+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 - a_1 b_0 & -a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ b_2 - a_2 b_0 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ b_M - a_M b_0 & -a_M & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Z}} \begin{bmatrix} u(n) \\ x_1(n) \\ x_2(n) \\ \vdots \\ x_M(n) \end{bmatrix},$$

melyből látható ennek a formának egy további előnye, nevezetesen, hogy  $\hat{y}(n)$  kiszámításához elég egyetlen mátrixszorzás, az állapotváltozók és a bemenet/kimenet egyetlen vektorba foglalható. Egy másodfokú szűrőtag esetében  $\mathbf{Z}$   $3 \times 3$ -as, még elég sűrű ahhoz, hogy egy ilyen szűrőt MATLAB-ban kényelmesen és hatékonyan mátrixszorzással implementáljunk (lásd Kautz-szűrők).

A direkt formák előnye, hogy fogalmilag egyszerűen megragadhatók, triviálisan implementálhatók, az adaptációs algoritmusok származtatását megkönnyítik. Véges pontosság (fixpontos számábrázolás) mellett azonban számos numerikus problémával küzdenek: túlsordulhatnak, a kvantálási zajt jelentősen felerősíthetik, határoszcillációra hajlamosak lehetnek [10], mindezt pedig a pólusok helyzetétől függően mértékben, további nehézségeket okozva ezzel adaptív szűrők megvalósításakor.

Szólnunk kell a stabilitás kérdéséről is, minthogy  $\hat{H}(z)$  direkt realizációja csak a paraméterek bizonyos tartományában stabil.  $A(z)$ -re vonatkozó kikötés, hogy zérusai nem kerülhetnek az egységkörön kívülre ( $A(z)$  minimálfázisú), ellenkező esetben a szűrőnk instabillá válik. Lassan vándorló pólusok ( $A(z)$  zérusai) lehetővé teszik, hogy az idővariáns szűrő stabilitását a pólusok egységkörbe korlátozásával biztosítsuk, a feladat azonban meglehetősen költséges a számítási igényeket tekintve.



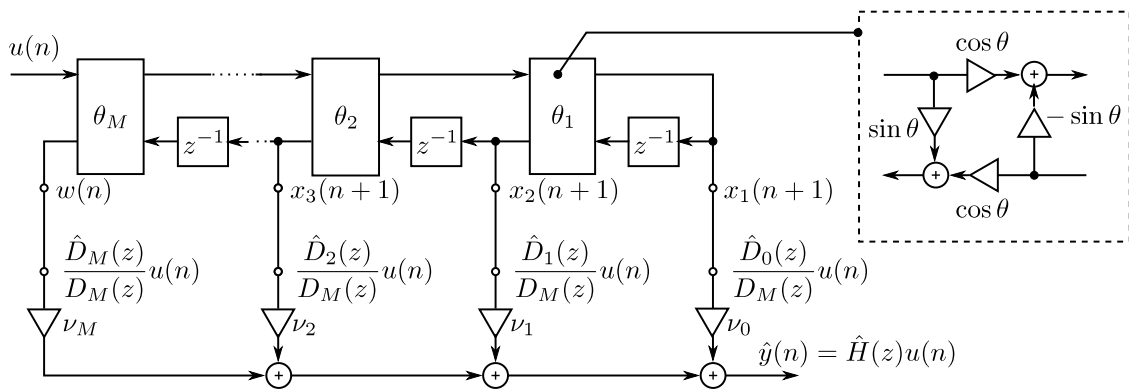


3.3. ábra. Direk formájú szűrőrealizációk: (a) II. direkt forma; (b) II. transzponált direkt forma.

A fix paraméterű szűrők szintézisében előszeretettel alkalmazott párhuzamos és kaskád realizációk nem szerencsések adaptív szűrők megvalósításakor. Az ok a direkt paraméterek és a szűrőtagok összerendelésének egyértelműségében, pontosabban annak hiányában keresendő. Egy adott költségfüggvény minimumhelyei az előbbi leképezés többértékűségének megfelelően széthasadnak, köztük lokális maximumok vagy nyeregponatok alakulnak ki, melyek a konvergenciát lassíthatják [5].

### 3.1.2. Normalizált lattice szűrő

A rekurzív normalizált lattice szűrő (másik elnevezéssel: megcsapolt állapotváltozós normalizált lattice – *tapped state normalized lattice*) a csak pólusokat tartalmazó (*all-pole*) rekurzív lattice-ből származtatható az állapotváltozók lineáris kombinálásával [9], a 3.4. ábrán látható módon. Az új paraméterek  $\{\nu_k\}$  és  $\{\theta_k\}$ , az állapot-súlyok és a forgatási szögek.



3.4. ábra. Normalizált lattice szűrő realizációja jelfolyamábrán.

Az állapotváltozós felírás

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(n+1) \\ w(n) \end{bmatrix} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(n) \\ u(n) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\hat{y}(n) = [\nu_0 \ \nu_1 \ \cdots \ \nu_M] \begin{bmatrix} \mathbf{x}(n+1) \\ w(n) \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

ahol a  $\mathbf{Q}$  mátrix most ortogonális ( $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^t$ ), ezenfelül (felső) Hessenberg-struktúrájú (az első mellékátló alatti elemek nullák).  $\mathbf{Q}$  felírható a

$$\mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{k-1} & & & \\ & -\sin \theta_k & \cos \theta_k & \\ & \cos \theta_k & \sin \theta_k & \\ & & & \mathbf{I}_{M-k} \end{bmatrix}$$

elemi mátrixok szorzataként:  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \cdots \mathbf{Q}_M$ .

A  $\hat{H}(z)$  átviteli függvény alakja most

$$\hat{H}(z) = \sum_{k=0}^M \nu_k \frac{\hat{D}_k(z)}{D_M(z)},$$

ahol a  $D_k(z)$  és  $\hat{D}_k(z)$  polinomok a Schur-rekurzióval számíthatók ki az  $\{a_k\}$ ,  $\{b_k\}$  direkt paramétereiből az alábbi algoritmussal:

1.  $D_M(z) = A(z)$  és  $\hat{D}_M(z) = z^M A(z^{-1})$ .
2. Minden  $k = M, M-1, \dots, 1$ -re legyen  $\sin \theta_k = \hat{D}_k(0)/D_k(0)$  és  $\cos \theta_k > 0$ .  $D_{k-1}(z)$  és  $\hat{D}_{k-1}(z)$  a Schur-rekurzióból

$$\begin{bmatrix} D_{k-1}(z) \\ z^{-1} \hat{D}_{k-1}(z) \end{bmatrix} = \frac{1}{\cos \theta_k} \begin{bmatrix} 1 & -\sin \theta_k \\ -\sin \theta_k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_k(z) \\ \hat{D}_k(z) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

3. Legyen  $\hat{\mathbf{d}}_k$  egy  $M+1$  elemű vektor, melynek első  $k+1$  eleme  $\hat{D}_k(z)$  együtthatóit tartalmazza, a maradék  $M-k$  eleme pedig zérus. Ekkor  $[\hat{\mathbf{d}}_0 \ \hat{\mathbf{d}}_1 \ \cdots \ \hat{\mathbf{d}}_M]$  egy  $(M+1) \times (M+1)$ -es felső háromszögmátrix, amely  $\{b_k\}$  és  $\{\nu_k\}$  paramétereiket kapcsolja össze

$$\underbrace{[\hat{\mathbf{d}}_0 \ \hat{\mathbf{d}}_1 \ \cdots \ \hat{\mathbf{d}}_M]}_{\triangleq \mathbf{T}_{dl}^t} \begin{bmatrix} \nu_0 \\ \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_M \end{bmatrix}.$$

Belátható, hogy (a 3.10) rekurzióból kapott  $D_k(z)$  és  $\hat{D}_k(z)$   $k$ -adfokú polinomok, továbbá minden  $k$ -ra  $\hat{D}_k(z) = z^k D(z^{-1})$ . Ez utóbbi egyenlőségből következik, hogy  $|D_k(e^{j\omega})|^2 = |\hat{D}_k(e^{j\omega})|^2$ , tehát

$$\left| \frac{\hat{D}_k(z)}{D_k(z)} \right| = 1, \quad |z| = 1, \quad \forall k.$$



- a struktúra  $-\left|\theta_k\right| < \frac{\pi}{2}$  betartásával – stabil és kauzális rendszerek realizációjára alkalmas csupán;
- minden belső csomópont  $l_2$  értelemben normált;
- a kerekítésekből adódó kvantálási zaj felhalmozódása az állapotváltozó-hurokban eredendően kicsi és független a pólusok elhelyezkedésétől;
- a kvantálás miatt fellépő határoszcilláció egyszerű aritmetikai konvenciók betartásával meggátolható.

### 3.1.3. Kautz- és Laguerre-szűrő

A Kautz-szűrő, más néven általánosított transzverzális szűrő egy fix pólusokkal rendelkező, ortonormált és rekurzív struktúra. Eredete folytonos idejű exponenciális függvények ortogonalizációjához kötődik. Kautz foglalkozott a kérdéssel az 50-es években. Az eredményül kapott ortonormált bázis racionális Laplace-transzformálttal rendelkezett, és speciális struktúrája révén rekurzív transzverzális szűrő szintézisét tette lehetővé. A bázisfüggvények (Kautz-függvények) diszkrét idejű változata digitális ortonormált szűrők szintézisére használható [11], [12].

A rendszeridentifikáció jól kidolgozott elmélettel rendelkezik a Kautz-szűrő egy speciális változatáról, a Laguerre-szűrőről. A Laguerre-szűrőnek egyetlen (többszörös) pólusa van, szemléletesen egy transzverzális FIR szűrő, melynek „gerincében” a késleltetőket fix pólusú mindentáteresztőkre cserélték, majd az egész szűrőt egy egypólusú, elsőfokú taggal normálták. Mindkét sorfejtés ortonormált, ám a Laguerre-szűrő, IIR szűrő lévén, nagyobb modellezési potenciállal bír.

Legyen adott az egységkörön belüli  $\{z_k\}$  pólusok halmaza. Ehhez egyértelműen hozzárendelhető a  $G_k(z) \in \mathcal{H}_2$  minimális foksámú racionális, ortonormált függvények halmaza, ahol

$$G_k(z) = \frac{\sqrt{1 - z_k z_k^*}}{z^{-1} - z_k^*} \prod_{j=0}^k \frac{z^{-1} - z_j^*}{1 - z_j z^{-1}}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.12)$$

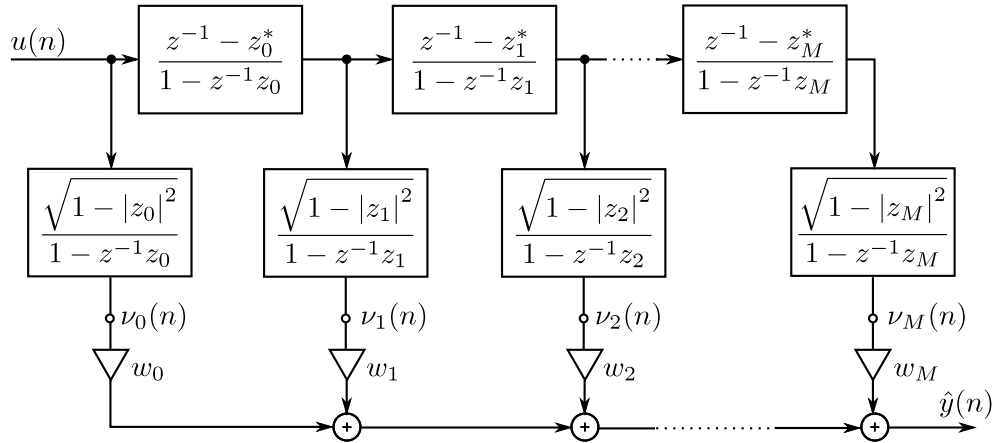
$z^*$   $z$  komplex konjugáltját jelöli.  $\langle G_i(z), G_j(z) \rangle = \delta_{ij}$ , ahol  $\delta$  a Kronecker-szimbólum. Időtartományban megfogalmazva

$$\langle g_i, g_j \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} g_i(n) g_j^*(n) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Vegyük észre a hasonlóságot a lattice szűrőkkel, ahol a megcsapolások átviteli függvényei szintén ortonormált bázist alkotnak. Különbség, hogy eltérők a bázisfüggvények (lásd (3.11)) és a struktúra nem transzverzális.

(3.12)-ből jól látható, hogy a bázisfüggvények egyetlen rekurzív struktúrában kiszámíthatók, az egyes  $G_k(z)$  tagok pedig ennek a struktúrának a transzverzális megcsapolásaiként értelmezhetők (3.6. ábra). Ha  $\{z_k\} = \{a\}$ ,  $a \in \mathbb{C} \cup \mathbb{R}$ , akkor a Laguerre-szűrőt kapjuk, ha  $\{z_k\} = \{0\}$ , akkor a közönséges transzverzális FIR szűrőt.

Amennyiben kizárólag valós jelekkel dolgozunk, és szeretnénk a szűrőn belül valós aritmetikát használni – és amennyiben kizárólag komplex konjugált pólusok



3.6. ábra. Általános Kautz-szűrő.

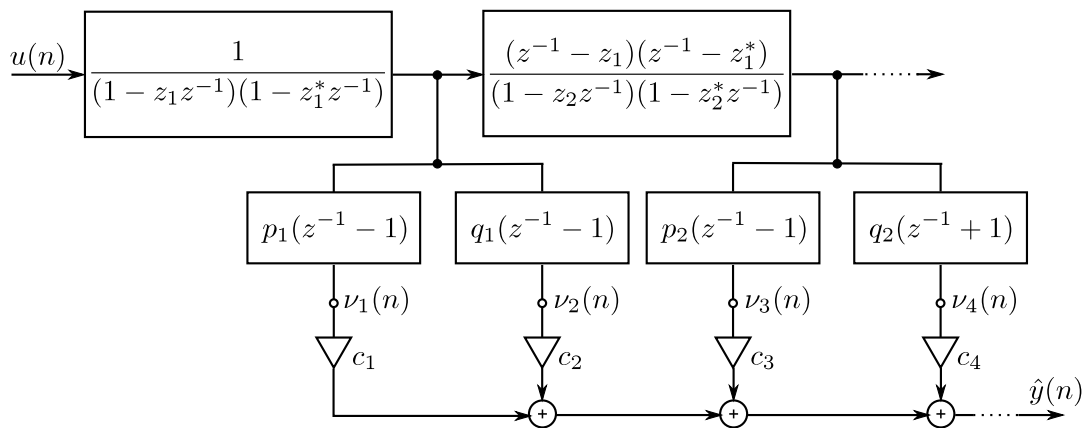
szerepelnek  $\{z_k\}$ -ban –, egy módosított változatot kell használnunk, másodfokú tagokkal (3.7. ábra). Az ábrán szereplő  $\{\mu_k(n)\}$  jelek már elve ortogonálisak, ezekből és késleltetett változatukból összeget és különbséget képezve állnak elő az új  $\{\nu_k(n)\}$  jelek, a megfelelő normalizáló konstansokkal:

$$p_k = \sqrt{\frac{(1 - \rho_k)(1 + \rho_k - \gamma_k)}{2}},$$

$$q_k = \sqrt{\frac{(1 - \rho_k)(1 + \rho_k + \gamma_k)}{2}},$$

$$\rho_k = |z_k|^2, \quad \gamma_k = -2\Re\{z_k\}.$$

A valós ortonormált struktúra egyben egy előzetes optimalizációnak is felfogható, hasonlóan a fix pólusok kijelöléséhez. Valós és konjugált komplex pólusok esetén a 3.6. és a 3.7. ábra struktúráit kombinálva kell használni.



3.7. ábra. A Kautz-szűrő valós jelekre módosított változata.

Adaptív szűrők esetében két módosítást érdemes megtenni: egyrészt a normalizáló konstansok mindenütt belefoglalhatók az adaptív transzverzális paraméterekbe, tehát ezektől a szorzásoktól megszabadulhatunk; másrészt a 3.6. ábra struktúrájából

a  $w_0$ -hoz tartozó szűrőtagot kiemelhetjük, a többi tagot ennek megfelelően módosítjuk, így minden rekurzió során csak elsőfokú szűrővel kell iterációt végeznünk. Az első- és másodfokú tagok iterációi transzponált II. direkt formában egy-egy mátrixszorzásnak felelnek meg (lásd a 3.1.1. pontban a  $\mathbf{Z}$  mátrixról mondottakat).

Kautz-szűrőket sokféle identifikációs és approximációs szituációban használhatunk, ideértve az adaptív (inverz) modellezést is (akár fix, akár változó pólusú struktúrákkal). Különbségek csak a modellek paraméterezésében vannak. Fix pólusok esetén külön feladat azok előzetes, optimális meghatározása [11]. Aktív zajcsökkentő rendszerekben való alkalmazás mellett szól – többek között –, hogy a Kautz-struktúra a gyakorlatban alkalmasnak bizonyult komplex akusztikai terek (terem impulzusválaszok) kevés paraméterrel történő modellezésére [12], és adaptív visszhangcsökkentő rendszerek megvalósítására [13].

## 3.2. Klasszikus identifikáció és approximáció

Identifikáció alatt egy ismert fokszámú  $H(z)$  racionális átviteli függvény paramétereinek meghatározását értjük. Hangolható modellünk fokszáma kielégítő ( $\deg H(z) \leq \deg \hat{H}(z)$ ), ezért a feladat elvben megoldható, és minden szóba kerülő identifikációs sémától elvárjuk, hogy zajmentes esetben pontosan az ismeretlen átviteli függvény paramétereit szolgáltatassa. Tárgyunkat jelen esetben adaptív IIR identifikációra korlátozzuk, az ismeretlen rendszer (átviteli függvény) modellje a (3.1) formát ölti.

Sokféle módszer alakult ki az évek során, az irodalomban ezeket szokásos módon egyenlet hiba (*Equation Error – EE*) és kimeneti hiba (*Output Error – OE*) osztályokba kategorizálják. Megjegyzendő, hogy egyrészt a kategóriák nem mindig alkalmazhatók tisztán, mivel hibrid módszerek is léteznek, másrészt a felosztás nem is egyetemes, vannak a rajta kívül eső módszerek is [5], [6]. A későbbre halasztott adaptációs algoritmusok tárgyalása szempontjából mégis hasznos most kiemelni e két kategóriát, kicsit részletesebben is megvizsgálva tulajdonságaikat. Mind az EE, mind az OE módszernél a becslés hibanégyzetének várható értékét adják meg költség- vagy kritériumfüggvényként, ennek értékét kell nullává tenni az identifikáció során. EE esetben az ismeretlen rendszer kimenetének  $\hat{y}(n)$  becslőjét az

$$\hat{y}(n) = [1 - A(z)]y(n) + B(z)u(n)$$

formában állítjuk elő (3.8.a ábra). A becslés hibájának kifejezése ilyenkor

$$e_e(n) = [A(z)H(z) - B(z)]u(n) + A(z)\zeta(n),$$

a minimalizálandó (nullázandó)  $E[e_e^2(n)]$  költségfüggvény ( $E[\cdot]$  a várható érték operátora) pedig az

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{S}_u(e^{j\omega}) |A(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) - B(e^{j\omega})|^2 d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{S}_\zeta(e^{j\omega}) |A(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (3.13)$$

alakban írható fel, ahol  $\mathcal{S}_u(e^{j\omega})$  gerjesztő jel,  $\mathcal{S}_\zeta(e^{j\omega})$  pedig a kimenetet terhelő zajfolyamat spektrális sűrűségfüggvénye. Az OE módszerek esetében a megfelelő

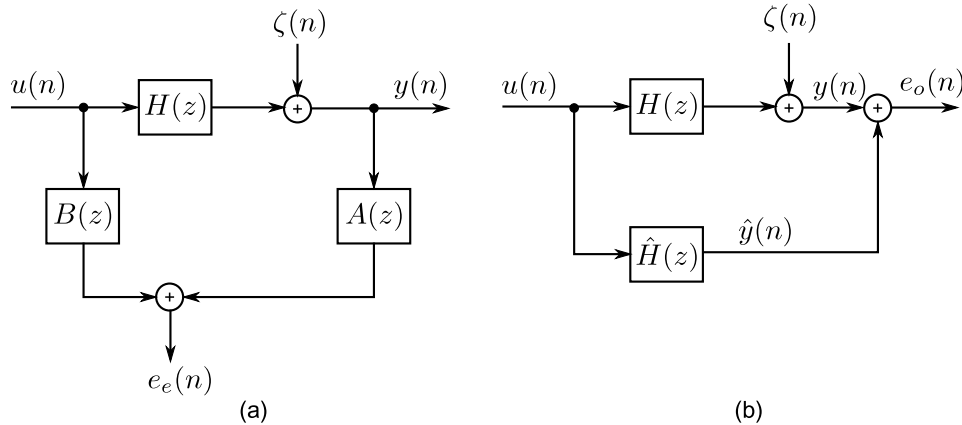
formulák (3.8.b ábra):

$$\hat{y}(n) = [1 - A(z)] \hat{y}(n) + B(z)u(n), \quad (3.14)$$

$$e_o(n) = [H(z) - \hat{H}(z)]u(n) + \zeta(n), \quad (3.15)$$

$$E[e_o^2(n)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{S}_u(e^{j\omega}) |H(e^{j\omega}) - \hat{H}(e^{j\omega})|^2 d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{S}_\zeta(e^{j\omega}) d\omega. \quad (3.16)$$

A kimeneti hiba és az egyenlet hiba között az  $e_e(n) = A(z)e_o(n)$  kapcsolat van.



3.8. ábra. Rendszeridentifikációs struktúrák: (a) EE konfiguráció; (b) OE konfiguráció.

A fenti formulákból kiolvasható, hogy a kimenthez adódó zaj a (3.13) kifejezés minimumhelyét megváltoztatja, míg a (3.14) kifejezés minimumhelye változatlan marad. Az EE módszerek tehát, ellentétben az OE módszerekkel, torzított becslőt szolgáltatnak. Másrésztől az is jól látszik, hogy  $E[e_e^2(n)]$  az  $\{a\}$  és  $\{b\}$  paraméterekben kvadratikus, ezáltal unimodális,  $E[e_o^2(n)]$  azonban az  $\{a\}$  paraméterek nemlineáris függvénye, esetenként lokális minimumokkal. A lokális minimumok szuboptimális becslőket eredményeznek, emellett a konvergenciát is lassíthatják. A 3.8.a ábra alapján világos, hogy az EE konfiguráció két FIR szűrő segítségével megvalósítható, lényegét tekintve adaptív FIR szűrés. Kedvező tulajdonságai erre a tényre vezethetők vissza. Jó volna az EE módszerek kedvező konvergencia-tulajdonságait az OE módszerek torzítatlanságával ötvözni. Az irodalomban javasolt hibrid módszerek minden esetben valamilyen egyéb, nemtriviális feltétel teljesülését kívánják meg a paraméterek konvergenciájához [6]. Úgy tűnik, nem kerülhetjük meg a torzítatlanság és a konvergencia közötti kompromisszumot (kvázi határozatlansági relációt).

### 3.2.1. A Padé, EE és OE approximáció értelmezése Hankel-normával

Amíg  $\deg H(z) \leq \deg \hat{H}(z)$  fennáll, addig az EE és az OE módszerek által szolgáltatott  $\hat{H}(z)$  modellek között nincs különbség (zajmentes esetben):  $\hat{H}(z) = H(z)$ . Irreális azonban feltételezni, hogy egy valós, pl. ANC szituációban a fenti feltétel kielégülése biztosítható. Általában véve  $\deg H(z) \gg \deg \hat{H}(z)$ , ha  $H(z)$  nem éppen végtelen fokszámú (azaz nem írható le racionális modellel). Identifikáció ilyen

esetben nem lehetséges, a legtöbb, amit várhatunk, hogy sikerül  $H(z)$ -hez valamilyen értelemben közeli  $\hat{H}(z)$ -t találjunk. Approximációs problémával állunk tehát szemben, annak is speciális esetével, a racionális approximációval.

A klasszikus tárgyalás nem ad módot arra, hogy a különböző adaptív IIR szűrési sémák kimenetét approximációs szemszögből is megvizsgáljuk, ezért alternatív formalizmushoz nyúlunk. Kiderül, hogy a klasszikus identifikációs módszerek mind ugyanarra a problémára vezethetők vissza [5]: egy vektort konstruálunk, mely az identifikálandó rendszerből képzett Hankel-forma magterében (másképpen nullterében) helyezkedik el. Approximáció esetén a vektor csak közelíti a nullteret, a közelítés tulajdonságai a Hankel-formás leírás alapján határozhatók meg.

Jelölje  $\Gamma_H$  a  $H(z)$ -hez tartozó Hankel-formát ((3.7) mintájára). Az alábbi eredmények foglalhatók össze [5]:

- Legyen

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} a_M \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

és határozzuk meg az  $\{a_k\}$  együtthatókat a

$$\Gamma_H \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_M \\ \times \end{bmatrix}$$

egyenletből,  $a_0 = 1$  feltétel mellett.  $\times$  az érdektelen elemeket jelöli. A  $\{b_k\}$  együtthatók kiszámítása a

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_1 & h_0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ h_M & \cdots & h_1 & h_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_M \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

egyenlet segítségével történik. Ekkor  $\hat{H}(z) = B(z)/A(z)$ -ra igaz, hogy  $\hat{h}_k = h_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, 2M$ . Ez egyenértékű  $\hat{H}(z) = H(z)$ -vel, amennyiben  $\deg H(z) = M$ . Ha  $\deg H(z) > M$ , akkor a  $\hat{H}(z)$  függvény nem feltétlenül stabil. A fenti módszer Padé-approximáció néven ismert, adaptív megvalósításban bizonyos segédváltozós (*Instrumental Variable - IV*) algoritmusokban köszön vissza.

- $\mathbf{f}$  definíciója megegyezik (3.17)-belivel, de az  $\{a_k\}$  együtthatókat most

$$\min_{a_k} \|\Gamma_H \mathbf{f}\|$$

szerint választjuk meg. A  $\{b_k\}$  együtthatókat ismét (3.18)-ból számítjuk. Ez így megfelel az EE módszernél ismertetett

$$\min_{A(z), B(z)} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |A(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) - B(e^{j\omega})|^2 d\omega \right)^{1/2}$$

minimalizálási feladatnak. Az  $A(z) = B(z) = 0$  triviális megoldást kizárandó,  $A(z)$ -re két kikötést tehetünk: az egyik szerint  $A(z)$  1 vezető együtthatójú



( $A(0) = 1$ ), a másik szerint  $A(z)$  egységnyi normájú ( $\|A(z)\|_2 = 1$ ). Bármelyik kikötést választjuk is,  $\hat{H}(z) = B(z)/A(z)$  stabil és az impulzusválaszt interpolálja, vagyis igaz, hogy  $\hat{h}_k = h_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, M$ . Az egységnyi normára vonatkozó kikötés ezen felül maga után vonja

$$\langle \hat{H}(z)\hat{H}(z^{-1}), z^{-k} \rangle = \langle H(z)H(z^{-1}), z^{-k} \rangle, \quad k = 1, 2, \dots, M$$

teljesülését is, tehát  $\hat{H}(z)$  ebben az esetben a korrelációs együtthatókat is interpolálja. Ha  $\deg H(z) = M$ , akkor mindkét kikötés  $\hat{H}(z) = H(z)$  teljesülését eredményezi.

- Válasszuk meg az  $\mathbf{f} = \mathbf{v} = [\nu_0, \nu_1, \nu_2, \dots]^t$  vektort az  $M$ -edfokú

$$\sum_{k=0}^{\infty} \nu_k z^{-k} = V(z) = \frac{z^M A(z^{-1})}{A(z)}$$

mindentáteresztő függvény impulzusválaszának felhasználásával. Ekkor  $\|\mathbf{f}\| = \|\mathbf{v}\| = 1$ . Az  $A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_M z^{-M}$  polinom együtthatóit ezek után a

$$\min_{a_k} \|\Gamma_H \mathbf{v}\| \quad (3.19)$$

minimalizálási probléma megoldásaként kapjuk, míg  $B(z)$  együtthatói a  $H(z) - \hat{H}(z) = V(z)g(z)$  interpolációs feltételből nyerhetők, ahol  $g(z)$  szigorúan kauzális (kauzális és nulladfokú együtthatója zérus:  $g(z) = g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2} + \dots$ ). Más formában a

$$\min_{\deg \hat{H}(z)=M} \left\| H(z) - \hat{H}(z) \right\|_2 \quad (3.20)$$

problémát kaptuk vissza (OE módszer), így (3.19) és (3.20) lokális minimumai egy az egyben megfeleltethetők egymásnak. Minden minimumhelyre  $H(z) - \hat{H}(z) = z[V(z)]^2 Q(z)$  teljesül, ahol  $Q(z) \in \mathcal{H}_2$ .  $\hat{H}(z)$  tehát  $z[V(z)]^2$  zérusainál (másodrendben) interpolálja  $H(z)$ -t. Ha  $\deg H(z) = M$ , akkor  $\hat{H}(z) = H(z)$  az egyetlen megoldás, ha pedig  $\deg H(z) > M$ , akkor több megoldás is létezhet.

### 3.2.2. Approximáció Hankel-normával

Az előző pontban ismertetett approximációs módszerek (a Padé-approximáció kivételével) a  $\Gamma_H$  magterét egy minimalizálási problémán keresztül közelítették. Az approximációs probléma Hankel-normával megfogalmazott változata

$$\min_{\text{rank } \Gamma_{\hat{H}} \leq M} \|\Gamma_H - \Gamma_{\hat{H}}\|,$$

a magtér minimax közelítése:

$$\min_{\text{codim } S=M} \left( \max_{\substack{\mathbf{f} \in S \\ \|\mathbf{f}\|=1}} \|\Gamma_H \mathbf{f}\| \right).$$

Azért szólunk róla, mert – ellentétben az eddig tárgyalt módszerekkel – létezik analitikus megoldása; más, az adaptív IIR szűrésben alkalmazott approximációs módszerek (kritériumok) teljesítménymérőjeként lehet használni; a Hankel-normának szemléletes fizikai interpretáció adható. Alapvető az alábbi

**1. Tétel.** Legyen  $\Gamma_H$  adott Hankel-forma és  $\Gamma_{\hat{H}}$  ennek egy approximánsa. Ekkor

$$\min_{\text{rank } \Gamma_{\hat{H}} \leq M} \|\Gamma_H - \Gamma_{\hat{H}}\| = \sigma_{M+1}(\Gamma_H),$$

ahol  $\sigma_{M+1}(\Gamma_H)$  a  $H(z)$ -hez tartozó Hankel-forma  $M+1$ -edik szinguláris értékét jelöli (a konvencióknak megfelelően  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots$ ). Ezenkívül az a legfeljebb  $M$ -edfokú  $\Gamma_{\hat{H}}$  Hankel-forma, mely az alsó korláthoz tartozik, egyértelmű.

A  $H(z)$ -hez tartozó  $\|\Gamma_H\| = \sigma_1(\Gamma_H)$  Hankel-norma értelmezhető a rendszer állapotvektorán keresztül létrejövő energianyereségeként. Érvényes továbbá a 2-norma, a Hankel-norma és a végtelen-norma közötti

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} h_k^2 \right)^{1/2} \leq \sigma_1(\Gamma_H) \leq \sup_{\omega} \left| \sum_{k=1}^{\infty} h_k e^{j\omega k} \right|$$

egyenlőtlenség, mely másképpen azt fejezi ki, hogy  $H(z)$  Hankel-normáját alulról  $[H(z)]_+$   $L_2$ -, felülről  $L_{\infty}$ -normája határolja ( $[\cdot]_+$  a szigorúan kauzális rész képzésének operátora). Ennek jelentőségét az alábbi következmény adja:

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} (h_k^2 - \hat{h}_k^2) \right)^{1/2} \leq \sigma_1(\Gamma_H - \Gamma_{\hat{H}}) \leq \sup_{\omega} \left| \sum_{k=1}^{\infty} (h_k - \hat{h}_k) e^{j\omega k} \right|.$$

$H(z) - \hat{H}(z)$  Hankel-normáját kis értéken tartva tehát  $\|H(z) - \hat{H}(z)\|_2$  is kicsi lesz. Nézzük most meg, milyen korlátok adható az előző pontban tárgyalt approximációs kritériumokra!

- Legyen  $\hat{H}(z) = B(z)/A(z)$ , ahol  $A(z)$  és  $B(z)$   $M$ -edfokú polinomok.  $A(z)$  emellett legyen egységnyi normájú:  $\|A(z)\|_2 = 1$ . Ekkor

$$\min_{A(z), B(z)} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |A(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) - B(e^{j\omega})|^2 d\omega \right)^{1/2} \leq \sigma_{M+1}(\Gamma_H).$$

- Az  $L_2$ -normát használva

$$\min_{\text{deg } \hat{H}(z) \leq M} \left\| H(z) - \hat{H}(z) \right\|_2 = \sigma_{M+1}(\Gamma_H). \quad (3.21)$$

Megjegyezzük, hogy a Hankel-norma értelemben optimális approximáns nem feltétlenül optimális  $L_2$ -norma értelemben is.

A fenti korlátok általában eléggé konzervatívak. (3.21) kiegészíthető egy alsó korláttal is [5, 209. oldal], ennek gyakorlati jelentősége azonban csekély, ezért itt nem közöljük.

### 3.2.3. $\mathcal{H}_2$ approximáció

Jelentősége miatt külön is foglalkozunk  $\mathcal{H}_2$ -beli függvények racionális  $L_2$ -norma szerinti approximációjával. Az OE módszerek mind ezen az approximációs problémán – illetve annak a gerjesztőjel spektrális sűrűségével súlyozott változatán (lásd (3.14))

– alapulnak. Bár analitikus megoldás eddig nem született, az évek során rengeteg hasznos tulajdonságát sikerült ennek az approximációs kitérűmnek felderíteni. Ezekből foglalunk most össze néhányat.

Az approximáció probléma az alábbi módon fogalmazható meg:

$$\min_{\deg \hat{H}(z) \leq M} \left\| H(z) - \hat{H}(z) \right\|_2 = \min_{\deg \hat{H}(z) \leq M} \left( \sum_{k=0}^{\infty} (h_k^2 - \hat{h}_k^2) \right)^{1/2}. \quad (3.22)$$

ahol, a szokásos módon,  $H(z)$  az ismeretlen, approximálandó függvény, amit az  $M$ -edfokú  $\hat{H}(z)$  függvénnyel approximálunk.  $h_k$ , illetve  $\hat{h}_k$  a megfelelő impulzusválaszokat jelöli. (3.22) stacionárius pontjai az  $\{a_k\}$  és  $\{b_k\}$  szerinti elsőrendű parciális deriváltak eltűnésének feltételéből kaphatók, mellyel a

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{z^{-k}}{A(z)}, H(z) - \hat{H}(z) \right\rangle &= 0, \quad k = 0, 1, \dots, M, \\ \left\langle \frac{z^{-k}}{A(z)} \hat{H}(z), H(z) - \hat{H}(z) \right\rangle &= 0, \quad k = 0, 1, \dots, M \end{aligned}$$

ortogonalitási relációk írhatók fel. A stacionárius pontok megadhatók a 3.2.1. pontban ismertetett interpolációs feltételekkel is.

A racionális  $H_2$  approximáció normalitási tulajdonsággal bír, ami a következőt jelenti: Legyen  $\hat{H}(z)$  (3.22) stacionárius pontja. Ha  $\hat{H}(z)$  lokális minimumhely, akkor nem lehetnek pólus-zérus kioltásai ( $\hat{H}(z)$  relatív prím). A normalitási tulajdonságnak egy elemi, de fontos következménye, hogy a

$$s_k = \min_{\deg \hat{H}(z) \leq M} \left\| H(z) - \hat{H}(z) \right\|_2$$

definícióval  $s_{k+1} < s_k$  teljesül minden  $k$ -ra. Szavakkal megfogalmazva,  $\hat{H}(z)$  approximánsunk fokszámát növelve, a globális minimumhelyeken szigorúan monoton csökkenő reziduális hibák sorozatát kapjuk. Nem minden racionális approximációs költségfüggvény rendelkezik ezzel a jellemzővel.

A minimumhelyek számát jó volna egyre korlátozni, azonban sajnos nem ismerjük kielégítően ennek feltételeit. Bevezetve a redukált hibafelület és az elfajult pont fogalmát, néhány megállapítást azért így is tehetünk. A redukált hibafelületet a  $\|H(z) - \hat{H}(z)\|_2$ ,  $\hat{H}(z)$  paramétereitől függő hibafelületből kapjuk úgy, hogy a rögzített pólusok (tehát  $\{a_k\}$ -k) mellett a zérusok (tehát  $\{b_k\}$ -k) optimalizálásával kapott formulát a reziduális hiba előbbi kifejezésébe helyettesítjük. A redukált hibafelület tehát csak a pólusok helyzetének (nemkvadratikus) függvénye. Belátható, hogy a redukált hibafelület minimumhelyei az eredeti  $\|H(z) - \hat{H}(z)\|_2$  költségfüggvénynek (hibafelületnek) is minimumhelyei, a maximumhelyek és a nyeregponatok pedig a költségfüggvény nyeregponatainak feleltethetők meg.

Elfajult pontnak nevezzük a redukált hibafelületnek azon pontjait, amelyekben  $\hat{H}(z)$  azonosan konstans. Tegyük fel, hogy  $\hat{H}(z)$   $M$ -edfokú. A redukált hibafelület elfajult pontot tartalmaz akkor, és csak akkor, ha  $z[H(z)]_+$ -ből egy  $M$ -edfokú minimumátértesztő tényező kiemelhető (a  $\mathcal{H}_2$ -beli függvények körében). Az elfajult pontok iránti érdeklődést az a tény táplálja, hogy ezekben a pontokban a redukált hibafelületnek maximumhelye, a  $\|H(z) - \hat{H}(z)\|_2$  költségfüggvénynek tehát nyeregponata van. Néhányan feltételezték, hogy az elfajult pontok jelenléte elégséges feltétel lokális minimumok létezéséhez. Elsőfokú  $\hat{H}(z)$ -re a feltételezés be is bizonyítható.

A (3.22)  $\mathcal{H}_2$  approximációs probléma igazolhatóan invariáns a frekvenciatranszformációk egy bizonyos körére vonatkozóan, vagyis a stacionárius pontok és azok típusa változatlan marad a transzformáció után is. A frekvenciatranszformációval szemben támasztott két követelmény, hogy

- szigorúan kauzális függvényt szigorúan kauzális függvénybe képezzen le. Ha függvény racionális, a fokszámot őrizze meg;
- a függvény  $L_2$ -normáját ne változtassa meg.

Egy ilyen  $z \rightarrow w = \alpha(z)$  transzformáció konstrukciója megtalálható [5, 201. oldal]-ban.

Az  $L_2$  költségfüggvény stacionárius pontjainak lehetséges számáról ad felvilágosítást az indexre vonatkozó tétel. Tegyük fel, hogy a stacionárius pontok száma  $k$  ( $\hat{H}_1(z), \dots, \hat{H}_k(z)$ ), az elfajult stacionárius pontokat is beleértendő. Legyen  $\mathbf{P}$  a  $\|H(z) - \hat{H}(z)\|_2$  költségfüggvény Hesse-mátrixa, vagyis a másodrendű,  $\{a_k\}$  és  $\{b_k\}$  paraméterek szerinti parciális deriváltakból alkotott  $(2M + 1) \times (2M + 1)$ -es mátrix. A stacionárius pontok indexét a  $\sum_{i=1}^k (-1)^{\varepsilon_i}$  definiálja, ahol  $\varepsilon_i$   $\mathbf{P}$ -nek az  $i$ -edik stacionárius ponthoz tartozó negatív sajátértékeinek száma. Az említett tétel szerint

$$\sum_i (-1)^{\varepsilon_i}. \quad (3.23)$$

Az állítás nem függ az approximálandó  $H(z)$  függvénytől. (3.23) szerint, ha legalább két stacionárius pont létezik, mindegyikük nem lehet minimumhely. Ennek egyszerű következményei:

- Ha minden stacionárius pontra biztosítható, hogy minimumhely legyen, akkor az  $L_2$  költségfüggvény unimodális, egyetlen stacionárius pontja globális minimumhely is egyben.
- Ha legalább két minimumhely létezik, akkor nyeregpontoknak is jelen kell lenniük.

Az előbbi következmény analitikus módszert szolgáltat egy költségfüggvény unimodalitásának igazolására. Az utóbbi következmény a stacionárius pontok numerikus keresésénél használható annak feltárására, hogy vajon létezhetnek-e még további stacionárius pontok, amiket a keresés során nem találtunk meg.

A 3.2.2. pontban tárgyalt Hankel-approximációs feladat kapcsolatba hozható a  $\mathcal{H}_2$  approximációs problémával is. Konkrétan, a  $H(z) - \hat{H}(z)$  hibafüggvény minimál-fázisú részéből egy  $\mathbf{S}$  súlymátrix képezhető, amellyel a  $\|H(z) - \hat{H}(z)\|_2$  költségfüggvény stacionárius pontjaiban érvényes, hogy a költségfüggvény  $L_2$  normája megegyezik a súlyozott Hankel-approximációs probléma megoldásának (Hankel-)normájával:

$$\left\| (\Gamma_H - \Gamma_{\hat{H}}) \mathbf{S} \right\| = \sigma_{M+1}(\Gamma_H \mathbf{S}) = \left\| H(z) - \hat{H}(z) \right\|_2 \quad (3.24)$$

ahol  $\Gamma_F$  az  $F$  függvény Hankel-formáját,  $\sigma_k(\cdot)$  az argumentum  $k$ -edik szinguláris értékét jelöli. Ha a  $H(z) - \hat{H}(z)$  hibafüggvény azonosan konstans (mindentáteresztő), akkor  $\mathbf{S} = \mathbf{I}$ , tehát (3.24) súlyozatlan Hankel-formákkal is érvényes.

### 3.3. Idővariáns rekurzív szűrők stabilitása

Adaptációs algoritmusok viselkedését nem vizsgálhatjuk érdemben anélkül, hogy ne feltételeznénk az algoritmus által hangolt parametrikus szűrő valamilyen értelemben vett stabilitását az adaptációs folyamat során. Idővariáns szűrőkről lévén szó, elkerülhetetlenül beleütközünk az idővariáns rendszerek stabilitásának kérdésébe. A 3.1. pontban bevezetett állapotváltozós leírás alapján egyszerűen megfogalmazhatjuk egy lineáris időinvariáns rendszer stabilitásának szükséges és elégséges feltételét: az  $\mathbf{A}$  rendszermátrix sajátértékeinek az egységkörön belül kell lenniük. Idővariáns esetre ez a feltétel szükséges ugyan, de nem elegendő. Biztosítanunk kell még azt is, hogy a paraméterek elég lassan változzanak, az adaptív szűrő kimenete kvázistacioner jellegű legyen. A lassú adaptáció megszorítását elhagyva, a stabilitás-elméletben használt Ljapunov-módszerekhez fordulhatunk segítségért, ezek a módszerek ugyanis sikerrel kiterjeszthetők az idővariáns IIR szűrők esetére.

(3.3) felírást az idővariáns esetre alkalmazva adódik

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(n+1) \\ \hat{y}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(n) & \mathbf{b}(n) \\ \mathbf{c}(n) & d(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(n) \\ u(n) \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

A szűrő kimenetét minden iterációs lépésben a bemenet és az állapotváltozók aktuális értéke határozza meg. Ha egy olyan szűrőt tekintünk, melynek paramétereit egy adott  $n$  lépésben rögzítettük,  $\begin{bmatrix} \mathbf{A}(k) & \mathbf{b}(k) \\ \mathbf{c}(k) & d(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(n) & \mathbf{b}(n) \\ \mathbf{c}(n) & d(n) \end{bmatrix}$ , minden  $k \geq n$ -re, a kimenetet vizsgálva megállapíthatjuk, hogy az hasonlítani fog a (3.25) szűrő kimenetére, amennyiben a paraméterek változása elég lassú,

$$\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{A}(k-1) & \mathbf{b}(k-1) \\ \mathbf{c}(k-1) & d(k-1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{A}(k) & \mathbf{b}(k) \\ \mathbf{c}(k) & d(k) \end{bmatrix} \right\| \leq \varepsilon \quad \forall k \leq n, \quad \varepsilon > 0 \text{ kicsi,}$$

illetve a bemeneti  $u(n)$  sorozat és a kezdeti feltételek ( $\mathbf{x}(-\infty)$ ) megegyeznek. Ha  $\varepsilon$ -nal nullához tartunk, a két szűrő határesetben megegyezik.

Fontos megállapításokat tehetünk, ha a fentieket az adaptációs algoritmusok ún. regresszor jeleinek kiszámításával hozzuk összefüggésbe. Adaptív IIR szűrők regresszor jelei tartalmazzák a szűrő korábbi állapotait, a szűrő „előéletét”. Minden olyan algoritmus, amely igényli, hogy a regresszorokat – vagy akár a kimeneti hibát – egy adott iterációban fix paraméterű szűrőt feltételezve számítsuk ki, közelítő megoldást fog tartalmazni. Azt megvalósítani ugyanis, hogy minden lépésben az adott „munkaponti” szűrőparaméterekkel egészen az algoritmus indulásától újra végigszámoljuk az adaptív szűrő jeleit, igen költséges, azon túl pedig valószínűleg csekély nyereséggel kecsegtető feladat lenne. Ehelyett élünk a lassú adaptációra vonatkozó közelítéssel, és az adaptív szűrő jeleit (kvázi)stacionernek tekintjük. Minél kisebb  $\varepsilon$ , annál helytállóbb a közelítés.

Valójában egy nemstacioner komponenst vittünk be a regresszorokba és a kimeneti hibába, ami csak akkor marad korlátos, ha az idővariáns szűrő stabil. Ebből is látható, hogy az adaptív szűrő stabilitása előfeltétele bármilyen paraméterkonvergenciának. Másrészt, tudjuk, hogy bizonyos idővariáns szűrőrealizációk stabilitása függ az adaptáció sebességétől, amiből arra következtethetünk, hogy ezek a realizációk a paraméterek konvergenciájához lassabb adaptációt (kisebb lépésközt) kívánnak meg, mint a feltétel nélkül – pontosabban a konvergenciasebességre vonatkozó feltétel nélkül – stabil szűrőrealizációk.

Azt is megállapítottuk, hogy a nemstacioner jelkomponensek kis értéken tartása végett az adaptáció lépésközét korlátozni kell. Adaptív FIR szűrőknél ilyen korlátozásokat nem kell bevezetnünk, hiszen a regresszorok ott nem tartalmazzák a szűrő teljes előéletét. Várható tehát, hogy az adaptív IIR szűrők adott algoritmussal lassabban fognak konvergálni, mint azonos fokszámú FIR társaik.

### 3.3.1. Stabilitásfogalmak, Ljapunov-módszer

Stabilitás alatt a továbbiakban mindig gerjesztés-válasz (*Bounded-Input-Bounded-Output*, *BIBO*) stabilitást fogunk érteni, ami azt jelenti, hogy minden korlátos bemeneti sorozathoz:  $\sup_n |u(n)| < \infty$ , korlátos kimeneti sorozat tartozik:  $\sup_n |\hat{y}| < \infty$ . A gerjesztés-válasz stabilitás biztosított, ha

- a (3.25) állapotváltozós leírás  $(\mathbf{A}(n), \mathbf{b}(n), \mathbf{c}(n), d(n))$  elemei korlátosak minden  $n$ -re;
- az állapotrekurzió homogén része,  $\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}(n)\mathbf{x}(n)$  exponenciálisan stabil.

Valóban, az első feltétel meglehetősen plauzibilis, a második a (3.25) egyenlet utolsó sorából következik, lévén az  $\hat{y}(n)$  kimeneti sorozat csak  $\mathbf{x}(n)$  állapotvektor korlátossága esetén biztosított. Az exponenciális stabilitás értelmezésével összhangban  $\|\mathbf{x}(n)\| < \infty$  minden  $n$ -re, és a homogén rendszer kimeneteként előálló  $\{\mathbf{x}(\cdot)\}$  vektorsorozatra

$$\|\mathbf{x}(m)\| \leq \beta \alpha^{m-n} \|\mathbf{x}(n)\|, \quad \forall m \geq n$$

teljesül, ahol  $\beta$  egy rögzített konstans,  $0 \leq \alpha < 1$ . Másképpen ez azt fejezi ki, hogy az állapotvektorok normájának sorozata exponenciális mértékben – de nem feltétlenül exponenciálisan – tart az origóhoz:  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(m)\| / \gamma^m = 0$ , minden  $\alpha < \gamma < 1$ .

Ha csupán annyit tételezünk fel, hogy az  $\mathbf{A}(n)$  rendszermátrix sajátértékei minden  $n$ -re az egységkörön belül maradnak, akkor az  $\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}(n)\mathbf{x}(n)$  homogén állapotrekurzió exponenciális stabilitása csak lassú adaptációt feltételezve biztosítható. Analitikus formában nehéz megragadni a „lassúság” szükséges mértékét, az azonban elmondható, hogy az egységkörhöz közeli sajátértékek (gyengén csillapított pólusok) az adaptáció lépésközének drasztikus csökkentését tehetik szükségessé.

A Ljapunov-módszer rendszerek passzivitási tulajdonságait vizsgálja. Ha a kérdéses rendszerhez rendelt Ljapunov-függvényről belátható, hogy monoton csökkenő, akkor az állapotrekurzió homogén része exponenciálisan stabil, függetlenül az adaptáció lépésközétől. A levezetéseket mellőzve, belátható, hogy

#### 2. Tétel. A homogén, diszkrét idejű

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}(n)\mathbf{x}(n)$$

rendszer exponenciálisan stabil, ha létezik olyan  $\mathbf{P}$  szimmetrikus, pozitív definit mátrix, mely kielégíti a

$$\mathbf{P} - \mathbf{A}^t(n)\mathbf{P}\mathbf{A}(n) = \mathbf{C}(n)\mathbf{C}^t(n)$$

Ljapunov-egyenletet úgy, hogy a  $\{\mathbf{C}(\cdot)\}$  mátrixsorozattal alkotott  $[\mathbf{A}(\cdot), \mathbf{C}^t(\cdot)]$  pár egyenletesen megfigyelhető.

Az egyenletes megfigyelhetőség definiálásához képezzük az  $[\mathbf{A}(\cdot), \mathbf{C}^t(\cdot)]$  párhoz rendelt

$$\mathcal{O}(m, n) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^t(n) \\ \mathbf{C}^t(n+1)\mathbf{A}(n) \\ \mathbf{C}^t(n+2)\mathbf{A}(n+1)\mathbf{A}(n) \\ \vdots \\ \mathbf{C}^t\Phi(m, n) \end{bmatrix}$$

mátrixot, mely az  $n, n+1, \dots, m$  időablakra érvényes.

$$\Phi(m, n) = \mathbf{A}(m-1)\mathbf{A}(n+1)\mathbf{A}(n), \quad m > n$$

az állapotátmenetek mátrixa. Az  $[\mathbf{A}(\cdot), \mathbf{C}^t(\cdot)]$  párról azt mondjuk, hogy egyenletesen megfigyelhető, ha létezik  $M$  egész szám és  $c_1, c_2$  pozitív konstansok, hogy

$$0 < c_1 \mathbf{I} \leq \mathcal{O}^t(n+M-1, n)\mathcal{O}(n+M-1, n) \leq c_2 \mathbf{I} < \infty, \quad \forall n$$

teljesül. A 2.Tétel felhasználásával igazolható, hogy az idővariáns normalizált lattice szűrő exponenciálisan stabil, ha a  $\theta_k(\cdot)$  forgatási szögekre

$$|\theta_k(n)| \leq \frac{\pi}{2} - \delta, \quad \forall k, n, \quad (3.26)$$

ahol  $0 < \delta \leq \pi/2$  rögzített,  $k$ -től és  $n$ -től független konstans. Vegyük észre, hogy a (3.26) feltétel időinvariáns esetben pontosan a már említett,  $\mathbf{A}$  sajátértékeire vonatkozó feltétellel egyezik meg. Mivel (3.26) ellenőrzése problémamentes, a lattice szűrő ezért gyakorlatilag – és az adaptációs lépésköztől függetlenül – strukturálisan stabil.

### 3.3.2. ODE módszer

Adaptációs algoritmusok konvergenciatulajdonságainak felderítésére használatos a differenciálegyenlet (*Ordinary Differential Equation – ODE*) módszer. A módszer a diszkrét idejű paraméter adaptációs algoritmusok konvergenciáját – stacionárius pontjait – közöséges differenciálegyenletek stabilitási tulajdonságaihoz kapcsolja: a hozzárendelt differenciálegyenlet stabil egyensúlyi (stacionárius) pontjai megfelelnek az adaptációs algoritmus konvergenciapontjainak. A differenciálegyenletek stabilitása ez előző pontban tárgyalt Ljapunov-módszer módosított változatával vizsgálható.

A módszert eltűnő adaptációs lépésköze dolgozták ki, később lett csak kiterjesztve állandó lépésköz esetére, amikor is a konvergenciának egy gyenge változata, valószínűségi vagy közép értelemben vett konvergencia igazolható csak. Ilyenkor a paraméter trajektóriák aszimptotikusan egy stacionárius valószínűségi változóhoz tartanak, amelynek várható értéke megegyezik a hozzárendelt differenciálegyenlet egy stabil stacionárius pontjával. A paraméterek varianciája sohasem zérus.

Az eltűnő lépésközű adaptációs algoritmusok csak stacionárius viszonyok között alkalmazhatók, nemstacioner jelek követésére eleve alkalmatlanok, ami pedig aktív zajcsökkentésben, vagy sok más adaptív jelfeldolgozási feladatban a priori célkitűzés lenne. A z eltűnő lépésközhöz ezenkívül általában  $1/n$ -es konvergenciasebesség tartozik, míg a fix lépésközű algoritmusok exponenciálisan gyorsan konvergálnak (ha konvergálnak). Az exponenciális konvergencia bizonyos robusztusságot is von

maga után a paraméterek kis perturbációival szemben, amilyenek például az adaptációs formulákban lévő közelítések, kicsiny aritmetikai hibák. Mindezen okok miatt ANC gyakorlatban a fix lépésköz használata általános, az ODE módszernek is a fix lépésközzre kidolgozott változatát ismertetjük.

Jelölje  $\mathbf{p}(n)$  a paraméterek vektorát,  $\nabla(n)$  pedig a regresszor vektort az  $n$ -edik lépésben. A szűrőparaméterek iterációs formulája általában felírható az alábbi kompakt jelölésmóddal

$$\mathbf{p}(n+1) = \mathbf{p}(n) + \mu e(n, \{\mathbf{p}(n)\}) \cdot \nabla(n, \{\mathbf{p}(n)\}). \quad (3.27)$$

Az argumentumok között szereplő  $\{\mathbf{p}(n)\}$  arra utal, hogy mind a kimeneti hiba, mind a regresszorok aktuális értéke a paraméterek előéletétől,  $\mathbf{p}(n), \mathbf{p}(n-1), \dots$  vektoroktól függ. Tekintsük a (3.27) formulát és tegyük fel, hogy

- a külső  $\{u(\cdot)\}$  és  $\{y(\cdot)\}$  sorozatok együttesen stacionárius sztochasztikus folyamatok;
- a szűrők, melyek az  $e(\cdot)$  és  $\nabla(\cdot)$  jeleket előállítják, exponenciálisan stabilak  $\mathbf{p}(\cdot)$  egy jól definiált tartományában.

Felírható az alábbi

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = f(\mathbf{p}) = E[e(n | \mathbf{p}) \cdot \nabla(n | \mathbf{p})] \quad (3.28)$$

(sztochasztikus) differenciálegyenlet, ahol a jobb oldal rögzített  $\mathbf{p}$  paraméterek mellett értendő (a jobb oldal ezáltal egy  $\mathbf{p}$ -től függő  $f(\mathbf{p})$  függvényt definiál). Elegendően kis lépésköz mellett  $\mathbf{p}_*$  a paraméterterben a (3.27) adaptációs algoritmus középértékben vett konvergenciapontja akkor, és csak akkor, ha  $\mathbf{p}_*$  a (3.28) differenciálegyenlet stabilis stacionárius pontja is egyben.

A (3.28) differenciálegyenlet stacionárius pontjainak ismeretében két standard módszer kínálkozik a pontok stabilitásának eldöntésére. Mindkét módszer Ljapunov nevéhez kötődik: az egyik a Ljapunov-függvény direkt keresése; a másik indirekt, lokális linearizáción alapul. A Ljapunov-függvény megtalálása általános esetben nehéz feladat, recept nem adható rá. Speciális esetekre, mint például olyan  $f(\mathbf{p})$  függvényekre, melyek egy költségfüggvény negatív gradienseként íratók fel, szerencsére léteznek kész konstrukciók. Az indirekt módszer mindig alkalmazható, bár gyakran elég körülményesen, ellenben kizárólag a stacionárius pontok lokális stabilitásról ad felvilágosítást, melyből az attraktor tartományok nem következnek triviálisan.

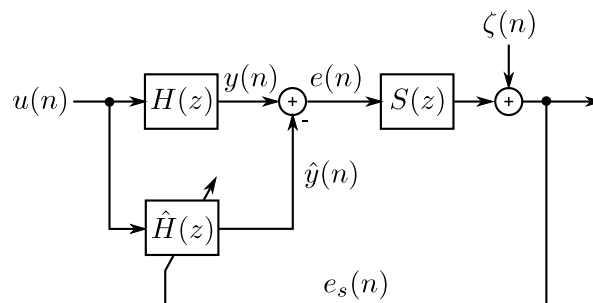


## 4. fejezet

# Rekurzív adaptációs algoritmusok

Az adaptációs algoritmusok alkotják az adaptív szűrők „motorját”. Szerepük kiemelt fontosságú bármely adaptív jelfeldolgozó rendszerben: adott szűrőrealizáció együtthatóinak hangolása általában valamilyen költségfüggvény mentén, valós időben. Az algoritmusok bemenetét az előző iterációban kapott paraméterek (együtthatók) vektora, az előéletet tartalmazó regresszorvektor és az adaptív szűrés valamilyen értelemben vett hibája alkotják. A kimenet az új, frissített paraméter- és regresszorvektor. A továbbiakban mindvégig adaptív IIR algoritmusokról lesz szó.

Családokba egységes, általános működési elv, pl. a költségfüggvény fajtája, az alkalmazott approximációs kritérium stb. szerint soroljuk az algoritmusokat, a családokon belül pedig minimális módosításokat tartalmazó, vagy eltérő szűrőrealizációra vonatkozó variánsokat különböztetünk meg. A fejezetben a szimulációkhoz használt algoritmusok családok szerint rendszerezett áttekintése található, röviden szót ejtve az adott algoritmuscsalád működési elvéről, költségfüggvényéről (ha van ilyen), az algoritmusok analitikus és tapasztalati tulajdonságairól. Az algoritmusokat tételesen is ismertetjük. Amint arról már esett szó, az aktív zajcsökkentésben használt struktúra jellegzetessége, hogy az adaptív algoritmusok kimeneti hibája közvetlenül nem, csak egy közbenső szűrés után (lásd 4.1. ábra) kapható meg (*filtered error case*). Az adaptív algoritmusokat ennek megfelelően módosítani kell, amire szintén ki fogunk térni.



4.1. ábra. Szűrt hiba konfiguráció.

## 4.1. Sztochasztikus gradiens algoritmusok

Az ebbe a családba tartozó algoritmusok az OE kimeneti hibára vonatkozó költségfüggvényt definiálnak. Céljuk, hogy megtalálják a racionális  $\hat{H}(z)$  azon paramétereit, amelyek mellett az

$$e(n) = y(n) - \hat{y}(n) = [H(z) - \hat{H}(z)] u(n) + \zeta$$

hiba négyzetének várható értéke (*Mean Square Error – MSE*) minimális. A referenciamodell kimenete  $y(n) = H(z)u(n) + \zeta(n)$ . A költségfüggvény tehát az OE approximációnál említett  $E[e^2(n)]$  (lásd (3.14)). A probléma lényegében a optimális lineáris szűrés átfogalmazása: az adaptív algoritmus célja az optimális Wiener-szűrő paramétereinek megtalálása [4], [14].

Az LMS (*Least Mean Square*) algoritmus a következő: a szűrőegyütthetők (általánosabban paraméterek)  $\mathbf{w}(n)$  vektorát minden lépésben (iterációban) a hiba-függvény negatív gradiensének irányában mozdítjuk el, az elmozdulás mértékét a  $\mu$  adaptációs lépésköz szabályozza:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \frac{\mu}{2} \cdot \nabla E[e^2(n)]. \quad (4.1)$$

A paraméterek vektora a hibafelület, azaz a költségfüggvény skalárterének gradiense mentén mozog, tehát mindig a MSE minimumhelye irányába tart. FIR szűrőkre a hibafelület a paraméterek kvadratikus függvénye, egyetlen globális minimumhellyel (unimodális); az algoritmus egyedüli konvergenciapontja a Wiener-szűrőnek felel meg, mátrixok invertálására pedig közben nem volt szükség. IIR szűrők esetében a hibafelület általában  $-\mathcal{S}_u(z)$ -től függően akár még  $\deg H(z) \leq M$  mellett is [5] – multimodális, az előbbi algoritmus esetenként, a kezdeti feltételek függvényeként lokális minimumhelyhez konvergál.

A paraméterfrissítéshez szükséges gradiens kifejezésében szerepel a várhatóérték-képzés operátora, ezért egy további közelítéssel élünk. A várható értéket a pillanatnyi értékkel helyettesítjük, és tudomásul vesszük, hogy az így nyert közelítő gradiens egy valószínűségi változó, melynek várható értéke megegyezik a valódi gradienssel: a paraméterkonvergencia közép értelemben valósul meg.

### 4.1.1. Algoritmusok direkt formára

A költségfüggvény felírható az  $E[e^2(n)] = \langle H(z) - \hat{H}(z), \mathcal{S}_u(z)[H(z) - \hat{H}(z)] \rangle$  alakban, ekkor a gradiensek kifejezése

$$\begin{aligned} \frac{\partial E[e^2(n)]}{\partial b_k} &= 2E \left[ \frac{\partial e(n)}{\partial b_k} e(n) \right] = -2 \left\langle \frac{\partial \hat{H}(z)}{\partial b_k}, \mathcal{S}_u(z) [H(z) - \hat{H}(z)] \right\rangle, \\ \frac{\partial E[e^2(n)]}{\partial a_k} &= 2E \left[ \frac{\partial e(n)}{\partial a_k} e(n) \right] = -2 \left\langle \frac{\partial \hat{H}(z)}{\partial a_k}, \mathcal{S}_u(z) [H(z) - \hat{H}(z)] \right\rangle. \end{aligned}$$

Bevezetve a regresszorokat (a bemenet korábbi értékeiből szűréssel előállított jeleket) a következő

$$\begin{aligned} \nabla_{b_k}(n) &\triangleq \frac{z^{-k}}{A(z)} u(n) \quad k = 0, 1, \dots, M \\ \nabla_{a_k}(n) &\triangleq -\frac{z^{-k}}{A(z)} \hat{H}(z) u(n) \quad k = 1, 2, \dots, M \end{aligned}$$

definícióval, és a várható érték operátorát a fent javasolt módon elhagyva, az óhajtott paraméterfrissítési formula adódik:

$$\begin{bmatrix} b_0(n+1) \\ \vdots \\ b_M(n+1) \\ a_1(n+1) \\ \vdots \\ a_M(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0(n) \\ \vdots \\ b_M(n) \\ a_1(n) \\ \vdots \\ a_M(n) \end{bmatrix} + \mu e(n) \begin{bmatrix} \nabla_{b_0}(n) \\ \vdots \\ \nabla_{b_M}(n) \\ \nabla_{a_1}(n) \\ \vdots \\ \nabla_{a_M}(n) \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

A jelölések egyszerűsítése végett az alábbi vektoros írásmódhoz folyamodhatunk:

$$\mathbf{w}(n) = [b_0(n) \ \cdots \ b_M(n) \ a_1(n) \ \cdots \ a_M(n)]^t = \begin{bmatrix} \mathbf{b}(n) \\ \mathbf{a}(n) \end{bmatrix}$$

a direkt formájú szűrőparaméterek vektora,

$$\nabla_d(n) = [\nabla_{b_0}(n) \ \cdots \ \nabla_{b_M}(n) \ \nabla_{a_1}(n) \ \cdots \ \nabla_{a_M}(n)]^t = \begin{bmatrix} \nabla_a(n) \\ \nabla_b(n) \end{bmatrix}$$

pedig a regresszorokból alkotott vektor, ahol a  $d$  alsó index a direkt formára utal. (4.2) vektorokkal kifejezett alakja

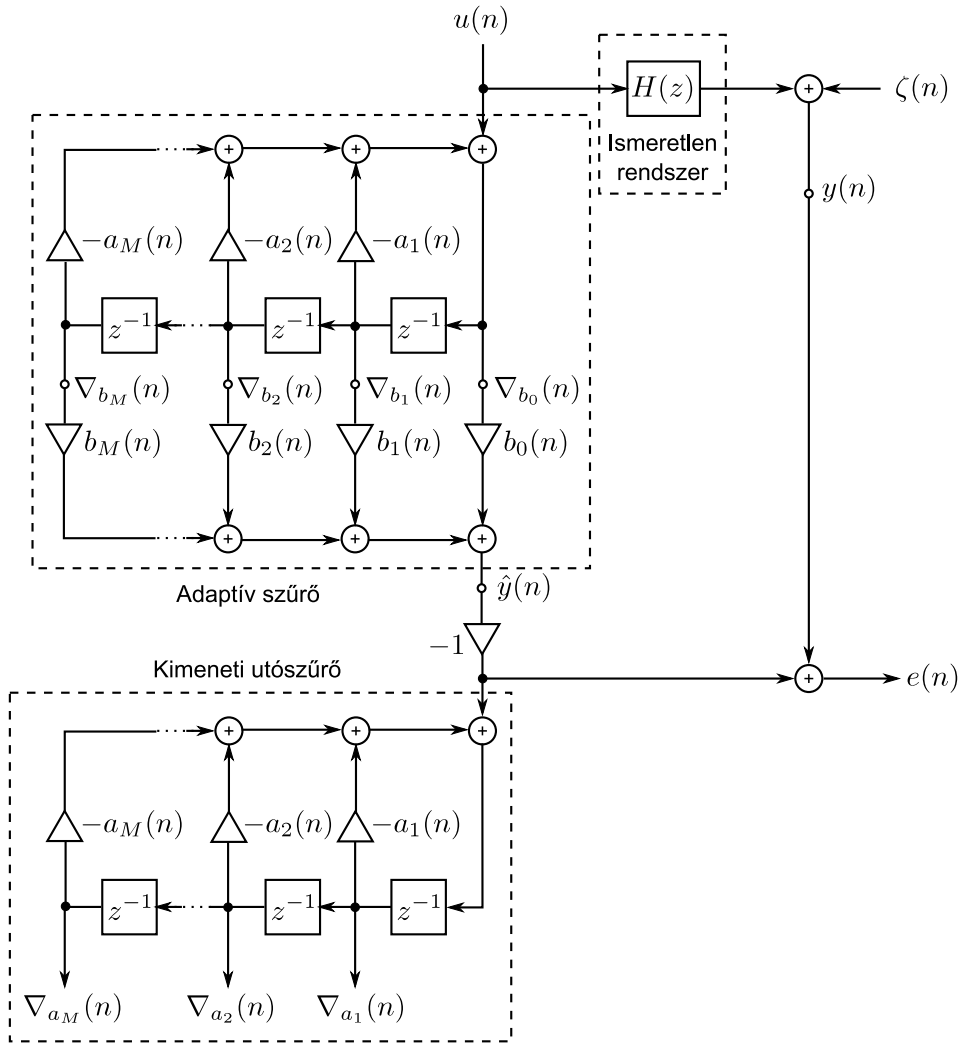
$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu e(n) \nabla_d(n). \quad (4.3)$$

Megjegyezzük, hogy a  $\mu$  lépésköz általánosítható úgy is, hogy az  $\{a_k\}$  és a  $\{b_k\}$  paraméterekre külön-külön írjuk elő ( $\mu_a$  és  $\mu_b$ ), illetve úgy is, hogy egyetlen  $\mu_b$  mellett akár minden rekurzív  $\{a_k\}$  szűrőegyütthető saját lépésközt kap ( $\mu_b, \mu_{a_1}, \mu_{a_1}, \dots$ ) [4]. Az általánosított lépésközt használva (4.3)

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mathbf{M}e(n) \nabla_d(n)$$

formában írható, ahol  $\mathbf{M}$  egy  $(2M+1) \times (2M+1)$ -es diagonális mátrix.

A 4.2. ábrán látható az algoritmus regresszorainak előállítás DF-II szűrőrealizációt feltételezve. Vegyük észre, hogy ebben a realizációban a regresszorok mint a szűrők állapotai jelennek meg.



4.2. ábra. Regresszorok előállítás a direkt formájú algoritmusban.

**Algoritmus 1 (RLMS).**

Az  $n$ -edik lépésben rendelkezésre áll

- Szűrőállapotok:

$$\begin{aligned} \nabla_{b_0}(n-1), \nabla_{b_1}(n-1), \dots, \nabla_{b_{M-1}}(n-1) & \text{ (Adaptív szűrő);} \\ \nabla_{a_1}(n), \nabla_{b_1}(n), \dots, \nabla_{a_M}(n) & \text{ (Kimeneti utószűrő).} \end{aligned}$$

- Szűrőegyütthetők:

$$a_1(n), a_2(n), \dots, a_M(n), b_0(n), \dots, b_M(n).$$

- Frissített jelek:  $u(n)$  bemeneti minta,  $y(n)$  referencia minta.

*Szűrőiteráció*

- Az adaptív szűrő állapotrekurziója:

$$\begin{bmatrix} \nabla_{b_0}(n) \\ \nabla_{b_1}(n) \\ \vdots \\ \nabla_{b_M}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1(n) & -a_2(n) & \cdots & -a_M(n) & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{b_0}(n-1) \\ \vdots \\ \nabla_{b_M}(n-1) \\ u(n) \end{bmatrix}.$$

- $\hat{y}(n)$  kimeneti minta és  $e(n)$  kimeneti hiba:

$$\begin{aligned} \hat{y}(n) &= \sum_{k=0}^M b_k(n) \nabla_{b_k}(n); \\ e(n) &= y(n) - \hat{y}(n). \end{aligned}$$

- A szűrőegyütthetők frissítése:

$$\begin{aligned} b_k(n+1) &= b_k(n) + \mu_b e(n) \nabla_{b_k}(n), \quad k = 0, 1, \dots, M; \\ a_k(n+1) &= a_k(n) + \mu_{a_k} e(n) \nabla_{a_k}(n), \quad k = 1, 2, \dots, M. \end{aligned}$$

- A kimeneti utószűrő állapotrekurziója:

$$\begin{bmatrix} \nabla_{a_1}(n+1) \\ \nabla_{a_2}(n+1) \\ \vdots \\ \nabla_{a_M}(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1(n+1) & -a_2(n+1) & \cdots & -a_M(n+1) & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{a_1}(n) \\ \vdots \\ \nabla_{a_M}(n) \\ -\hat{y}(n) \end{bmatrix}$$

A továbbiakban, ahol lehet, a vektoros írásmódra térünk át, mely azon kívül, hogy a jelöléseket egyszerűsíti, a MATLAB-implementációkkal is közelebbi viszonyban áll. Legyen az eddig bevezetett vektorokon kívül

$$\nabla_b(n-1) = [\nabla_{b_0}(n-1) \quad \cdots \quad \nabla_{b_{M-1}}(n-1)]^t.$$

A lépésközre ezután minden algoritmusban a  $\mu$  skalárt fogjuk használni.

A Rekurzív LMS (RLMS) algoritmus egy módosított változata szerint előbb az  $\{a_k\}$  paramétereket frissítjük, majd a frissített paramétereket használjuk az adaptív szűrő állapotrekurziójához [5].

**Algoritmus 2 (RLMS mod.).**

Az  $n$ -edik lépésben rendelkezésre áll

- Állapotvektorok:

$$\begin{aligned}\nabla_b(n-1) & \text{ (Adaptív szűrő);} \\ \nabla_a(n) & \text{ (Kimeneti utószűrő).}\end{aligned}$$

- A szűrőegyütthetők vektorai:

$$\mathbf{a}(n) \text{ és } \mathbf{b}(n).$$

- Frissített jelek:  $u(n)$  bemeneti minta,  $y(n)$  referencia minta.

*Szűrőiteráció*

- Segédjel az adaptív szűrőhöz:

$$x(n) = u(n) - \mathbf{a}(n)^t \nabla_b(n-1).$$

- $\tilde{y}(n)$  a priori kimeneti minta és  $\tilde{e}(n)$  a priori kimeneti hiba

$$\begin{aligned}\tilde{y}(n) &= \mathbf{b}(n)^t \begin{bmatrix} x(n) \\ \nabla_b(n-1) \end{bmatrix}; \\ \tilde{e}(n) &= y(n) - \tilde{y}(n).\end{aligned}$$

- A visszacsatolt (*feedback*) szűrőegyütthetők frissítése

$$\mathbf{a}(n+1) = \mathbf{a}(n) + \mu \tilde{e}(n) \nabla_a(n).$$

- Az adaptív szűrő állapotrekurziója:

$$\nabla_b(n) = \begin{bmatrix} -\mathbf{a}(n+1)^t & 1 \\ \mathbf{I}_M & \mathbf{0}_{M \times 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_b(n-1) \\ u(n) \end{bmatrix}.$$

- $\hat{y}(n)$  a posteriori kimeneti minta és  $e(n)$  a posteriori kimeneti hiba:

$$\begin{aligned}\hat{y}(n) &= \mathbf{b}(n)^t \nabla_b(n); \\ e(n) &= y(n) - \hat{y}(n).\end{aligned}$$

- A transzverzális (*feedforward*) szűrőegyütthetők frissítése:

$$\mathbf{b}(n+1) = \mathbf{b}(n) + \mu e(n) \nabla_b(n).$$

- A kimeneti utószűrő állapotrekurziója:

$$\nabla_a(n+1) = \begin{bmatrix} -\mathbf{a}(n+1)^t & 1 \\ \mathbf{I}_{M-1} & \mathbf{0}_{M-1 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_a(n) \\ -\hat{y}(n) \end{bmatrix}$$

### 4.1.2. Lattice gradiens algoritmusok

A normalizált lattice szűrőhöz ugyanazon az elven szerkeszthetünk sztochasztikus gradiens algoritmusokat, mint a direkt szűrőrealizációkhoz. A kétféle változat között csak a realizációk stabilitási tulajdonságait tekintve van különbség. Lattice formában a regresszorok előállítására  $M^2$ -tel arányos művelet- és tárolási igényű algoritmushoz vezet, ha az előírt deriválásokat a (3.10) Schur-rekurzió szisztematikusan elvégezzük. A nagy bonyolultság sokáig korlátozó tényező volt a lattice gradiens algoritmusok elterjedésében, később azonban sikerült a bonyolultságot  $M$  nagyságrendjébe korlátozni.

Az egyszerűsítések lényege röviden az, hogy egy transzponált lattice szűrőt is felhasználva olyan összetett jeleket, illetve átviteli függvényeket keresünk, melyekre rekurzió írható fel, és amelyek mellesleg a regresszorokat is előállítják. A műveletigény így  $M$  nagyságrendjében marad, hiszen a regresszorok előállításához csak egyetlen, a lattice szűrőhöz hasonlóan moduláris szerkezetű szűrőt kell iterálni. A levezetés eléggé körmönfont és hosszadalmas, a kapott algoritmus azonban meglehetősen egyszerű. Itt csak az algoritmust közöljük, a részletek megtalálhatók [5]-ben.

Legyenek a lattice paramétereinek vektorai

$$\nu(n) = [\nu_0(n) \ \nu_1(n) \ \cdots \ \nu_M(n)]^t, \quad \theta(n) = [\theta_1(n) \ \theta_2(n) \ \cdots \ \theta_M(n)]^t,$$

a regresszorok vektorai pedig

$$\begin{aligned} \nabla_\nu(n-1) &= [\nabla_{\nu_0}(n-1) \ \cdots \ \nabla_{\nu_{M-1}}(n-1)]^t, \\ \nabla_\nu(n) &= [\nabla_{\nu_0}(n) \ \cdots \ \nabla_{\nu_M}(n)]^t, \\ \nabla_\theta(n) &= [\nabla_{\theta_1} \ \cdots \ \nabla_{\theta_M}]^t, \end{aligned}$$

ahol

$$\begin{aligned} \nabla_{\nu_k}(n) &\triangleq -\frac{\partial e(n)}{\partial \nu_k} = \frac{\partial \hat{y}(n)}{\partial \nu_k} = \frac{\partial \hat{H}(z)}{\partial \nu_k} u(n), \\ \nabla_{\theta_k}(n) &\triangleq -\frac{\partial e(n)}{\partial \theta_k} = \frac{\partial \hat{y}(n)}{\partial \theta_k} = \frac{\partial \hat{H}(z)}{\partial \theta_k} u(n). \end{aligned}$$

#### Algoritmus 3 (L-RLMS).

Az  $n$ -edik lépésben rendelkezésre áll

- A szűrőegyütthetők vektorai:

$$\nu(n) \text{ és } \theta(n).$$

- Az adaptív szűrő állapotvektora:

$$\nabla_\nu(n-1).$$

$\nabla_{\nu_M}(n)$  kiszámításra kerül, de tárolni nem szükséges.

- Az utószűrő állapotai:

$$FS_k(n-1), \quad GT_k(n-1), \quad k = 0, 1, \dots, M-1.$$

$GT_M(n-1)$  kiszámításra kerül, de tárolni nem szükséges.

- Frissített jelek:  $u(n)$  bemeneti minta,  $y(n)$  referencia minta.

Az adaptív szűrő iterációja

- **Let**  $g_M = u(n)$ .
- **for**  $k = M, M - 1, \dots, 1$  **do**

$$\begin{bmatrix} g_{k-1} \\ \nabla_{\nu_k}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_k(n) & -\sin \theta_k(n) \\ \sin \theta_k(n) & \cos \theta_k(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_k \\ \nabla_{\nu_{k-1}}(n-1) \end{bmatrix}$$

**end for.**

- $\nabla_{\nu_0}(n) = g_0$ .
- Az adaptív szűrő kimenete:

$$\hat{y}(n) = \nu^t(n) \nabla_{\nu}(n).$$

- Kimeneti hiba:

$$e(n) = y(n) - \hat{y}(n).$$

Az utószűrő iterációja

- Segédváltozók:

$$\begin{aligned} GS_k, & \quad k = 0, 1, \dots, M; \\ FT_k, & \quad k = 0, 1, \dots, M; \\ \text{„node”, „temp”, „sum”} & \end{aligned}$$

- **Let**  $FT_M = \nu_M(n) \nabla_{\nu_M}(n)$  és  $GT_M(n-1) = \nu_M(n) u(n)$ .
- **for**  $k = M, M - 1, \dots, 1$  **do**

$$\begin{aligned} FT_{k-1} &= FT_k - [GT_k(n-1) + FS_{k-1}(n-1)] \sin \theta_k(n) + \nu_{k-1}(n) \nabla_{\nu_{k-1}}(n) \\ GT_{k-1}(n-1) &= GT_{k-1}(n-1) + \nu_{k-1}(n) g_{k-1} \end{aligned}$$

**end for**

- **Let**  $\text{node} = FT_0$  és  $GS_0 = GT_0(n-1)$ .
- **for**  $k = 1, 2, \dots, M$  **do**

$$\begin{aligned} \text{sum} &= (GS_{k-1} + FT_k) \sin \theta_k(n) \\ GT_{k-1}(n) &= GT_k(n-1) - \text{sum} \\ \text{temp} &= FS_{k-1}(n-1) + \text{sum} \\ GS_k &= GS_{k-1} + [FS_{k-1}(n-1) + GT_k(n-1)] \sin \theta_k(n) \\ FS_{k-1}(n) &= \text{node} \\ \text{node} &= \text{temp} \\ \nabla_{\theta_k} &= [GT_k(n-1) - \text{node}] / \cos \theta_k(n) \end{aligned}$$

**end for**



A szűrőegyütthetők frissítése

$$\begin{aligned}\nu(n+1) &= \nu(n) + \mu e(n) \nabla_{\nu}(n) \\ \theta(n+1) &= \theta(n) + \mu e(n) \nabla_{\theta}\end{aligned}$$

Stabilitási teszt

- **for**  $k = 1, 2, \dots, M$  **do**
  - if**  $|\theta_k(n+1)| > \frac{\pi}{2}$  **then**  $\theta_k(n+1) = \theta_k(n)$ .
- end for**

Emlékezzünk vissza, hogy a normalizált lattice szűrő átviteli függvénye a  $\hat{H}(z) = \sum_{k=0}^M \nu_k \hat{D}_k(z) / D_M(z)$  alakban írható fel. A  $\{\theta_k\}$  forgatási szögek optimális frissítésének formulájára

$$\theta_k(n+1) = \theta_k(n) + \mu e(n) \left( \sum_{l=0}^M \frac{\delta_k \hat{D}_l(z)}{D_M(z)} - \frac{\delta_k D_M(z)}{D_M(z)} \hat{H}(z) \right) u(n) \quad (4.4)$$

adódik, ahol bevezettük a  $\delta_k \triangleq \frac{\partial}{\partial \theta_k}$  jelölést. Tegyük fel, hogy a  $\{\nu_k\}$  transzverzális paramétereket rögzített forgatási szögek mellett már optimalizáltuk (vagyis a redukált hibafelületen mozgunk). Igazolható, hogy ekkor a (4.4)-ben szereplő 1-gyel jelölt tag zérus, a paraméterfrissítési formula így a

$$\theta_k(n+1) = \theta_k(n) - \mu e(n) \frac{\delta_k D_M(z)}{D_M(z)} \hat{H}(z) u(n), \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (4.5)$$

alakot ölti. A fenti közelítés egyrésztől torzítja a gradiens becslőjét, amennyiben a paramétervektor nem a redukált hibafelületen helyezkedik el, másrésztől csökkenti a becslő varianciáját, hiszen az elhanyagolt tag varianciája nem zérus. Mindez a tapasztalatok szerint simább konvergenciát és a beállt paraméterek kisebb varianciáját eredményezi.

Az ODE módszer segítségével belátható, hogy a (4.5) formulára épülő parciális gradiens algoritmus stacionárius pontjai az  $E[e^2(n)]$  költségfüggvénynek is stacionárius pontjai, az algoritmus konvergenciapontjai pedig a költségfüggvény lokális minimumainak felelnek meg. Szimulációs vizsgálatok alapján az is sejthető, hogy a költségfüggvény minden lokális minimuma az algoritmus konvergenciapontja is egyben. A parciális gradiens algoritmus megszerkesztéséhez hátravan még a  $\delta_k D_M(z) / D_M(z)$ ,  $k = 1, 2, \dots, M$  szűrők hatékony implementációja. A feladat a lattice gradiens algoritmusnál említett ötlet újbóli alkalmazásával oldható meg. A levezetéseket lásd az [5] hivatkozásban.

#### Algoritmus 4 (PGL-RLMS).

Az  $n$ -edik lépésben rendelkezésre áll

- A szűrőegyütthetők vektorai:

$$\nu(n) \text{ és } \theta(n).$$

- Az adaptív szűrő állapotvektora:

$$\nabla_{\nu}(n-1).$$

$\nabla_{\nu_M}(n)$  kiszámításra kerül, de tárolni nem szükséges.

- Az utószűrő állapotai:

$$FS_k(n), \quad GT_k(n), \quad k = 0, 1, \dots, M - 2.$$

$GT_{M-1}(n)$  kiszámításra kerül, de tárolni nem szükséges.

- A  $\nabla_{\theta}(n)$  regresszorvektor.
- Frissített jelek:  $u(n)$  bemeneti minta,  $y(n)$  referencia minta.

*Az adaptív szűrő iterációja*

- **Let**  $g_M = u(n)$ .
- **for**  $k = M, M - 1, \dots, 1$  **do**

$$\begin{bmatrix} g_{k-1} \\ \nabla_{\nu_k}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_k(n) & -\sin \theta_k(n) \\ \sin \theta_k(n) & \cos \theta_k(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_k \\ \nabla_{\nu_{k-1}}(n-1) \end{bmatrix}$$

**end for.**

- $\nabla_{\nu_0}(n) = g_0$ .
- Az adaptív szűrő kimenete:

$$\hat{y}(n) = \nu^t(n) \nabla_{\nu}(n).$$

- Kimeneti hiba:

$$e(n) = y(n) - \hat{y}(n).$$

*A szűrőegyütthetők frissítése*

$$\begin{aligned} \nu(n+1) &= \nu(n) + \mu e(n) \nabla_{\nu}(n) \\ \theta(n+1) &= \theta(n) + \mu e(n) \nabla_{\theta} \end{aligned}$$

*Stabilitási teszt*

- **for**  $k = 1, 2, \dots, M$  **do**  
     **if**  $|\theta_k(n+1)| > \frac{\pi}{2}$  **then**  $\theta_k(n+1) = \theta_k(n)$ .  
     **end for**

*Az utószűrő iterációja*

- Segédváltozók:

$$\begin{aligned} GS_k, \quad k &= 0, 1, \dots, M - 1; \\ FT_k, \quad k &= 0, 1, \dots, M - 1; \\ \text{„node”, „temp”, „sum}_1 \text{” és „sum}_2 \text{”}. \end{aligned}$$

- **Let**

$$\begin{aligned} GS_{M-1} &= -[\hat{y}(n) \cos \theta_M(n) + \nabla_{\theta_M}(n) \sin \theta_M(n)] \\ GT_{M-1}(n) &= 0 \end{aligned}$$

- for  $k = M - 1, \dots, 2, 1$  do

$$\begin{aligned} \text{sum}_1 &= [GS_k + GT_k(n) \sin \theta_{k+1}(n+1)] / \cos \theta_{k+1}(n+1) \\ GS_{k-1} &= \text{sum}_1 \cos \theta_k(n+1) - FS_{k-1}(n) \sin \theta_k(n+1) \end{aligned}$$

end for

- Set

$$\begin{aligned} \text{temp} &= GS_0; \\ FT_0 &= GT_0(n). \end{aligned}$$

- for  $k = 1, 2, \dots, M - 1$  do

$$\begin{aligned} \nabla_{\theta_k}(n+1) &= \text{temp} + GT_{k-1}(n) \\ \text{sum}_1 &= [GS_k + GT_k(n) \sin \theta_{k+1}(n+1)] / \cos \theta_{k+1}(n+1) \\ \text{sum}_2 &= [GT_k(n) + GS_k \sin \theta_{k+1}(n+1)] / \cos \theta_{k+1}(n+1) \\ GT_{k-1}(n+1) &= \text{sum}_2 \cos \theta_k(n+1) - FT_{k-1} \sin \theta_k(n+1) \\ \text{sum}_2 &= \text{sum}_2 \sin \theta_k(n+1) + FT_{k-1} \cos \theta_k(n+1) \\ \text{sum}_1 &= \text{sum}_1 \sin \theta_k(n+1) + FS_{k-1}(n) \cos \theta_k(n+1) \\ FS_{k-1}(n+1) &= \text{temp} \\ \text{temp} &= [\text{sum}_1 - \text{sum}_2 \sin \theta_{k+1}(n+1)] / \cos \theta_{k+1}(n+1) \\ FT_k &= [\text{sum}_2 - \text{sum}_1 \sin \theta_{k+1}(n+1)] / \cos \theta_{k+1}(n+1) \end{aligned}$$

end for

- $\nabla_{\theta_M}(n+1) = \text{temp}$ .

A közelítésben továbbmenve megpróbálhatunk a  $\delta_k D_M(z)/D_M(z)$  parciális érzékenység függvényekre egyszerűbb (közelítő) kiszámítási módot találni.  $\delta_k D_M(z)$ -t a

$$\frac{\partial D_M(z)}{\partial \theta_k} = \frac{\partial \mathbf{q}_{M+1}^t(\Theta)}{\partial \theta_k} \begin{bmatrix} \hat{D}_0(z) \\ \vdots \\ \hat{D}_{M-1}(z) \\ \hat{D}_M(z) \end{bmatrix} + \mathbf{q}_{M+1}^t(\Theta) \frac{\partial}{\partial \theta_k} \begin{bmatrix} \hat{D}_0(z) \\ \vdots \\ \hat{D}_{M-1}(z) \\ \hat{D}_M(z) \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$\approx \frac{\partial \mathbf{q}_{M+1}^t(\Theta)}{\partial \theta_k} \begin{bmatrix} \hat{D}_0(z) \\ \vdots \\ \hat{D}_{M-1}(z) \\ \hat{D}_M(z) \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

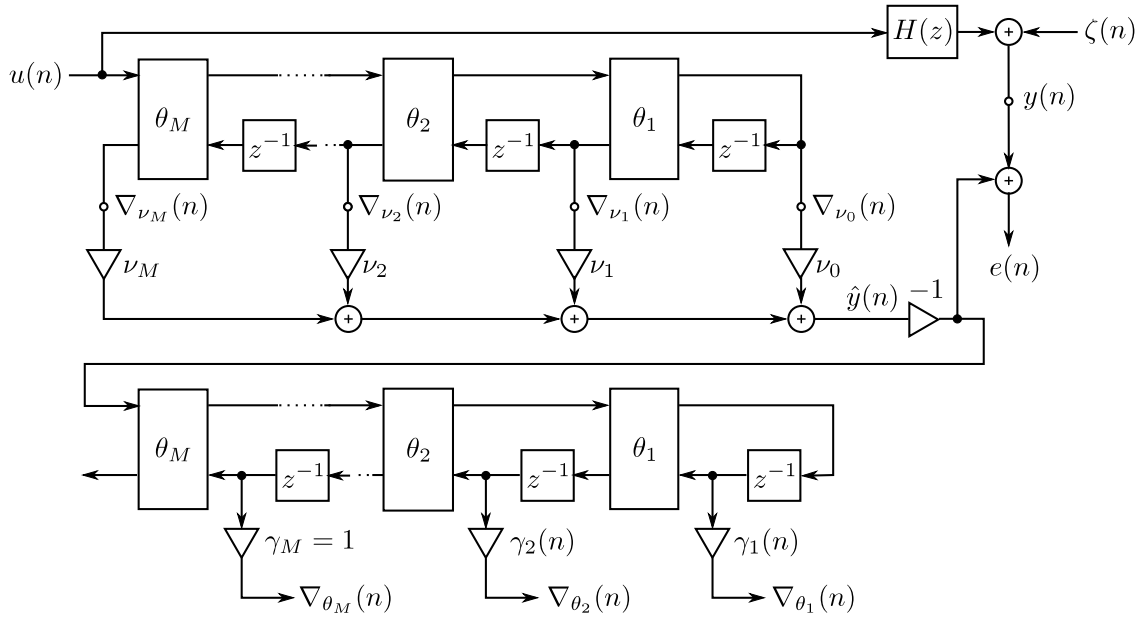
alakban felírva máris látható a közelítés.  $\mathbf{q}_{M+1}^t(\Theta)$  a  $\mathbf{Q}^t(\Theta)$  mátrix utolsó sora,  $\mathbf{Q}(\Theta)$  pedig a (3.8)-ban szereplő ortogonális Hessenberg-mátrix. A (4.6) közelítés azért vonzó, mert egy  $\mathbf{Q}^t(\Theta)$ -ra vonatkozó tétel szerint a mátrix első  $M$  sora, egy konstans  $\gamma_k$  szorzófaktorától eltekintve, az utolsó sor  $\{\theta_k\}$  paraméterek szerinti parciális deriváltjaival egyezik meg. Ezt az eredmény felhasználva adódik a következő

$$\frac{\delta_k D_M(z)}{D_M(z)} \approx \gamma_k z^{-1} \frac{\hat{D}_{k-1}(z)}{D_M(z)} = \gamma_k z^{-1} F_{k-1}(z), \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (4.8)$$

azonosság, ahol  $\gamma_k = \prod_{l=k+1}^M \cos \theta_l$ ,  $\gamma_M = 1$ . A paraméterek frissítése az alábbi formulával történhet:

$$\begin{bmatrix} \nu_0(n+1) \\ \vdots \\ \nu_M(n+1) \\ \theta_1(n+1) \\ \vdots \\ \theta_M(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_0(n) \\ \vdots \\ \nu_M(n) \\ \theta_1(n) \\ \vdots \\ \theta_M(n) \end{bmatrix} + \mu e(n) \begin{bmatrix} F_0(z) \\ \vdots \\ F_M(z) \\ -\gamma_1 z^{-1} \hat{H}(z) F_0(z) \\ \vdots \\ -\gamma_M z^{-1} \hat{H}(z) F_{M-1}(z) \end{bmatrix} u(n)$$

Az egyszerűsített parciális gradiens algoritmus jeleinek előállítását a 4.3. ábra jel-folyamdiagramja mutatja be. Igazolható, hogy az algoritmus stacionárius pontjai egybeesnek  $E[e^2(n)]$  stacionárius pontjaival. Arról, hogy a konvergenciapontok a költségfüggvény minimumhelyei lennének, nem született még formális bizonyítás, ámbar a szimulációk megerősíteni látszanak ezt a sejtést [5].



4.3. ábra. Regresszorok előállítása az egyszerűsített parciális gradiens algoritmusban.

### Algoritmus 5 (SPGL-RLMS).

Az  $n$ -edik lépésben rendelkezésre áll

- A szűrőegyütthatók vektorai:

$$\nu(n) \text{ és } \theta(n).$$

- Az adaptív szűrő állapotvektora:

$$\nabla_\nu(n-1).$$

$\nabla_{\nu_M}(n)$  kiszámításra kerül, de tárolni nem szükséges.

- Az utószűrő állapotai:

$$\xi_k(n), \quad k = 0, 1, \dots, M - 1.$$

$\xi_M(n + 1)$  kiszámításra kerül, de tárolni nem szükséges.

- Frissített jelek:  $u(n)$  bemeneti minta,  $y(n)$  referencia minta.

*Az adaptív szűrő iterációja*

- **Let**  $g_M = u(n)$ .
- **for**  $k = M, M - 1, \dots, 1$  **do**

$$\begin{bmatrix} g_{k-1} \\ \nabla_{\nu_k}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_k(n) & -\sin \theta_k(n) \\ \sin \theta_k(n) & \cos \theta_k(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_k \\ \nabla_{\nu_{k-1}}(n - 1) \end{bmatrix}$$

**end for.**

- $\nabla_{\nu_0}(n) = g_0$ .
- Az adaptív szűrő kimenete:

$$\hat{y}(n) = \nu^t(n) \nabla_{\nu}(n).$$

- Kimeneti hiba:

$$e(n) = y(n) - \hat{y}(n).$$

*A regresszorok kiszámítása*

- **Let**  $\gamma_M = 1$ .
- **for**  $k = M, M - 1, \dots, 1$  **do**

$$\begin{aligned} \nabla_{\theta_k} &= \gamma_k \xi_{k-1}(n) \\ \gamma_{k-1} &= \gamma_k \cos \theta_k(n) \end{aligned}$$

**end for.** Megjegyzés:  $\gamma_{k-1}$  a fenti ciklusban felülírhatja  $\gamma_k$ -t.

*A szűrőegyütthatók frissítése*

$$\begin{aligned} \nu(n + 1) &= \nu(n) + \mu e(n) \nabla_{\nu}(n) \\ \theta(n + 1) &= \theta(n) + \mu e(n) \nabla_{\theta} \end{aligned}$$

*Stabilitási teszt*

- **for**  $k = 1, 2, \dots, M$  **do**  
     **if**  $|\theta_k(n + 1)| > \frac{\pi}{2}$  **then**  $\theta_k(n + 1) = \theta_k(n)$ .  
   **end for**

*Az utószűrő iterációja*

- **Let**  $\text{temp} = -\hat{y}(n)$ .

- **for**  $k = M, \dots, 2, 1$  **do**

$$\begin{bmatrix} \text{temp} \\ \xi_k(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_k(n+1) & -\sin \theta_k(n+1) \\ \sin \theta_k(n+1) & \cos \theta_k(n+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{temp} \\ \xi_{k-1}(n) \end{bmatrix}$$

**end for.** (A „temp” régi értékét az új értéke felülírhatja.)

- $\xi_0(n+1) = \text{temp}.$

Néhány szót érdemel még a  $\{\theta_k\}$  forgatási szögek trigonometrikus függvényeinek kiszámítása. Többféle lehetőség közül is választhatunk, ha nem szeretnénk a költséges trigonometrikus függvényeket használni a lattice algoritmusokban. A legegyszerűbb ezek közül a kis szögekre érvényes elsőrendű közelítés. A forgatási szögek a

$$\theta_k(n+1) = \theta_k(n) + \mu e(n) \nabla_{\theta_k}(n)$$

formula szerint változnak, jól ismert továbbá a  $\sin(\theta + \delta\theta) \approx \sin \theta + \cos \theta \cdot \delta\theta$  elsőrendű közelítés. Legyen  $\theta = \theta_k(n)$  és  $\delta\theta = \theta_k(n+1) - \theta_k(n)$ . Az új paraméterfrissítési formula ekkor

$$\sin \theta_k(n+1) = \sin \theta_k(n) + \mu \cos \theta_k(n) e(n) \nabla_{\theta_k}(n), \quad k = 1, 2, \dots, M. \quad (4.9)$$

Ha  $\sin \theta_k(n+1)$  abszolút értéke egynél nagyobb valamely  $k$ -ra, akkor ahhoz a  $k$ -hoz tartozó forgatási szöget nem frissítjük. Ellenkező esetben természetesen

$$\cos \theta_k(n+1) = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_k(n+1)}.$$

(4.9) bármelyik lattice algoritmusba könnyen beépíthető. További lehetőségek találhatóak [5]-ben.

### 4.1.3. Alkalmazás aktív zajcsökkentésben

Aktív zajcsökkentési feladatokban, a probléma természetéből kifolyólag, az adaptív algoritmust vezérlő hibajelnek csak egy szűrt változata,  $e_s(n) = S(z)e(n)$  férhető hozzá (lásd 4.1. ábra).  $S(z)$  jelenléte negatívan befolyásolja a konvergenciát, kompenzációjára FIR szűrők esetében jól kidolgozott elmélet áll rendelkezésre [4], [2]. A kompenzáció lényege, hogy az  $x(n)$  regresszort – amely itt a referencijellel egyezik meg –  $S(z)$  egy becsült (approximált) változatával,  $\hat{S}(z)$ -vel szűrjük. Innen az algoritmus elnevezése: *Filtered x Least Mean Square* (FxLMS).

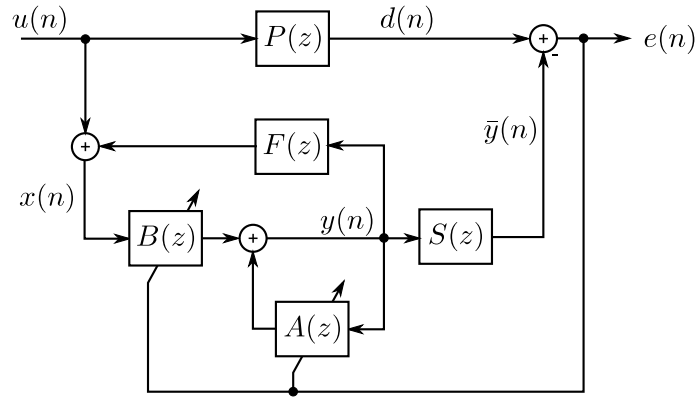
Az LMS, és kiterjesztése, az FxLMS algoritmus kiállták a gyakorlat próbáját. Morgan cikkében konvergenciakritériumot is adott az szűrt hibájú konfigurációra, miszerint  $S(e^{j\omega})$  és  $\hat{S}(e^{j\omega})$  fáziseltérésének  $90^\circ$ -nál kisebbnek kell lennie [2]. Az LMS algoritmust, Widrow gondolatmenetét követve, Feintuch terjesztette ki IIR esetre [15], ANC problémákra pedig Eriksson adaptálta (FuLMS) [7]. Az FuLMS algoritmus az előző pontban kifejtett rekurzív LMS algoritmus egyszerűsített változata, kiegészítve persze a regresszor említett szűrésével. Ez utóbbi művelet jelentősége nem lebecsülendő; annál is inkább, minthogy kiderült:  $S(z)$  becsülésének jósága kulcsfontosságú a zajelnyomási teljesítmény tekintetében [8].

Vizsgáljuk most meg közelebbről az FuLMS algoritmusban alkalmazott közelíté-  
seket! A szűrők direkt realizációjából indulunk ki, és áttérünk az aktív zajcsökken-  
tésben irodalmával jobban összhangban lévő jelölésekre (4.4. ábra). Ekkor

$$\begin{aligned} e(n) &= d(n) - S(z)y(n), \\ y(n) &= \mathbf{b}^t(n)\mathbf{x}(n) + \mathbf{a}^t(n)\mathbf{y}(n-1), \end{aligned}$$

ahol a vektorok:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(n) &\triangleq [b_0(n) \ b_1(n) \ \cdots \ b_{L-1}(n)]^t, \quad \mathbf{a}(n) \triangleq [a_1(n) \ a_2(n) \ \cdots \ a_M(n)]^t, \\ \mathbf{x}(n) &\triangleq [x(n) \ \cdots \ x(n-L+1)]^t, \quad \mathbf{y}(n-1) \triangleq [y(n-1) \ \cdots \ y(n-M)]^t. \end{aligned}$$



4.4. ábra. Az algoritmusok ismertetéséhez.

Vektoros írásmóddhoz használatával egyszerűsíthetjük a következőkben felírandó kifejezéseket:

$$\mathbf{w}(n) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{a}(n) \\ \mathbf{b}(n) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(n) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{x}(n) \\ \mathbf{y}(n-1) \end{bmatrix}.$$

A sztochasztikus gradiens módszerek alapegyenlete egységesen (4.1), eltérés csak a gradiens kifejezésében van.  $\nabla e^2(n) = 2[\nabla e(n)]e(n)$ ,

$$\begin{aligned} \nabla e(n) &= \left[ \frac{\partial e(n)}{\partial b_0(n)} \quad \cdots \quad \frac{\partial e(n)}{\partial b_{L-1}(n)} \quad \frac{\partial e(n)}{\partial a_1(n)} \quad \cdots \quad \frac{\partial e(n)}{\partial a_M(n)} \right]^t \\ &= -S(z) \left[ \frac{\partial y(n)}{\partial b_0(n)} \quad \cdots \quad \frac{\partial y(n)}{\partial b_{L-1}(n)} \quad \frac{\partial y(n)}{\partial a_1(n)} \quad \cdots \quad \frac{\partial y(n)}{\partial a_M(n)} \right]^t. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Ha a  $\mu$  lépésköz kicsi, akkor az adaptáció kellőképpen lassú, és igaz, hogy

$$\frac{\partial y(n-j)}{\partial b_l(n)} \approx \frac{\partial y(n-j)}{\partial b_l(n-j)}, \quad \forall l, j.$$

Ekkor a parciálisok (4.10)-ben

$$\begin{aligned}\delta_{b_l} &\triangleq \frac{\partial y(n)}{\partial b_l(n)} = \\ &= x(n-l) + \sum_{j=1}^M a_j(n) \frac{\partial y(n-j)}{\partial b_l(n)} \approx \\ &\approx x(n-l) + \sum_{j=1}^M a_j(n) \delta_{b_l}(n-j), \quad l = 0, 1, \dots, L-1\end{aligned}\quad (4.11)$$

$$\begin{aligned}\delta_{a_m} &\triangleq \frac{\partial y(n)}{\partial a_m(n)} = \\ &= y(n-m) + \sum_{j=1}^M a_j(n) \frac{\partial y(n-j)}{\partial a_m(n)} \approx \\ &\approx y(n-m) + \sum_{j=1}^M a_j(n) \delta_{a_m}(n-j), \quad m = 1, 2, \dots, M\end{aligned}\quad (4.12)$$

A (4.11) rekurzió mintánkénti kiszámítása erőforrásigényes, ezért megpróbálkozhatunk valamilyen további egyszerűsítéssel. Feintuch nyomán [15] legyen

$$\delta_{b_l}(n-j) = \delta_{a_m}(n-j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, M.$$

Előállt az FuLMS algoritmus:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu[\hat{S}(z)\mathbf{u}(n)]e(n) = \mathbf{w}(n) + \mu\mathbf{u}'(n)e(n), \quad (4.13)$$

ahol  $\mathbf{u}'(n)$  az  $\hat{S}(z)$ -vel megszürt  $\mathbf{u}(n)$  regresszor,  $\hat{S}(z)$  pedig az  $S(z)$  átviteli függvényről rendelkezésre álló approximáns. Az FxLMS algoritmus az FuLMS algoritmusból az  $A(z) \equiv 0$  határhelyzetben kapható meg:  $\mathbf{w}(n) \equiv \mathbf{b}(n)$  és  $\mathbf{u}'(n) \equiv \mathbf{x}'(n)$ . Hasonló kijelentést tehetünk a FIR-LMS és az RLMS algoritmusok kapcsolatáról is.

### Algoritmus 6 (FuLMS).

Az  $n$ -edik lépésben rendelkezésre áll

- A szűrőegyütthatók vektorai:

$$\mathbf{a}(n) \text{ és } \mathbf{b}(n).$$

- Az adaptív szűrő állapotvektorai:

$$\mathbf{x}(n-1) \text{ és } \mathbf{y}(n-1).$$

- A szűrt regresszorok vektorai:

$$\mathbf{x}'(n-1) \text{ és } \mathbf{y}'(n-1).$$

- Az  $\hat{S}(z)$  előszűrők állapotvektorai:

$$\begin{aligned}\phi_x(n) &\triangleq [\phi_{x,0}(n) \quad \phi_{x,1}(n) \quad \cdots \quad \phi_{x,M_{\hat{S}}-1}(n)]^t; \\ \phi_y(n) &\triangleq [\phi_{y,0}(n) \quad \phi_{y,1}(n) \quad \cdots \quad \phi_{y,M_{\hat{S}}-1}(n)]^t.\end{aligned}$$



- Frissített jelek:  $x(n)$  bemeneti minta,  $e(n)$  kimeneti hiba.

*Szűrőiteráció*

- $y(n)$  kimeneti minta:

$$y(n) = \mathbf{b}^t(n) \underbrace{\begin{bmatrix} x(n) \\ \mathbf{x}(n-1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(n)} + \mathbf{a}^t(n) \mathbf{y}(n-1).$$

- Az előszűrő  $x'(n)$  kimenete és állapotrekurziója:

$$\begin{bmatrix} x'(n) \\ \phi_x(n+1) \end{bmatrix} = \mathbf{Z}_s \begin{bmatrix} x(n) \\ \phi_x(n) \end{bmatrix}.$$

- A szűrőegyütthetők frissítése:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(n+1) &= \mathbf{b}(n) + \mu e(n) \underbrace{\begin{bmatrix} x'(n) \\ \mathbf{x}'(n-1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}'(n)}; \\ \mathbf{a}(n+1) &= \mathbf{a}(n) + \mu e(n) \mathbf{y}'(n-1). \end{aligned}$$

*Az előszűrő  $y'(n)$  kimenete és állapotrekurziója*

$$\begin{bmatrix} y'(n) \\ \phi_y(n+1) \end{bmatrix} = \mathbf{Z}_s \begin{bmatrix} y(n) \\ \phi_y(n) \end{bmatrix}.$$

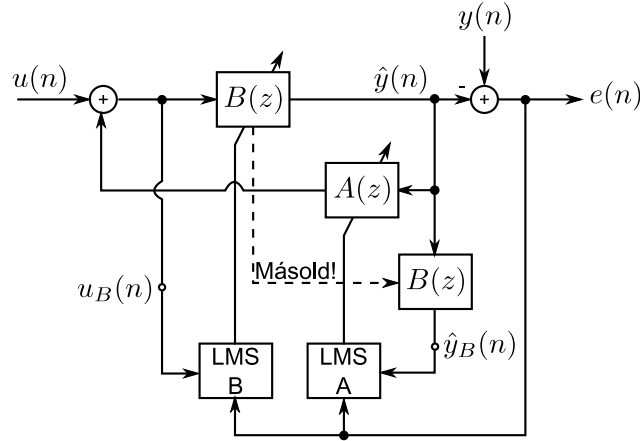
Említettük már a másodlagos zaj káros visszacsatolódásának problémáját, annak IIR szűrős megoldását (3). Egy másik javaslat szerint alternatív „direkt” szűrőrealizációt vezetünk be „teljes visszacsatolással”, és az együtthetőfrissítési formulákat erre a struktúrára (4.5. ábra) származtatjuk [16]. A struktúra modellezési szempontból előnyös lehet bizonyos aktív zajcsökkentési szituációkban. A levezetéseket nem, csak a végeredményt közöljük (az ábra jelöléseivel):

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(n+1) &= \mathbf{b}(n) + \mu_b e(n) \mathbf{u}_B(n), \\ \mathbf{a}(n+1) &= \mathbf{a}(n) + \mu_b e(n) \hat{\mathbf{y}}_B(n-1). \end{aligned}$$

E helyütt ismertetjük a Kautz-szűrőhöz használt normalizált LMS (*Normalized LMS – NLMS*) adaptációs algoritmust [17], [13]. Lényegében az (Fx)LMS algoritmus változó lépésközű variánsáról van szó, ahol a lépésközt a pillanatnyi hibanégyzet minimalizálásának céljával választjuk meg [18].

$$\mu(n) = \frac{1}{\gamma + \|\phi(n)\|^2}$$

ahol  $\phi(n)$  a Kautz-szűrő transzverzális megcsapolásainak  $\{\nu_k\}$  jeleiből képzett regresszorvektor,  $\gamma$  pedig egy kis pozitív szám, melynek célja, hogy meggátolja a lépésköz elszaladását, amikor  $\|\phi(n)\|^2$  kicsi. Az aktív zajcsökkentésben alkalmazott



4.5. ábra. A Full-feedback RLMS algoritmus blokkdiagramja.

FxNLMS algoritmus változatot, az FuLMS algoritmus mintájára, a regresszorok szűrésével kapjuk (lásd alább).

Érdekességképpen megemlítjük, hogy egy FIR lattice struktúra általánosításaként kapott lattice Laguerre-szűrő, és a rá vonatkozó rekurzív adaptációs algoritmus levezetése szerepel [19] hivatkozásban. A közölt globális eredmények alapján speciális szerkezetű szűrőkre hasonlóképpen „gyors” és moduláris (fokszám-rekurzív) algoritmus alkotható.

### Algoritmus 7 (FxNLMS).

Az  $n$ -edik lépésben rendelkezésre áll

- A szűrőegyütthatók  $\mathbf{w}(n)$  vektora.
- Az adaptív szűrő  $\mathbf{x}(n-1)$  állapotvektora.
- A szűrt regresszorok  $\mathbf{x}'(n-1)$  vektora.
- Az  $\hat{S}(z)$  előszűrők állapotvektora:

$$\phi_x(n) \triangleq [\phi_{x,0}(n) \quad \phi_{x,1}(n) \quad \cdots \quad \phi_{x,M_{\hat{S}}-1}(n)]^t.$$

- Frissített jelek:  $x(n)$  bemeneti minta,  $e(n)$  kimeneti hiba.

*Szűrőiteráció*

- $y(n)$  kimeneti minta:

$$y(n) = \mathbf{w}^t(n) \underbrace{\begin{bmatrix} x(n) \\ \mathbf{x}(n-1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(n)}.$$

- Az előszűrő  $x'(n)$  kimenete és állapotrekurziója:

$$\begin{bmatrix} x'(n) \\ \phi_x(n+1) \end{bmatrix} = \mathbf{Z}_{\hat{S}} \begin{bmatrix} x(n) \\ \phi_x(n) \end{bmatrix}.$$

- A szűrőegyütthetők frissítése:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \frac{1}{\gamma + \underbrace{[\mathbf{x}'(n)]^t \mathbf{x}'(n)}_{\mathbf{x}'(n)}} e(n) \begin{bmatrix} x'(n) \\ \mathbf{x}'(n-1) \end{bmatrix}.$$

Az FxLMS és az FuLMS algoritmusban alkalmazott technika, nevezetesen a regresszor szűrése  $S(z)$  becslőjével, minden további nélkül kiterjeszthető a többi – korábbi és későbbi – algoritmusra. Mindössze az adaptív szűrő és  $S(z)$  másodlagos hibaút kommutativitását kell feltételezni, ami lassú adaptációra közelítőleg teljesül is. A direkt és lattice IIR algoritmusokban ilyenkor  $u(n)$  helyébe  $u'(n) = \hat{S}(z)u(n)$  – illetve  $x(n)$  helyébe  $x'(n)$  –,  $\hat{y}(n)$  helyébe pedig  $\hat{y}'(n) = \hat{S}(z)\hat{y}(n) \approx \hat{H}(z)[\hat{S}(z)u(n)]$  lép.

Időnként szükségünk lehet a  $d(n)$  referenciakimenet értékére, ám az közvetlenül nem férhető hozzá, sem pedig az  $\bar{y}(n)$  szűrt kimenet, amiből  $d(n)$ -t számítani lehetne ( $d(n) = e(n) + \bar{y}(n)$ ). Az alábbi lehetőség kínálkozik:

$$e(n) = d(n) - \bar{y}(n) = d(n) - S(z)y(n),$$

amiből  $d(n)$  becslője

$$\hat{d}(n) = e(n) + y'(n) = e(n) + \hat{S}(z)y(n).$$

## 4.2. RLS algoritmusok

A rekurzív LS (*Least-Squares*) családba tartozó algoritmusok egy determinisztikus költségfüggvényt, az OE kimeneti hiba mintáinak súlyozott négyzetösszegét minimalizálják. A rekurzív jelző onnan származik, hogy az optimális paramétervektor minden egyes iterációban rekurzívan számítható az előző paramétervektorból, az  $u(n)$  bemeneti jelből és az adaptív szűrő állapotváltozóiból. Az RLS algoritmusok érzéketlenek az  $u(n)$  referenciajel autokorrelációs mátrixának sajátérték-eloszlására, gyors konvergenciát és az LMS algoritmusoknál tapasztalt reziduális (a konvergenciapontban mérhető) hibánál kisebb hibát ígérnek [3]. Kiválóan alkalmasak nemstacioner jelkörnyezetben való használatra.

A kimeneti hiba  $e(n) = [H(z) - \hat{H}(z)]u(n) + \zeta(n)$ . Az  $n$ -edik lépésben a LS (magyarul legkisebb négyzetek) költségfüggvény alakja

$$\xi(n) = \sum_{k=1}^n \lambda^{n-k} e^2(k) = \sum_{k=1}^n \lambda^{n-k} [u(k) - \mathbf{w}^t(n)\Phi(k)]^2, \quad (4.14)$$

ahol  $0 \ll \lambda \leq 1$  egy exponenciális súlyozófaktor, más néven felejtési tényező, amely a régebbi minták elhanyagolásának mértékét szabályozza. (4.14) jobboldala direkt formájú szűrőrealizációkra érvényes,

$$\mathbf{w}(n) \triangleq [b_0(n) \quad \cdots \quad b_M(n) \quad a_1(n) \quad \cdots \quad a_M(n)]^t = \begin{bmatrix} \mathbf{b}(n) \\ \mathbf{a}(n) \end{bmatrix}$$

a transzverzális együtthetők vektora,

$$\Phi(n) \equiv [u(n) \quad u(n-1) \quad \cdots \quad u(n-M) \quad \hat{y}(n-1) \quad \cdots \quad \hat{y}(n-M)]^t = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(n) \\ \hat{\mathbf{y}}(n-1) \end{bmatrix}$$

a szűrő állapotvektora. Ha a felejtési tényező egynél kisebb, akkor az adaptív szűrő nemstacioner jelek követését is lehetővé teszi. A  $\xi(n)$  költségfüggvény minimalizálása egy optimális lineáris szűrési probléma, és könnyen megmutatható, hogy ergodikus bementi jel – és FIR szűrők – esetére a LS és a Wiener-szűrési probléma megoldása aszimptotikusan megegyezik [18]. Ezenfelül [18]

1. a szűrőegyütthatókra kapott becslő az identifikációs feladat legjobb torzítatlan lineáris megoldása abban az értelemben, hogy nincsen másik módszer, amely kisebb varianciájú torzítatlan becslőt állítana elő;
2. ha a  $\zeta(n)$  additív zajfolyamat normális eloszlású, akkor a LS megoldás a Cramer-Rao alsó korlátnak felel meg, mely minimális (ko)varianciájú torzítatlan becslőt eredményez.

Vezessük be az  $\mathbf{R}_D(n)$  és  $\mathbf{p}_D(n)$  determinisztikus korrelációmátrixot és korrelációvektort az

$$\mathbf{R}_D(n) = \sum_{k=1}^n \lambda^{n-k} \Phi(k) \Phi^t(k),$$

$$\mathbf{p}_D(n) = \sum_{k=1}^n \lambda^{n-k} u(k) \Phi(k)$$

definíciókkal. A LS probléma optimális megoldását a  $\xi(n)$  költségfüggvény  $\mathbf{w}(n)$  paramétervektor szerinti parciális deriváltjának zérushelye adja. FIR szűrőkre ( $\mathbf{w}(n) \equiv \mathbf{b}(n)$  és  $\Phi(n) \equiv \mathbf{u}(n)$ )

$$\frac{\partial \xi(n)}{\partial \mathbf{w}(n)} = 2(\mathbf{R}_D(n) \mathbf{w}(n) - \mathbf{p}_D) = \mathbf{0},$$

így az optimális paramétervektor  $\mathbf{w}_o(n) = \mathbf{R}_D^{-1}(n) \mathbf{p}_D(n)$  alakban írható. Mind  $\mathbf{R}_D(n)$ , mind  $\mathbf{p}_D(n)$  számítható rekurziók segítségével, ami elengedhetetlen  $n$  az implementációkban nagy értékei miatt.

$$\mathbf{R}_D(n) = \lambda \mathbf{R}_D(n-1) + \Phi(n) \Phi^t(n),$$

$$\mathbf{p}_D(n) = \lambda \mathbf{p}_D(n-1) + \mathbf{d}(n).$$

$\mathbf{R}_D(n)$  kiszámítása, majd invertálása költséges megoldás,  $O[M^3]$  komplexitású algoritmushoz vezet. A mátrixinverziós lemma segítségével azonban a bonyolultságot  $M^2$  nagyságrendjébe csökkenthetjük. A lemmát  $\mathbf{R}_D(n)$  rekurzív alakjára alkalmazva az inverz mátrix kiszámítása is rekurzió segítségével oldható meg:

$$\mathbf{S}_D(n) = \mathbf{R}_D^{-1}(n) = \frac{1}{\lambda} \left[ \mathbf{S}_D(n-1) - \frac{\mathbf{S}_D(n-1) \Phi(n) \Phi^t(n) \mathbf{S}_D(n-1)}{\lambda + \Phi^t(n) \mathbf{S}_D(n-1) \Phi(n)} \right].$$

Az  $e(n) = y(n) - \mathbf{w}^t(n) \Phi(n)$  kimeneti hiba kifejezését felhasználva, néhány algebrai átalakítás után  $\mathbf{w}(n)$ -re az alábbi frissítési formulát nyerjük:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + e(n) \mathbf{S}_D(n) \Phi(n). \quad (4.15)$$

Az algoritmus inicializálásánál  $\mathbf{S}_D(0)$  mátrixot is meg kell adnunk. Egy lehetséges választás  $\mathbf{S}_D(0) \triangleq \delta^{-1} \mathbf{I}$ , ahol  $\delta$  az  $u(n)$  referenciajel teljesítményének becslője [18].

**Algoritmus 8 (FIR-RLS).**

Az  $n$ -edik lépésben rendelkezésre áll

- A szűrőegyütthetők  $\mathbf{w}(n) \equiv \mathbf{b}(n)$  vektora.
- Az adaptív szűrő  $\mathbf{u}(n-1)$  állapotvektora.
- Az  $\mathbf{S}_D(n-1)$  inverz korrelációmátrix.
- Frissített jelek:  $u(n)$  bemeneti minta,  $y(n)$  referencia minta.

*Szűrőiteráció*

- $\hat{y}(n)$  kimeneti minta és  $e(n)$  kimeneti hiba:

$$y(n) = \mathbf{w}^t(n) \underbrace{\begin{bmatrix} u(n) \\ \mathbf{u}(n-1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}(n)};$$

$$e(n) = y(n) - \hat{y}(n).$$

- Az inverz korrelációmátrix rekurziója

$$\psi = \mathbf{S}_D(n-1)\mathbf{u}(n);$$

$$\mathbf{S}_D(n) = \frac{1}{\lambda} \left[ \mathbf{S}_D(n-1) - \frac{\psi\psi^t}{\lambda + \psi^t\mathbf{u}(n)} \right].$$

- A szűrőegyütthetők frissítése:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + e(n)\mathbf{S}_D(n)\mathbf{u}(n).$$

**4.2.1. IIR-RLS algoritmusok**

A (4.15) paraméterfrissítési formulához hasonló alakot kaphatunk IIR szűrőkre is, de ehhez bizonyos közelítéseket kell eszközölni. A gondolatmenet így foglalható össze [18]: Mivel a  $\xi(n)$  költségfüggvény első parciális deriváltja a szűrőparaméterek nemlineáris függvénye, közelítsük azt Taylor-sorának elsőfokú tagjával. A közelítés érvényességéhez lassú adaptációt kell feltételezni.  $\mathbf{R}_D(n)$  mátrixhoz úgy juthatunk el, hogy előírás szerint végrehajtjuk a deriválásokat, majd élünk a lassú paraméterváltozás feltételezésével.

$$2\mathbf{g}_D(n) = \frac{\partial \xi(n)}{\partial \mathbf{w}(n)} = 2\nabla_d(n)e(n) + \lambda \frac{\partial \xi(n-1)}{\partial \mathbf{w}(n)} \approx 2\nabla_d(n)e(n), \quad (4.16)$$

$$2\mathbf{R}_D(n) = \frac{\partial^2 \xi(n)}{\partial \mathbf{w}^2(n)} = 2\lambda \mathbf{R}_D(n-1) + 2\nabla_d(n)\nabla_d^t(n) - 2\frac{\partial^2 \hat{y}(n)}{\partial \mathbf{w}^2(n)}e(n), \quad (4.17)$$

$$(4.18)$$

ahol  $\nabla_d(n) \triangleq [\nabla_b^t, \nabla_a^t]^t = \delta_{w(n)}e(n)$  a direkt szűrőparaméterek regresszorvektora,  $\delta_{w(n)}$  a  $\mathbf{w}(n)$  paramétervektor szerinti parciális deriválás operátora,  $e(n)$  pedig a kimeneti hiba.

Lassú paraméterváltozás mellett  $\delta_{w(n)}\xi(n-1) \approx 0$ , mivel ilyenkor az  $n$ -edik lépésben optimális paraméterek közelítőleg az  $n-1$ -edik lépésben is optimálisak.

Hasonlóan,  $\hat{y}(n)$  második deriváltja az optimum közelében korrelálatlannak tekinthető az  $e(n)$  kimeneti hibával,  $\mathbf{R}_D(n)$  utolsó tagja tehát közel zérus várható értékű valószínűségi változó. A paraméterek frissítésére ezek után a

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mathbf{R}_D^{-1} \mathbf{g}_D(n) = \mathbf{w}(n) - \mathbf{S}_D(n) \nabla_d(n) e(n) \quad (4.19)$$

formula használható, mely ígéretünkkel összhangban a FIR változatra hasonlít. Az összes korábbi rekurziós összefüggés alkalmazható, így az IIR-RLS algoritmus bonyolultsága csak a regresszorok kiszámításával növekedett. Akárcsak az FIR-LMS–RLMS algoritmus pár esetében, itt is igaz az állítás, miszerint az IIR-RLS algoritmus határhelyzetben a FIR-RLS algoritmusba megy át.

### Algoritmus 9 (IIR-RLS).

*Az  $n$ -edik lépésben rendelkezésre áll*

- A szűrőegyütthetők  $\mathbf{w}(n)$  vektora.
- Az adaptív szűrő állapotvektorai:

$$\mathbf{u}(n-1) \text{ és } \hat{\mathbf{y}}(n-1)$$

- A  $\nabla_d(n-1)$  regresszorvektor.
- Az  $\mathbf{S}_D(n-1)$  inverz korrelációmátrix.
- Frissített jelek:  $u(n)$  bemeneti minta,  $y(n)$  referencia minta.

*Szűrőiteráció*

- $\hat{y}(n)$  kimeneti minta és  $e(n)$  kimeneti hiba:

$$y(n) = \mathbf{w}^t(n) \underbrace{\begin{bmatrix} u(n) \\ \mathbf{u}(n-1) \\ \hat{\mathbf{y}}(n-1) \end{bmatrix}}_{\Phi(n)};$$

$$e(n) = y(n) - \hat{y}(n).$$

- A regresszorvektor rekurziója (lásd RLMS).
- Az inverz korrelációmátrix rekurziója

$$\begin{aligned} \psi &= \mathbf{S}_D(n-1) \nabla_d(n); \\ \mathbf{S}_D(n) &= \frac{1}{\lambda} \left[ \mathbf{S}_D(n-1) - \frac{\psi \psi^t}{\lambda + \psi^t \nabla_d(n)} \right]. \end{aligned}$$

- A szűrőegyütthetők frissítése:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - e(n) \mathbf{S}_D(n) \nabla_d(n).$$

Megjegyezzük, hogy  $\mathbf{S}_D(n) = \mu \mathbf{I}$  választással a (4.19) paraméterfrissítési egyenlet az RLMS algoritmust realizálja, vagyis az RLMS algoritmus egy olyan LS algoritmusnak feleltethető meg, amely az  $u(n)$  referenciajel  $\mathbf{S}_D$  determinisztikus korrelációs mátrixát egy diagonális mátrixszal közelíti, a bementi jelről tehát feltételezi, hogy az  $1/\mu$  teljesítményű fehér zaj [3]. Ennek tulajdonítható, hogy a sztochasztikus gradiens algoritmusok korrelált referenciajelekkel gyengén teljesítenek, ezenfelül igen érzékenyek a referenciajel korrelációs mátrixának sajátérték-eloszlására.

Az IIR-RLS algoritmus a normalizált lattice szűrőstruktúrára is alkalmazható. Figyeljük meg, hogy a (4.16) összefüggések szűrőstruktúrától függetlenül érvényben maradnak, ugyanis sehol sem használtuk ki, hogy a szűrő kimenete  $\hat{y}(n) = \mathbf{w}^t(n)\Phi(n)$  alakban írható, mely alak direkt formájú realizációra érvényes ugyan, lattice struktúrára azonban nem áll. A dolgunk csupán annyi tehát, hogy az L-RLMS (vagy a PGL-RLMS, vagy az SPGL-RLMS) algoritmusban a paraméterfrissítési formulát (4.19)-re cseréljük, és minden iterációban frissítsük az  $\mathbf{S}_D(n)$  mátrixot. A feladat trivialisága okán az algoritmus(oka)t tételesen most nem ismertetjük.

Az RLS algoritmusok  $O[M^2]$  komplexitását a fenti előnyök igyekeznek ellentételezni. A komplexitást tovább csökkentendő, – FIR szűrőkre – születtek javaslatok (gyors transzverzális szűrők, *fast transversal filters*), kiderült azonban, hogy fixpontos aritmetika használatakor sokuknál numerikus stabilitási problémák lépnek fel, ami ellenintézkedéseket kíván [14], [18].

### 4.2.2. Alkalmazás aktív zajcsökkentésben

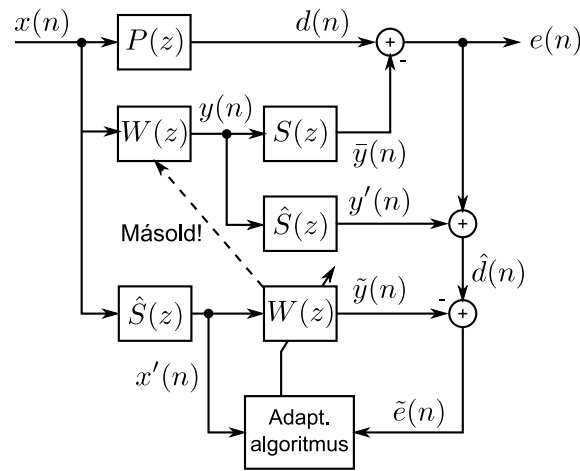
A 4.1.3 pontban részletezett módszer, az Fx (*Filtered-x*), azaz a szűrt regresszor séma csak lassú adaptációt – és sztochasztikusan konvergáló algoritmust, mint amilyen az LMS – feltételezve működőképes. Ha az idővariáns szűrő paraméterei elég lassan változnak, akkor az közelítőleg időinvariánsnak tekinthető és a kommutativitás a lineáris rendszerek elméletéből következik. A lassú adaptáció az RLS algoritmusokra általában nem érvényes – még akkor sem, ha az IIR-RLS algoritmus levezetésében evvel a feltételezéssel éltünk –, tehát az Fx séma sem (mindig) használható [20]. Alternatív megoldások kínálóznak, most csak a szimulációkban használt FASPIs módszert említjük (4.6. ábra). Az ábrából látszik, hogy

$$\begin{aligned}\hat{d}(n) &= e(n) + y'(n) = e(n) + \hat{S}(z)y(n), \\ \tilde{e}(n) &= \hat{d}(n) - \tilde{y}(n) = e(n) + \hat{S}(z)y(n) - \mathbf{w}^t(n)\Psi,\end{aligned}$$

ahol  $\Psi$  az adaptív szűrő kimenetének számításához szükséges állapotvektor.

## 4.3. A Steiglitz-McBride algoritmusok családja

Az ebben a pontban tárgyalt algoritmuscsalád nevét Steiglitz és McBride által a 60-as években kidolgozott lineáris paraméteridentifikációs módszerről kapta. A módszer alap gondolata, hogy az identifikációs problémát előszűrt EE optimalizációk sorozatára bontja fel, melyek határértékben OE formulációt (költségfüggvényt) eredményeznek, kiküszöbölve evvel a EE identifikációból eredő, mérési zaj jelenlétében fellépő torzítást. Minden iterációs lépésben egy paramétereiben lineáris EE optimalizációs problémát oldunk meg, ahol mind a bemeneti, mind a kimeneti jelet egy



4.6. ábra. A FASPIS séma blokkdiagramja.

előszűrővel megszűrjük. A probléma megoldásából képezzük a következő iteráció előszűrőjét, majd az optimalizációt megismételjük és így tovább.

Ha az eljárás konvergál, az eredményül kapott megoldás nem feltétlenül a (súlyozott)  $L_2$  approximációs hibafelület lokális minimumhelyének felel meg, bár a konvergenciapontban a költségfüggvény alakja kétségkívül megegyezik a súlyozott  $L_2$  approximációs probléma költségfüggvényével. A Steiglitz-McBride iteráció (off-line algoritmus) valójában nem tekinthető egy adott OE költségfüggvény minimumhelyéhez konvergáló gradiens módszernek. Ennek is tudható be az a szimulációk során megfigyelt jelenség, hogy az algoritmust az  $L_2$  hibafelület lokális minimumhelyének közeléből indítva, az elhagyja a lokális minimumhely környezetét és globális minimumhely felé közelít. Minthogy költségfüggvény nem jelölhető ki, a konvergenciapontok optimalitásáról nincsenek eredmények. Igazolható, hogy ha az ismeretlen rendszer fokszáma rendelkezésre áll (identifikáció) és a zavarjel fehér, akkor az egyetlen stacionárius pont a helyes paramétereket adja, továbbá a stacionárius pont lokálisan konvergens.

A Steiglitz-McBride iteráció mintájára – direkt formájú és lattice – on-line algoritmus szerkeszthető, mely a stacionárius pontokat közép értelemben megőrzi. A konvergenciapontokról biztosan nem állíthatunk, de nagy valószínűséggel az invariancia azokra is teljesül. A direkt formájú és a lattice algoritmusok között stacionárius pontokat tekintve nincs különbség, a konvergencia folyamata azonban – akár csak az on-line és az off-line algoritmus esetében – eltérő, bár az ismét csak feltételezhető, hogy a konvergenciapontok megegyeznek. Ha zavarjel fehér (vagy más speciális folyamat), az a stacionárius pontokat nem változtatja meg; ellenkező esetben azonban igen, ezért ezt a Steiglitz-McBride algoritmusok használatához mindenképp tudni érdemes. Előfordulhatnak helyzetek, pl. tetszőlegesen kicsi jel/zaj viszony, amikor nem létezik stacionárius pont.

A Steiglitz-McBride algoritmusok vonzereje egyszerűségükben és abban rejlik, hogy fehér referenciajel esetén a modellezési hibára a priori korlát adható. Legyen  $\hat{H}(z)$  a Steiglitz-McBride iteráció tetszőleges stacionárius pontjában kapott  $M$ -edfokú átviteli függvény. Ekkor

$$\left\| H(z) - \hat{H}(z) \right\|_2^2 \leq \sigma_{M+1}^2 + \frac{\max_{\omega} \mathcal{S}_{\zeta}(e^{j\omega}) - E[\zeta^2(n)]}{E[u^2(n)]},$$



ahol  $\sigma_{M+1}$  a  $H(z)$  ismeretlen rendszer  $M + 1$ -edik Hankel szinguláris értéke. Ebből a tulajdonságból következik, hogy a Steiglitz-McBride algoritmus képes alulmodellezett esetben is használható  $\hat{H}(z)$  approximáns előállítására, ami az algoritmus gyakorlati értékét támasztja alá. Egy aktív zajcsökkentési alkalmazás található [21] hivatkozásban (a szerzők által javasolt algoritmus előzményei [22]-ben olvashatók).

### 4.3.1. Direkt formájú és lattice on-line algoritmus

Az algoritmusok gondolati hátterét, a Steiglitz-McBride iteráció egy lépését a 4.7a ábra szemlélteti. A  $k$ -edik lépésben a költségfüggvény alakja

$$E[e^2(n)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{S}_u(e^{j\omega}) \frac{|A(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) - B(e^{j\omega})|^2}{|A^{(k)}(e^{j\omega})|^2} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{S}_\zeta(e^{j\omega}) \frac{|A(e^{j\omega})|^2}{|A^{(k)}(e^{j\omega})|^2} d\omega, \quad (4.20)$$

ahol  $A^{(k)}(z)$  a  $k - 1$ -edik lépésben  $A(z)$ -re kapott optimális megoldás. Látható, hogy amennyiben eljárás konvergál,  $A(z) = A^{(\infty)}(z)$  és (4.20) valóban az OE költségfüggvényt adja vissza. Az EE hiba kifejezése a 4.7. ábra jelöléseivel

$$e(n) = y'(n) + \sum_{i=1}^M a_i y'(n-i) - \sum_{i=0}^M b_i u'(n-i).$$

Minimalizálandó az  $E[e^2(n)]$  variancia, és a deriváltakban elvégezzük a szokásos  $E[e^2(n)] \rightarrow e^2(n)$  sztochasztikus közelítést. Egyszerű számítások után a paraméterek frissítésére a

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(n+1) &= \mathbf{b}(n) + \mu e(n) \mathbf{u}'(n), \\ \mathbf{a}(n+1) &= \mathbf{a}(n) - \mu e(n) \mathbf{y}'(n-1) \end{aligned}$$

formulák adódnak, ahol ismét a vektoros jelölésmóddhoz folyamodtunk:  $\mathbf{a}(n)$  és  $\mathbf{b}(n)$  definíciója a szokásos,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'(n) &\triangleq [u'(n) \quad u'(n-1) \quad \cdots \quad u'(n-M)]^t, \\ \mathbf{y}'(n-1) &\triangleq [y'(n-1) \quad \cdots \quad y'(n-M)]^t. \end{aligned}$$

Az on-line algoritmus megalkotásához a következő egyszerűsítést eszközöljük: legyenek a frissített  $\{a_k\}$  paraméterek a következő szűrőiteráció előszűrői is egyben, ezáltal az EE optimalizáció problémáját egyetlen lépésbe sűrítjük, idővariáns előszűrőket alkalmazunk. Az algoritmus regresszorainak előállítását a 4.8. ábra mutatja.  $y'(n) = y(n) - \mathbf{a}^t(n) \mathbf{y}'(n-1)$  ezért az  $n$ -edik lépésben

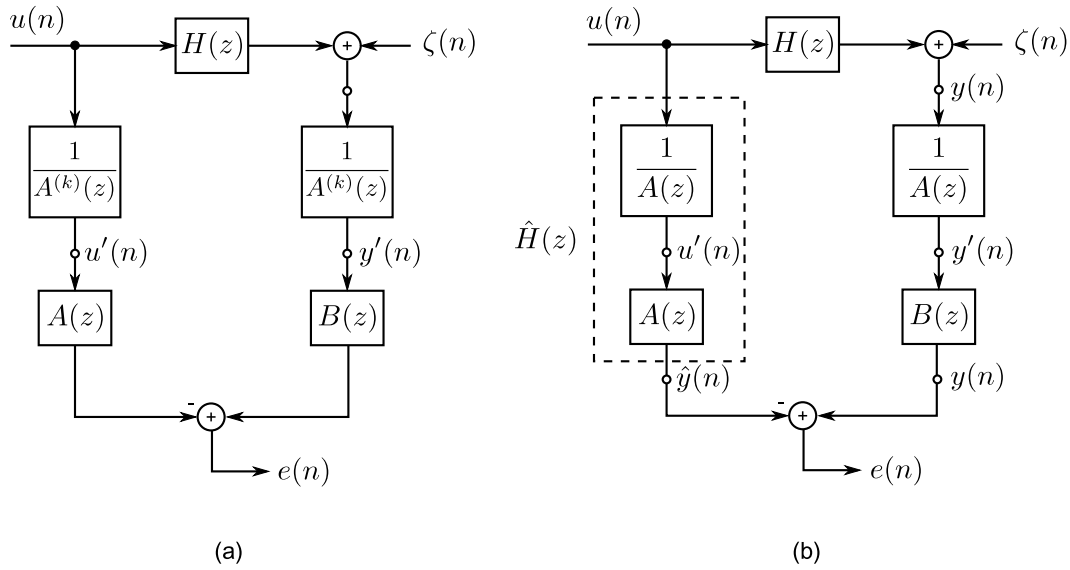
$$e(n) = y'(n) + \mathbf{a}^t(n) \mathbf{y}'(n-1) - \mathbf{b}^t(n) \mathbf{u}'(n) = y(n) - \underbrace{\mathbf{b}^t(n) \mathbf{u}'(n)}_{\hat{y}(n)}.$$

A szűrőparaméterek frissítéséhez az

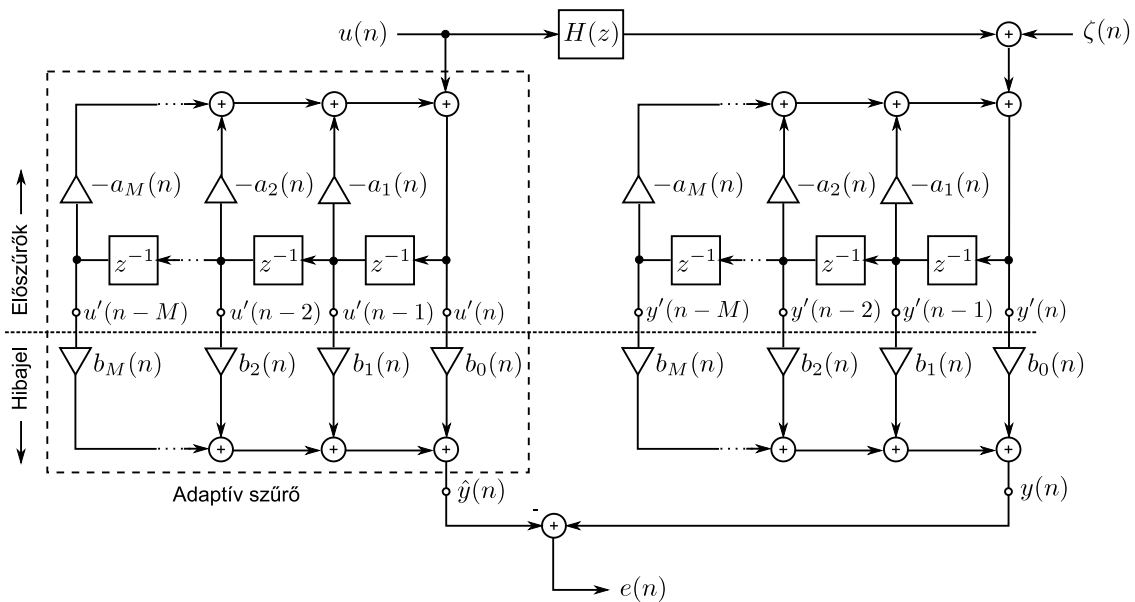
$$\bar{e}(n) = y'(n) + \mathbf{a}^t(n+1) \mathbf{y}'(n-1) - \mathbf{b}^t(n+1) \mathbf{u}'(n)$$

*a posteriori* hiba is felhasználható, ez a változat esetenként kedvező hatást gyakorol a konvergenciára. Belátható, hogy

$$\bar{e}(n) = \frac{e(n)}{1 + \mu \sum_{k=1}^M [y'(n-k)]^2 + \sum_{k=0}^M [u'(n-k)]^2}.$$



4.7. ábra. A Steiglitz-McBride iteráció struktúrája: (a)  $k$ -edik lépés; (b) konvergált megoldás.



4.8. ábra. Regresszorok előállítás az on-line Steiglitz-McBride algoritmusban.

**Algoritmus 10 (SM).**

Az  $n$ -edik lépésben rendelkezésre áll

- A szűrőegyütthetők vektorai:

$$\mathbf{a}(n) \text{ és } \mathbf{b}(n).$$

- Előszűrő állapotok:

$$\mathbf{u}'(n-1) \text{ és } \mathbf{y}'(n-1).$$

- Frissített jelek:  $u(n)$  bemeneti minta,  $y(n)$  referencia minta.

*Szűrőiteráció*

- Az előszűrő állapotrekurziója:

$$u'(n) = u(n) - \mathbf{a}^t(n)\mathbf{u}'(n-1).$$

- Az adaptív szűrő kimenete:

$$\hat{y}(n) = \mathbf{b}^t(n)\mathbf{u}'(n).$$

- Kimeneti hiba:

$$e(n) = y(n) - \hat{y}(n).$$

*A szűrőegyütthetők frissítése*

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(n+1) &= \mathbf{b}(n) + \mu e(n)\mathbf{u}'(n) \\ \mathbf{a}(n+1) &= \mathbf{a}(n) - \mu e(n)\mathbf{y}'(n-1) \end{aligned}$$

*A kimeneti utószűrő iterációja*

$$\mathbf{y}'(n) = \mathbf{a}(n+1)^t \mathbf{y}'(n-1)$$

A lattice Steiglitz-McBride algoritmus megfontolásaiért [23] hivatkozásra utalunk. Ebben a szerzők szükséges feltételt adnak egy konvergenciapontokat (lokálisan) megőrző transzformáció létezésére, mellyel direkt formájú algoritmusokból lehet lattice algoritmusokat generálni. Mivel a transzformáció sikerrel alkalmazható a direkt formájú Steiglitz-McBride algoritmusra, ezt a javított lattice változatot használtuk a szimulációk során. A szűrőrealizáció az összefüggések egyszerűsítése végett egy kissé módosul, a  $\hat{H}(z)$  átviteli függvényt egy  $B(z)$  transzverzális FIR szűrő és egy  $1/A(z)$  (all-pole) normalizált lattice kaszkádjaként valósítjuk meg. A lattice-t most a  $\{\sin \theta_k\}$  paraméterek függvényében írjuk fel, a transzverzális szűrőt pedig értelemszerűen  $\{b_k\}$ -val paraméterezzük. A regresszorok kifejezése

$$\begin{aligned} V_l(n) &= [1 \quad z^{-1} \quad \dots \quad z^{-M}]^t \frac{1}{A(z)} u(n) = \mathbf{u}'(n), \\ W_l(n) &= \left[ \frac{1}{\cos \theta_1} \frac{\delta_1 A(z)}{A(z)} \quad \dots \quad \frac{1}{\cos \theta_M} \frac{\delta_M A(z)}{A(z)} \right]^t [-\hat{y}(n)], \end{aligned}$$

amiből az együtthatófrissítési formulák:

$$\begin{aligned}\mathbf{b}(n+1) &= \mathbf{b}(n) + \mu e(n)V_l(n), \\ \sin \Theta(n+1) &= \sin \Theta(n) + \mu e(n)W_l(n).\end{aligned}$$

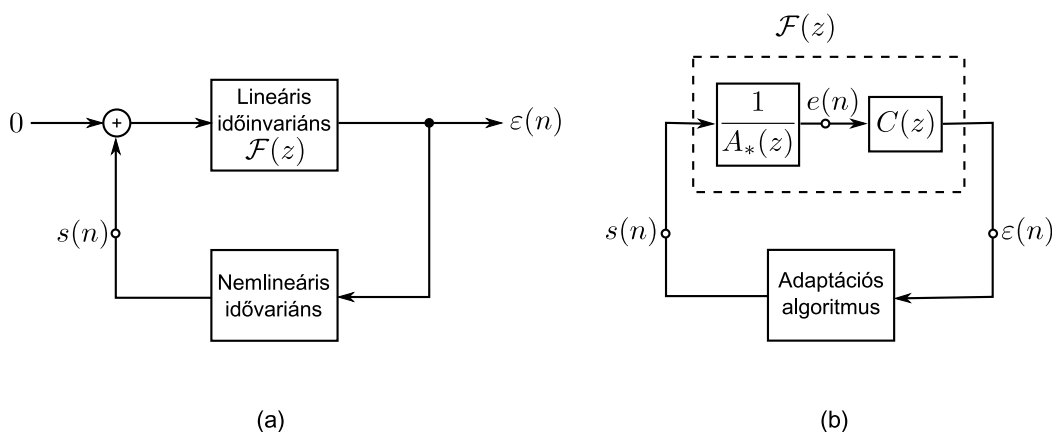
Ha felidézünk a lattice-re érvényes  $A(z) \equiv D_M(z)$  azonosságot  $\left(\delta_k = \frac{\partial}{\partial \theta_k}\right)$ , azonnal látszik, hogy  $W_l(n)$  kiszámítása (4.8) alapján történhet, vagyis kiindulásképpen a parciális gradiens lattice algoritmust használhatjuk. A teljes lattice Steiglitz-McBride algoritmus (L-SM) konstrukciója innentől egyszerű és mechanikus feladat, az algoritmus tételes ismertetésétől ezért eltekintünk. A parciális gradiens számítására alkalmazott (4.6) közelítő összefüggés felhasználásával egy egyszerűsített változat (*Simplified L-SM – SL-SM*) is alkotható, ezt szintén nem ismertetjük tételesen.

## 4.4. Hiperstabil algoritmusok

A nemlineárisan visszacsatolt rendszerek elméletében gyökerező hiperstabilitási tétel felhasználható adaptív algoritmusok készítésére is, mivel az adaptív szűrő ügyesen egy visszacsatolt hurok alakjára hozható, mely egy lineáris és egy nemlineáris összetevőt tartalmaz. Maga a hiperstabilitási tétel a 4.9a. ábrán látható zárthurkú (visszacsatolt) rendszerre írható fel, amennyiben a hurokátvitelre igaz a

$$\sum_{n=0}^N s(n)\varepsilon(n) \leq \gamma^2 \quad (4.21)$$

Popov-egyenlőtlenség, ahol  $\gamma$  egy  $N$ -től független, véges konstans. A rendszer lineáris összetevőjét az  $\mathcal{F}(z)$  átviteli függvény jellemzi. Ekkor a 4.9a. ábrán látható zárthurkú rendszer aszimptotikusan stabil minden, a (4.21) összefüggésnek eleget tevő hurokátvitelre, és minden kezdeti feltételre pontosan abban az esetben, ha  $\mathcal{F}(z)$  szigorúan pozitív valós (*Strictly Positive Real – SPR*):  $\Re\{\mathcal{F}(e^{j\omega})\} \geq 0$ , minden  $\omega$ -ra.



4.9. ábra. A hiperstabilitás értelmezéséhez: (a) elméleti modell; (b) alkalmazás adaptív IIR szűrésben.

Az aszimptotikus stabilitás azt jelenti, hogy  $s(n)$  és  $\varepsilon(n)$  korlátos és aszimptotikusan nullához tart, bármilyen kezdeti feltételből indítjuk is a rendszert. Az SPR

feltétel szoros kapcsolatban áll rendszerek passzivitási tulajdonságával, nevezetesen: belátható, hogy egy racionális függvény akkor, és csak akkor pozitív valós, ha egy passzív kétpólus impedanciáját realizálja. Ebben az értelemben a hiperstabilitási tétel a passzív rendszerekben, a fizika törvényeinek megfelelően felemészthető energia matematikai megfogalmazása [5].

A hiperstabil algoritmusok családja a 4.9b. ábrán látható módon illeszti az adaptív szűrőket a tétel feltételeihez.  $A_*(z)$  az ismeretlen  $H(z) = B_*(z)/A_*(z)$  rendszer nevezője, amelyet most racionálisnak és  $M$ -edfokúnak tételezünk fel, ahol  $M$  a  $\hat{H}(z)$  adaptív modell fokszáma (kielégítő modellezés). A  $C(z)$  kompenzálószűrőt az  $\mathcal{F}(z)$ -re vonatkozó SPR feltétel kielégítése érdekében iktattuk az  $e(n)$  kimeneti hiba útjába. A kimeneti hiba OE megfogalmazásban értendő:  $e(n) = [H(z) - \hat{H}(z)]u(n)$ . Ha találunk olyan adaptációs algoritmust, amely a (4.21) Popov-egyenlőtlenséget kielégíti, akkor az algoritmus globálisan konvergálni fog  $H(z)$ -hez, feltéve, hogy az  $u(n)$  bemeneti jel „legendően perzisztens” gerjesztő. A 4.9b. ábra zárthurkú rendszerének aszimptotikus stabilitásából ugyanis  $\varepsilon \rightarrow 0$  következik, ami OE identifikációnál külső, additív zavar jelenlététől függetlenül  $\hat{H}(z) = H(z)$  teljesülését eredményezi. Az aszimptotikus stabilitás mellékhatásaként, zajmentes esetben, az adaptív szűrő egyben gerjesztés-válasz stabil is marad az adaptáció során, megszabadítva ezáltal a tervezőt a stabilitási tesztek komplikációjától.

A kedvező tulajdonságok árát egyrészt az SPR feltétel biztosításának szükségessége, másrészt az alulmodellezett (approximációs) esetben tapasztalható elfajult, netán nem is létező megoldások problematikája szabja ki [5]. Az SPR feltétel enyhítésére, esetleges feloldására számos törekvés irányult az évek során. Példaképpen említjük [24] által javasolt túlparaméterezéssel módszert, ahol a paraméterek számát a szerzők polifázisú faktorizációval növelik. A módszer a robusztus SPR probléma kiterjesztése [6], amikor is a kompenzáló szűrő tervezésekor az ismeretlen rendszert nem egyetlen átviteli függvénnyel, hanem az átviteli függvények terének egy tartományával reprezentáljuk, és ehhez a tartományhoz tervezünk kompenzálószűrőt. A robusztusság nem csak az a priori tervezési ismeretek hiánya miatt fontos, hanem azért is, mert bizonyos valószínűségi helyzetekben (pl. az aktív zajcsökkentésben is) az ismeretlen rendszer átviteli függvénye az idővel lassan változhat. A robusztus tervezésben elért eredményeket lásd a [6] hivatkozásban!

#### 4.4.1. HARF és SHARF

A hiperstabil adaptív rekurzív szűrő (*Hyperstable Adaptive Recursive Filter – HARF*) adaptív IIR jelfeldolgozásban használt változatát Johnson [25] alkotta meg, a bizonyításokban zajmentes, kielégítő modellezést feltételezve. A formulációban *a posteriori* hibák szerepelnek, az algoritmus ezeket kauzálisan kiszámítható módon rendezzi.

$$\begin{aligned}\hat{y}(n) &= -\sum_{k=1}^M a_k(n)x(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k(n)u(n-k) = -\mathbf{a}^t(n)\mathbf{x}(n-1) + \mathbf{b}^t(n)\mathbf{u}(n), \\ x(n) &= -\sum_{k=1}^M a_k(n+1)x(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k(n+1)u(n-k) \\ &= -\mathbf{a}^t(n+1)\mathbf{x}(n-1) + \mathbf{b}^t(n+1)\mathbf{u}(n),\end{aligned}$$

ahol az adaptív szűrő  $\hat{y}(n)$  kimeneti mintája az  $x(n)$  kimeneti minta *a priori* becslőjének fogható fel. Az *a posteriori* kimeneti hiba  $\bar{e}(n) = y(n) - x(n)$  alakú.  $\bar{e}(n)$

az ismeretlen rendszer paramétereivel

$$\begin{aligned}\bar{e}(n) &= -\mathbf{a}_*^t [\mathbf{y}(n-1) - \mathbf{x}(n-1)] + [\mathbf{b}_*^t - \mathbf{b}^t(n+1)] u(n) - \\ &\quad - [\mathbf{a}_*^t - \mathbf{a}^t(n+1)] \mathbf{x}(n-1) = -\mathbf{a}_*^t \bar{e}(n-1) + \bar{s}(n),\end{aligned}$$

ahol bevezettük az ismeretlen  $H(z)$  rendszer  $\{a_{*,k}\}_1^M$  és  $\{b_{*,k}\}_0^M$  paramétereiből alkotott  $\mathbf{a}_*$  és  $\mathbf{b}_*$  vektorokat és az  $\bar{\mathbf{e}}(n-1) \triangleq [\bar{e}(n-1), \dots, \bar{e}(n-M)]^t$  a posteriori hibavektort. A  $C(z)$  FIR kompenzálószűrő ( $c_0 = 1$ ) segítségével

$$\bar{\varepsilon}(n) = C(z)\bar{e}(n) = \bar{e}(n) + \sum_{k=1}^{M_c} c_k \bar{e}(n-k)$$

írható, vagyis  $\bar{\varepsilon}(n) = C(z)/A_*(z)\bar{s}(n)$  (vö. 4.9b. ábra),  $C(z)$ -t pedig úgy választjuk, hogy  $C(z)/A_*(z)$  szigorúan pozitív valós legyen. Belátható, hogy

$$\bar{\varepsilon}(n) = \frac{\varepsilon(n)}{1 + \mu \sum_{k=1}^M x^2(n-k) + \mu \sum_{k=0}^M u^2(n-k)},$$

amivel a paraméterfrissítési formulákra

$$\begin{aligned}\mathbf{b}(n+1) &= \mathbf{b}(n) + \mu \bar{\varepsilon}(n) \mathbf{u}(n), \\ \mathbf{a}(n+1) &= \mathbf{a}(n) - \mu \bar{\varepsilon}(n) \mathbf{x}(n-1)\end{aligned}$$

adódik. A Popov-egyenlőtlenség teljesülésének bizonyítását lásd [25] és [5] hivatkozásokban!

[8]-ban megtalálható a HARF algoritmus ANC feladatokhoz adaptált változata (*Filtered Regressor HARF*), a különbségek az alább közölt változathoz képest csak az  $\mathbf{u}(n)$  és  $\mathbf{x}(n-1)$  regresszorok szűrésében jelentkeznek, a 4.1.3 pontban említettekkel összhangban.

### Algoritmus 11 (HARF).

Az  $n$ -edik lépésben rendelkezésre áll

- A szűrőegyütthatók vektorai:

$$\mathbf{a}(n) \text{ és } \mathbf{b}(n).$$

- Az előszűrő állapotvektorai:

$$\mathbf{u}(n-1) \text{ és } \mathbf{x}(n-1).$$

- A kompenzálószűrő állapot- és együtthatóvektora:

$$\bar{\mathbf{e}}(n-1) \text{ és } \mathbf{c} \triangleq [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_{M_c}]^t.$$

- Frissített jelek:  $u(n)$  bemeneti minta,  $y(n)$  referencia minta.

*A priori kimeneti hiba*

$$\begin{aligned}\hat{y}(n) &= -\mathbf{a}^t(n)\mathbf{x}(n-1) + \mathbf{b}^t(n)\mathbf{u}(n) \\ e(n) &= y(n) - \hat{y}(n) \\ \varepsilon(n) &= e(n) + \mathbf{c}^t\bar{\mathbf{e}}(n-1)\end{aligned}$$

*A szűrőegyütthetők frissítése*

$$\begin{aligned}\mu' &= \frac{\mu}{1 + \mu \sum_{k=1}^M x^2(n-k) + \mu \sum_{k=0}^M u^2(n-k)} \\ \mathbf{b}(n+1) &= \mathbf{b}(n) + \mu'e(n)\mathbf{u}(n) \\ \mathbf{a}(n+1) &= \mathbf{a}(n) - \mu'e(n)\mathbf{x}(n-1)\end{aligned}$$

*A posteriori kimeneti hiba és állapotrekurzio*

$$\begin{aligned}x(n) &= -\mathbf{a}^t(n+1)\mathbf{x}(n-1) + \mathbf{b}^t(n+1)\mathbf{u}(n) \\ \bar{\mathbf{e}}(n) &= y(n) - x(n)\end{aligned}$$

A SHARF (*Simplified HARF*) algoritmus a HARF-ból kapható, kis  $\mu$  lépésköz feltételezése mellett tett közelítésekkel ( $x(n) \approx \hat{y}(n)$ ,  $\bar{\mathbf{e}}(n) \approx \varepsilon(n)$ ). Az algoritmus viselkedése, konvergenciája kicsiny lépésköz mellett szinte megkülönböztethetetlen a HARF-étől, ellenben a konvergencia nem biztosított  $\mu$  tetszés megválasztásakor, mint a HARF esetében (zajmentes és kielégítő modellezést feltételezve). Az ODE módszer alkalmazásával kideríthető, hogy  $\zeta(n)$  külső, additív zavar jelenlétében mind a HARF, mind a SHARF globálisan konvergens marad ugyan (közép értelemben), azonban a  $\mu$  lépésköz választásával a lassú adaptációt mindkét esetben biztosítani kell.

A szűrt regresszoros SHARF változat felfogható az FuLMS algoritmus általánosításaként, ahogyan a HARF az RLMS algoritmus általánosítása. Az általánosítást a  $C(z)$  kompenzálószűrő jelenti, mely, a gondolatmenetet továbbvíve, akár a FIR-LMS algoritmusban is alkalmazható a konvergencia javítására (gyorsítására). Valóban, az irodalomban található erre is példák [6]. A lassú adaptációra vonatkozó konvergenciavizsgálat a szűrt regresszoros SHARF változatra is elvégezhető, és mint az kiderül, globális konvergencia biztosítható, amennyiben (a 4.1. ábra jelöléseivel)

$$\Re \left\{ \frac{C(e^{j\omega})S(e^{j\omega})\hat{S}(e^{-j\omega})}{A_*(e^{j\omega})} \right\} > 0 \quad \forall \omega \quad (4.22)$$

teljesül. Ha a 4.4. ábra blokkdiagramjára írjuk fel a fenti kritériumot, akkor a

$$\Re \left\{ \frac{C(e^{j\omega})}{A_*(e^{j\omega})S_A(e^{j\omega})\hat{S}(e^{j\omega})} \right\} > 0, \quad \forall \omega$$

ekvivalens alak adódik, ahol  $S_A(z)$  az  $S(z) \triangleq S_B(z)/S_A(z)$  másodlagos út átviteli függvényének nevezője. Az FuLMS algoritmusra vonatkozó megfelelő kritériumot  $C(z) = 1$  választással kapjuk. Ha  $A_*(z) = C(z) = 1$ , akkor a kifejezés az FxLMS algoritmusra korábbról már ismert, fázisszögek eltérése kimondott feltételt adja vissza.

**Algoritmus 12 (SHARF).**

Az  $n$ -edik lépésben rendelkezésre áll

- A szűrőegyütthetők vektorai:

$$\mathbf{a}(n) \text{ és } \mathbf{b}(n).$$

- Állapotvektorok:

$$\mathbf{u}(n-1) \text{ és } \hat{\mathbf{y}}(n-1).$$

- A kompenzálószűrő állapot- és együtthetővektora:

$$\mathbf{e}(n-1) \triangleq [e(n-1) \ e(n-2) \ \dots \ e(n-M_c)]^t \text{ és } \mathbf{c}.$$

- Frissített jelek:  $u(n)$  bemeneti minta,  $y(n)$  referencia minta.

*Kimeneti hiba*

$$\begin{aligned} \hat{y}(n) &= -\mathbf{a}^t(n)\hat{\mathbf{y}}(n-1) + \mathbf{b}^t(n)\mathbf{u}(n) \\ e(n) &= y(n) - \hat{y}(n) \\ \varepsilon(n) &= e(n) + \mathbf{c}^t\mathbf{e}(n-1) \end{aligned}$$

*A szűrőegyütthetők frissítése*

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(n+1) &= \mathbf{b}(n) + \mu e(n)\mathbf{u}(n) \\ \mathbf{a}(n+1) &= \mathbf{a}(n) - \mu e(n)\hat{\mathbf{y}}(n-1) \end{aligned}$$

**4.4.2. Lattice SHARF változat**

Nem ideális körülmények között, vagyis ha a környezet nem zajmentes, vagy a ki-elégítő modellezés nem biztosított (approximáció), a hiperstabil algoritmusok kivethetik az idővariáns direkt formájú adaptív szűrőt a gerjesztés-válasz stabilitás tartományából, azonkívül a direkt forma numerikus problémái is mutatkozhatnak. Ilyen helyzetben előtérbe kerülnek a lattice szűrőrealizációk.

Akárcsak a 4.3.1 pontban, most is a [23] hivatkozást idézzük, miszerint az abban ismertetett módszerrel egy, a direkt forma stacionárius és konvergenciapontjait megőrző hiperstabil lattice algoritmus szerkeszthető. A lattice Steiglitz-McBride algoritmusához csupán a regresszorok alakjában van eltérés:

$$\begin{aligned} V_l(n) &= [1 \ z^{-1} \ \dots \ z^{-M}]^t u(n) = \mathbf{u}(n), \\ W_l(n) &= \left[ \frac{1}{\cos \theta_1} \frac{\delta_1 A(z)}{A(z)} \ \dots \ \frac{1}{\cos \theta_M} \frac{\delta_M A(z)}{A(z)} \right]^t [-B(z)u(n)]. \end{aligned}$$

Ezt az algoritmust sem ismertetjük tételesen. Az SL-SM algoritmus mintájára most is elkészíthető egy egyszerűsített algoritmusvariáns (SL-SHARF).



## 5. fejezet

# Szimulációk

A fejezetben ismertetjük a számítógépes összehasonlító szimulációk eredményeit, melyek az előző pontban tárgyalt adaptációs algoritmusok gyakorlati jelentőségét hivatottak kideríteni. Eredeti céljainknak megfelelően arra keressük a választ, hogy egy implementált aktív zajcsökkentő rendszerben az egyes algoritmusoktól milyen teljesítmény várható, illetőleg az algoritmusok kiválasztásakor milyen szempontok jöhetnek számításba. Nyilván nem lehetséges mindenre kiterjedő részletességgel vizsgálni a kérdést, ezért kulcsfontosságú a tervezés, a jó kompromisszumok megtalálása a szimulációk száma, futási ideje és a kapott eredmények relevanciája között. Fontos először is tisztázni, hogy milyen objektív teljesítménymérőket használhatunk, amennyiben egy adaptációs algoritmust – pontosabban adaptív szűrőt – ANC szempontból kívánunk vizsgálni.

A 3. fejezetben szóltunk már az adaptív IIR szűrők potenciális előnyéről, nevezetesen az átviteli karakterisztikán erős kiemeléseket tartalmazó, pl. modális viselkedést mutató rendszerek kis foksámú modellezéséről. Értelmetlen volna IIR szűrőkkel vesződni, ha azok nem lennének képesek a modellezés pontosságát, így végeredményében a zajcsökkentés mértékét a FIR szűrőkhöz mérten javítani. A kimeneti hiba teljesítményének sztochasztikus becslője a MSE, mely a nulla várható értékű  $e(n)$  pillanatnyi kimeneti hiba négyzetének középértéke, másképpen fogalmazva a zaj varianciája ( $E[e^2(n)] = \sigma_e^2$ ). A MSE maga is időfüggő mennyiség, lévén egy idővariáns rendszer kimeneteként kapjuk. Stacionárius referenciajelet feltételezve, az adaptív IIR szűrő modellezési képességeit az *állandósult állapotbeli MSE* egyetlen számmal jellemzi.

További információkhoz juthatunk, ha az állandósult állapotbeli MSE spektrális eloszlását is figyelembe vesszük. Különösen akkor hasznos ezt az adatot a vizsgálatok körébe vonnunk, ha aktív zajcsökkentő rendszerek teljesítményét kívánjuk megítélni. Elterjedt gyakorlat ilyenkor a zajcsökkenés mértékének (*Noise Reduction – NR*) spektrális megjelenítése, mely az állandósult állapotbeli kimeneti hiba  $\mathcal{S}_e$  spektrális sűrűségfüggvényének az ismeretlen rendszer  $y(n)$  kimenetével normált ábrázolása:

$$\text{NR} = \frac{\mathcal{S}_e(e^{j\omega})}{\mathcal{S}_y(e^{j\omega})}.$$

Az osztás miatt ügyelni kell arra, hogy a referenciakimenet – legalább a vizsgálati frekvenciasávban – spektrálisan „gazdag”, azaz nullától jelentősen eltérő spektrális teljesítménysűrűségű legyen, máskülönben a származtatott zajcsökkenés igen érzékeny lesz a mérési és numerikus hibákra. Az ismeretlen rendszer paraméterei fölött

irányítással nem rendelkezvén, amit tenni tudunk, hogy perzisztens, lehetőleg fehér  $u(n)$  gerjesztőjelet alkalmazunk, illetve több (szimulációs) kísérlet adatait átlagoljuk. Az átlagolás módszerével egyébként is mindenhol élni fogunk, hogy az egyes szimulációkból megfigyelhető trendek rajzolódjanak ki.

Identifikációs szimulációknál értelmes a paraméterek szolgáltatása *átviteli függvény* összevetése az ismeretlen rendszer átviteli függvényével. Létezik természetesen az alábbi kapcsolat:

$$\text{MSE}(e^{j\omega}) = \left| H(e^{j\omega}) - \hat{H}(e^{j\omega}) \right|^2 \mathcal{S}_u(e^{j\omega}) + \mathcal{S}_\zeta(e^{j\omega}).$$

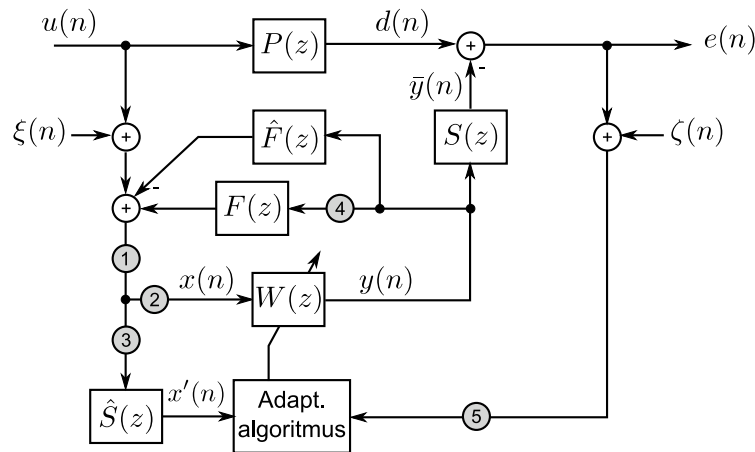
Ha a modellezés kielégítő fokszámú  $\hat{H}(z)$  rendszerrel történik, akkor az identifikáció mindegyik ismert algoritmussal lehetséges, még fehér, additív mérési zaj jelenléte mellett is. Az algoritmus konvergenciája ilyenkor közép értelemben valósul meg, a paraméterek varianciája nem zérus. Az adaptáció lépésköze (az RLS algoritmusoknál a felejtési tényező) közvetlenül befolyásolja a varianciát: a nagyobb lépésköz gyorsabb konvergenciát, ellenben nagyobb paramétervarianciát eredményez. Elméletileg a paraméterek időátlagai állandósult állapotban helyesen a  $H(z)$  rendszer megfelelő paramétereivel egyeznek meg. A gyakorlatban eltérés (torzítás) jelentkezik, ami egyrészt a véges gépi szóhosszúságra, másrészt az adaptációs algoritmusokban alkalmazott közelítésekre vezethető vissza. Ha az állandósult állapotot el is éri az adaptív szűrő, akkor sem fogunk tehát – még közép értelemben sem – egyezést tapasztalni  $H(z)$  és  $\hat{H}(z)$  között, kiváltképp nem zajos esetben. Végeredményében ismét a modellezés (identifikáció) hibájának kérdésébe ütközünk, amely algoritmusról algoritmusra változó, és a különbség marginális ugyan, mégis az adaptív szűrőre nézve minőségi jellemző. Az átviteli függvények összehasonlítása mérési zaj jelenlétében szemléletesebben mutatja az identifikációs hibát, mint az additív zaj szintjébe belesimuló MSE görbe aszimptotikus értéke.

Egy másik fontos teljesítményparaméter az adaptív szűrő *konvergenciasebessége*. Általában kívánatos az egyenletes exponenciális konvergencia, vagyis az idővel exponenciálisan csökkenő MSE (lásd a 3.3.2. pontban). A beállási folyamat időállandójával jellemezhető az adaptáció sebessége. A gyors konvergencia egyben az idővariáns átviteli függvények hatékonyabb követését *tracking* is magával vonja. Az adaptív IIR szűrők egyik hátrányaként a FIR szűrőkhöz képest lomhább időbeli viselkedés hozható fel. Ezt csak részben kompenzálja az, hogy adott aszimptotikus MSE eléréséhez a rekurzív struktúra miatt kevesebb szűrőegyüttható szükséges, kevesebb paraméter adaptációja pedig mindig gyorsabb [20]. Különösen indokolt tehát az adaptációs folyamat vizsgálata és értékelése. A szűrőparaméterek halmazának fejlődését az időben függvényében ábrázolva minden lényeges információt összegyűjthetünk a vizsgált adaptív szűrők paraméterkonvergenciájára vonatkozóan. A logaritmikus léptékkel ábrázolt MSE görbe (*learning curve*) további felvilágosítással szolgál az időbeli viselkedést illetően.

## 5.1. Az *ANCsim* környezet bemutatása

A szimulációk céljából létrehozott *ANCsim* MATLAB környezet egy m-fájlokból álló függvénygyűjtemény és egy kiegészítő szöveges formátumú „adatbázis” együttese. Parancssorban fut, nincs hozzá grafikus felhasználói felület, viszont kellően rugalmas és könnyen használható ahhoz, hogy a grafikus felület nemléte ne jelentsen komoly

hiányosságot. Jelenlegi formájában egycsatornás, feedforward ANC rendszerek vizsgálatára alkalmas. A szimulációs blokkdiagramot az 5.1. ábra mutatja. A számmal jelölt blokkok opcionális átviteli függvényeket reprezentálnak. Ezeket kísérletezésre lehet használni, fő céljuk a szimulációs struktúra rugalmasságának biztosítása.



5.1. ábra. *ANCsim* rendszerdiagram.

Az *ANCsim* három fő részegységből épül fel:

1. Felhasználói inputok kezelése (adat-, függvény- és paraméterbevitel; hibajelzések; visszajelzés a szimuláció paramétereiről és állapotáról; a programfutás vezérlése).
2. Szimulációs mag (outputok kiszámítása a rendszerdiagramra).
3. Output megjelenítés (szöveges és grafikus információk prezentálása).

Az első részegység látja el a vezérlő szerepet, a megfelelő helyeken meghívja a szimulációs magot és az output rutint. Mindhárom részegység hierarchikusan épül fel, innen származik a sok m-fájl. Bár a workspace-ből mindegyik külön is hívható, az m-fájlok többségének kiszolgáló szerepe van, nagyobb egységek részét képezik. A hármas tagolás mögött egyrészt a programfejlesztési metodológia, másrészt az a szándék áll, hogy standard szimulációk felhasználóbarát módon, egyetlen függvény hívásával futtathatók legyenek, emellett a programvezérelt szimulációk lehetősége is megmaradjon.

Az adatbázis létrehozásának célja, hogy az  $\hat{S}(z)$  hiányában automatikusan lefutó adaptív identifikáció eredményeit későbbi felhasználásra, segédinformációkkal kiegészítve tárolni lehessen. Természetesen ez az opció paraméterezhető, ahogy az is, hogy egy adott adaptációs algoritmushoz milyen paramétereket kérjen be a program, milyen hibaellenőrzést végezzen és milyen hiba- és segítő üzeneteket írjon ki. Sémák hozhatók létre az output „formázását” illetően is (ábrák száma, struktúrája, tartalma, feliratozása, egyedi plot-függvények beépítése, szöveges információ bekapcsolása).

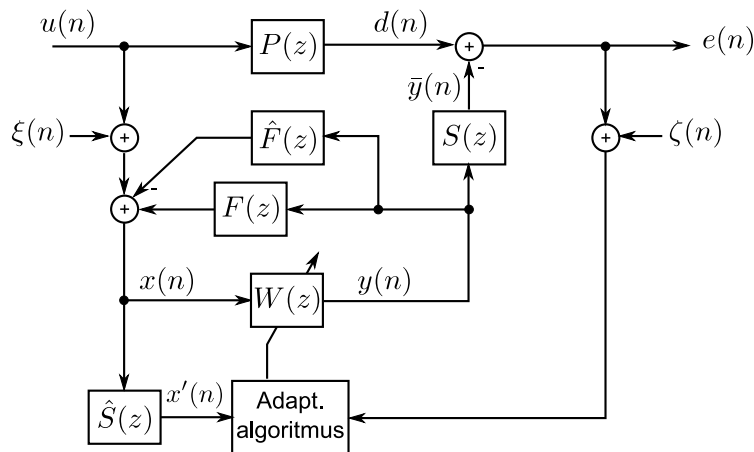
Talán a legfontosabb tulajdonsága a szimulációs környezetnek, hogy nem beépített adaptációs algoritmusokkal dolgozik. Minden algoritmus külön fájlban található, a felhasználó tetszés szerint újakat hozhat létre, a szimulációs mag (lényegi)

módosítása nélkül. Algoritmusokat – mind FIR, mind IIR – egyszerű implementálni, csak a megfelelő paramétereket kell az iterációk után a szimulációs magnak visszaadni. A mag erőteljesen optimalizált, gyakorlatilag csak beépített MATLAB függvényeket használ, s él a blokkdiagram-algebrán alapuló egyszerűsítési lehetőségekkel is (pl. nem szűr feleslegesen 1 átviteli függvényekkel). Az iterációs ciklusba dinamikusan csak olyan kódsorok kerülnek bele, amik tényleges számítást végeznek, nem pedig pusztán az általánosság miatt van rájuk szükség.

A programfutás alapesetben interaktív, tehát nincs feltétlenül szükség az összes input paraméter hiánytalan megadására már az induláskor. A szimulátor bőséges információval látja el a felhasználót a hiányzó paramétereket és a hibákat illetően. Minden m-fájlhoz angol nyelvű szöveges MATLAB help tartozik, ami a szokásos `help 'függvénynév'` paranccsal érhető el. A help a szimulátor belső adatstruktúrájáról is tartalmaz információkat. A használat és a szimulátor működésének bemutatása céljából készült egy példa m-script file, amelyet a függelékben a hozzá tartozó futási eredményekkel együtt közlünk.

## 5.2. Modellek és paraméterek

A szimulációkhoz használt átviteli függvények és jelek az 5.2. ábrán látható blokkdiagram szerinti kapcsolatban állnak egymással. Az továbbiakban az ábra jelölés-módjához igazodunk. Négy szimulációsorozatot végeztünk: az első kettő egy-egy identifikációs összeállítás, a másik kettő feedforward ANC struktúrában végzett zajcsökkentési szimuláció. A feladatok nehézsége minden lépésben növekszik, evvel együtt a reális aktív zajcsökkentési szituációkhoz egyre jobban közelít.



5.2. ábra.

Mind a négy szimulációsorozathoz szélessávú  $u(n)$  referenciajelet jelet használtunk: identifikációra fehér zajt, aktív zajcsökkentésre annak sávkorlátozott változatát. A perzisztens gerjesztésre vonatkozó feltétel így mindig teljesül, az identifikációnak nincs akadálya, emellett a szélessávú bemenet gyors konvergenciát ígér. Az ANC szimulációkban a sávkorlátozás célja az adaptációs algoritmus stabilitásának megőrzése. A másodlagos útbá iktatott  $\hat{S}(z)$  átviteli függvény ugyanis sáváteresztő jellegű, egy dinamikus hangszóró karakterisztikáját modellezi (5.21. ábra). Akusztikus ANC rendszerekben jól ismert jelenség a rekurzív szűrők instabilitása, melyet az

elektroakusztikus átalakítónak (hangszórónak) a zajcsökkentés szempontjából igen lényeges kisfrekvenciás tartományban tanúsított gyenge átvitele idéz elő. Az adaptációs algoritmus a nagy energiájú kisfrekvenciás jeltartalmat az IIR szűrő pólusainak az egységkör irányába történő mozgatásával próbálja kompenzálni, egészen addig a pontig, ahol szűrő már instabillá válik [26]. A probléma orvoslására találták ki a szivárgásos adaptációs technikát [1], mely lényegében az adaptív szűrő kimenetének energiáját korlátozza. Egy alternatív, frekvenciatartományba transzformált adaptációs algoritmust alkalmazó megoldási javaslat olvasható a [26] hivatkozásban. Mivel a szimulációkban semmilyen kompenzációs technikát nem alkalmaztunk, ezért célszerűen a hangszóró lesugárzási frekvenciasávján kívüli jeltartalmat kellett korlátozni.

Egy sorozaton belül minden algoritmus ugyanazokat a referenciajeleket kapta, szám szerint nyolcat. A nyolc futás eredményeképpen összegyűlt adatokból átlagolással születtek meg az ábrázolt grafikonok és táblázatosan közölt adatok. A MSE görbéket az  $e^2(n)$  pillanatnyi kimeneti hibanegyzetekből mozgóátlag-képzéssel kaptuk. A grafikonok készítéséhez használt átlagoló szűrő tap-száma – a grafikus prezentáció követelményeinek megfelelően – 100 és 500 között változott, egy szimulációsorozatban belül azonban állandó volt. A tabulált állandósult állapotbeli MSE és paramétervariancia adatok a nyolcas sokaságátlagok utolsó 100 mintájából képződnek.

A Kautz- és a Full-Feedback szűrőt identifikációnál nem használtuk, mivel az előbbinél identifikáció csak az ismeretlen rendszer pólusainak előzetes ismeretében lehetséges, az utóbbi pedig kifejezetten aktív zajcsökkentésre született; az identifikációs célú felhasználás így mindkét adaptív szűrő esetében érdektelen. A Kautz-szűrő pólusainak megválasztását aktív zajcsökkentő konfigurációban az átviteli függvényekről rendelkezésre álló *a priori* ismeretek mennyisége szabja meg. Tekintsünk most el az  $y(n)$  beavatkozójelnek az  $x(n)$  referenciajelbe történő (akusztikus) visszacsatolódásától ( $F(z) \triangleq 0$ )! Mivel ilyenkor  $e(n) = [P(z) - S(z)W(z)]u(n)$ , ezért az adaptív szűrő optimális átvitele

$$W_{\text{opt}} = \frac{P(z)}{S(z)} = \frac{B_P(z)A_S(z)}{A_P(z)B_S(z)},$$

ahol  $B_x(z)$  és  $A_x(z)$  a szokásos módon az alsó indexbe tett átviteli függvény számlálóját illetve nevezőjét jelöli. A [17] cikkben közölt levezetéssel analóg módon, az ott alkalmazott – a modális viselkedés feltételezéséből adódó – egyszerűsítésekkel nem élve, a Kautz-szűrő pólusait

- a  $B_{\hat{S}}(z)A_{\hat{P}}(z)$  polinom zérushelyei adják meg, amennyiben  $B_{\hat{S}}$  minimálfázisú;
- a  $B_{\hat{S}_n}(z)B_{\hat{S}_m}(z)A_{\hat{P}}(z)$  polinom zérushelyei adják meg, amennyiben  $B_{\hat{S}}$  rendelkezik az egységkörtől kívül elhelyezkedő zérusokkal.  $\hat{P}(z)$  az ismeretlen  $P(z)$  rendszer becselője.

$$B_{\hat{S}}(z) = B_{\hat{S}_m} B_{\hat{S}_{nm}},$$

ahol  $B_{\hat{S}_m}$  egy minimálfázisú faktor. A  $B_{\hat{S}_n}(z)$  polinomot  $B_{\hat{S}_{nm}}(z)$ -ből az együtt-hatók fordított sorrendben történő felírásával kapjuk. A zérusok ilyenkor invertálódnak, így az új polinom minimálfázisú lesz.

A másodlagos átviteli út  $\hat{S}(z)$  becselőjére mindenképp szükségünk van a regresszorok szűrése miatt. Kérdés, hogy  $P(z)$  pólusairól tudunk-e valamit mondani. Élhetünk

az  $A_P(z) \approx A_S(z)$  vagy az  $A_P(z) \approx 1$  feltételezéssel is, ekkor a fenti formulákból  $A_P(z)$  eltűnik.

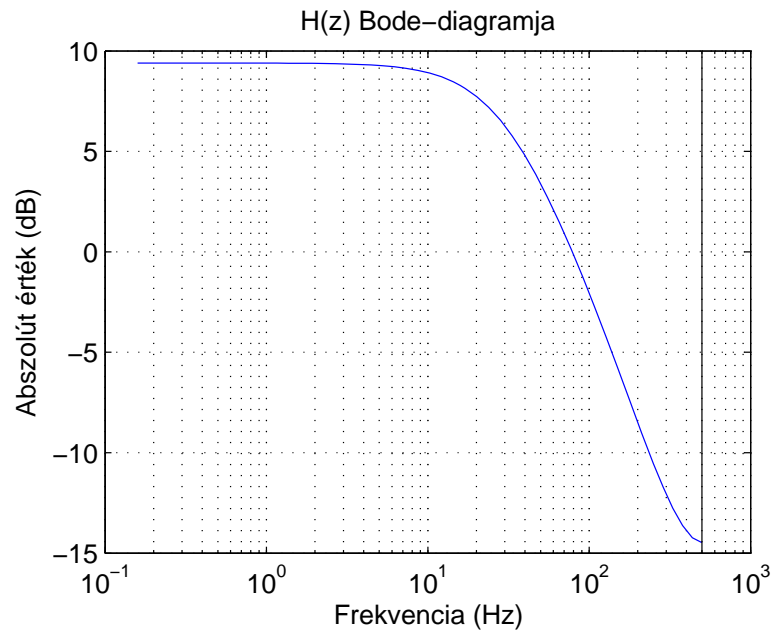
### 5.3. Másodfokú rendszer zajjal terhelt identifikációja

Az  $n_v(n) \equiv \zeta(n)$  additív zajfolyamat a hibajel mérését befolyásolja ( $n_u(n) = 0$ ), az  $u(n) = x(n)$  referenciajelhez képest értelmezett jel/zaj viszony mindössze 20 dB. Az ismeretlen rendszer átviteli függvénye

$$P(z) = \frac{0.05z^{-1} - 0.04z^{-2}}{1 - 1.1314z^{-1} + 0.25z^{-2}}.$$

Ezt az átviteli függvényt széleskörűen használják szimulációs célokra [20], [5]; az ANC szimulációkban továbbra is  $P(z)$  szerepét fogja betölteni. Pólusai valóságosak, karakterisztikája aluláteresztő jellegű (5.3. ábra). Mivel  $1/A_P(z)$  SPR függvény, ezért a hiperstabil algoritmusok alkalmazásához nem szükséges a  $C(z)$  kompenzálószűrő. Megjegyezzük, hogy a  $C(z) = 1$  és a  $C(z) = A_P(z)$  választás között a szimulációkban nem mutatkozott különbség, ezért nyilván az előbbivel éltünk.

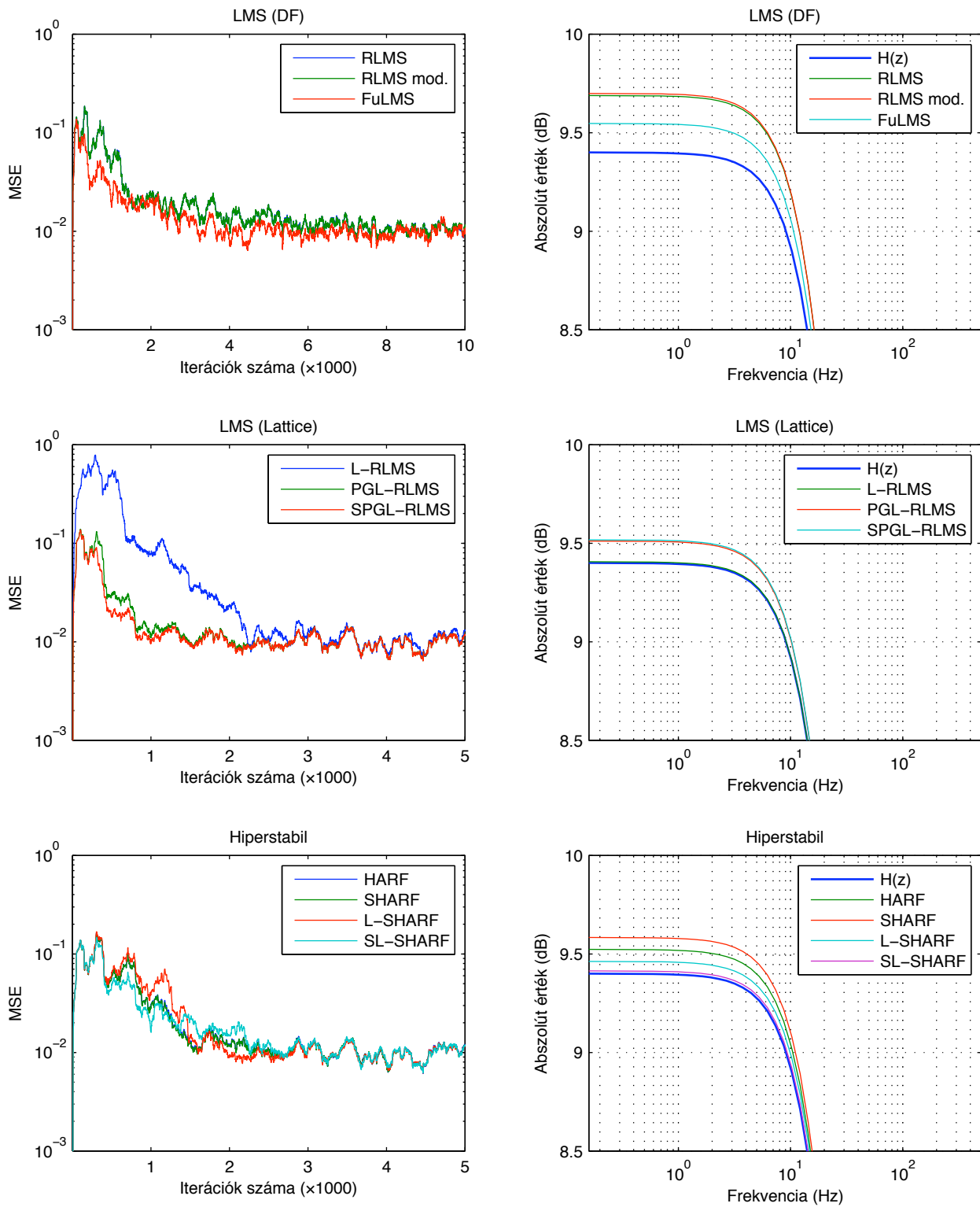
A szimulációs grafikonokat az 5.4-5.11. ábrák mutatják, az 5.1. táblázat pedig az adaptációs algoritmusok paramétereit és a numerikus eredményeket tartalmazza. Az algoritmusokat a családoknak megfelelő csoportokra bontottuk, a sztochasztikus gradiens algoritmusok családját a szűrőrealizáció típusa szerint tovább osztottuk. A  $\mu$  lépésközt, illetve a  $\lambda$  felejtési tényezőt mindig úgy választottuk meg, hogy az adaptív szűrő mind a nyolc futás alatt stabil maradjon, a paraméterek varianciája a különböző algoritmusokra hasonló legyen, az állandósult állapot pedig a lehető leggyorsabban beálljon. A maximális paramétervarianciát a táblázatban külön-külön az MA ( $\{b_k, \nu_k\}$ ) és az AR ( $\{a_k, \theta_k\}$ ) együtthatókra is megadtuk. A szimulációk 40000 iterációra futottak le, a MSE-t és a paraméterek fejlődését ábrázoló grafikonok az állandósult állapot elérése előtti helyzetet mutatják. A mintavételi frekvencia értéke minden szimulációsorozatban egységesen 1kHz.



5.3. ábra. A másodfokú  $P(z) \equiv H(z)$  átviteli függvény Bode-diagramja.

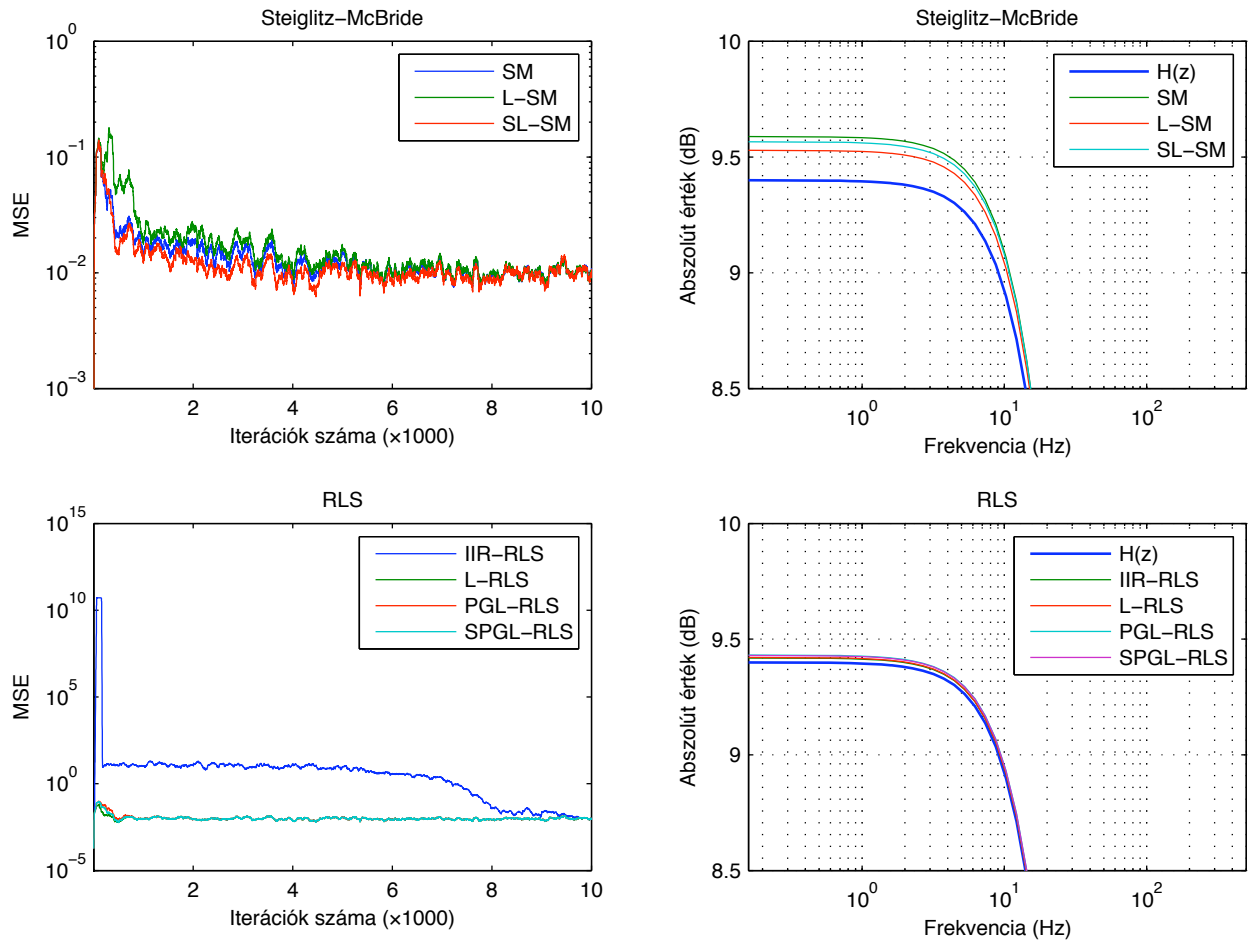
5.1. táblázat. Másodfokú rendszer zajjal terhelt identifikációja.

Algoritmus	$\mu / \lambda$	Konverg. (iteráció)	$\max \left  \frac{H(e^{j\omega})}{\hat{H}(e^{j\omega})} \right $ ( dB )	$\max\{\sigma_{MA}^2\}$ (dB)	$\max\{\sigma_{AR}^2\}$ (dB)
FuLMS	0.01	6000	0.15	-56.0	-61.5
RLMS	0.002	25000	0.29	-60.6	-56.8
RLMS mod.	0.002	25000	0.30	-64.0	-60.7
L-RLMS	0.008	4000	0.10	-56.7	-50.0
PGL-RLMS	0.008	3500	0.11	-62.2	-50.0
SPGL-RLMS	0.01	3000	0.12	-61.2	-51.5
HARF	0.01	6000	0.12	-55.0	-64.3
SHARF	0.01	6000	0.18	-54.3	-64.2
L-SHARF	0.008	5000	0.12	-55.7	-60.0
SL-SHARF	0.008	5000	0.13	-58.5	-63.5
SM	0.01	30000	0.19	-72.9	-60.5
L-SM	0.001	30000	0.13	-73.4	-60.8
SL-SM	0.003	8000	0.17	-66.5	-63.0
RLS	0.996	11000	0.07	-63.9	-57.5
L-RLS	0.997	2000	0.10	-62.2	-59.3
PGL-RLS	0.995	1500	0.06	-60.5	-56.2
SPGL-RLS	0.994	1500	0.06	-59.7	-55.0

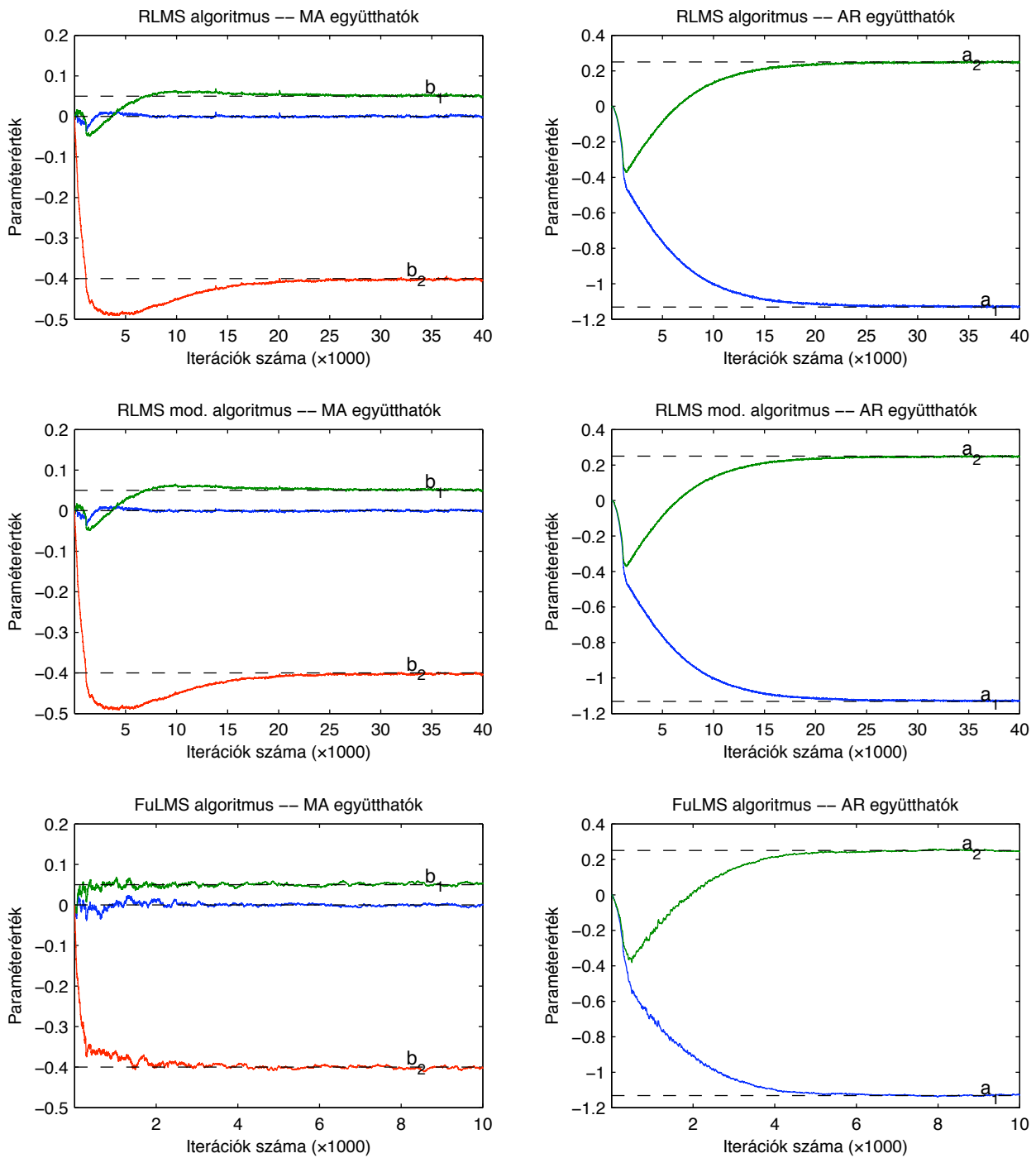


5.4. ábra.

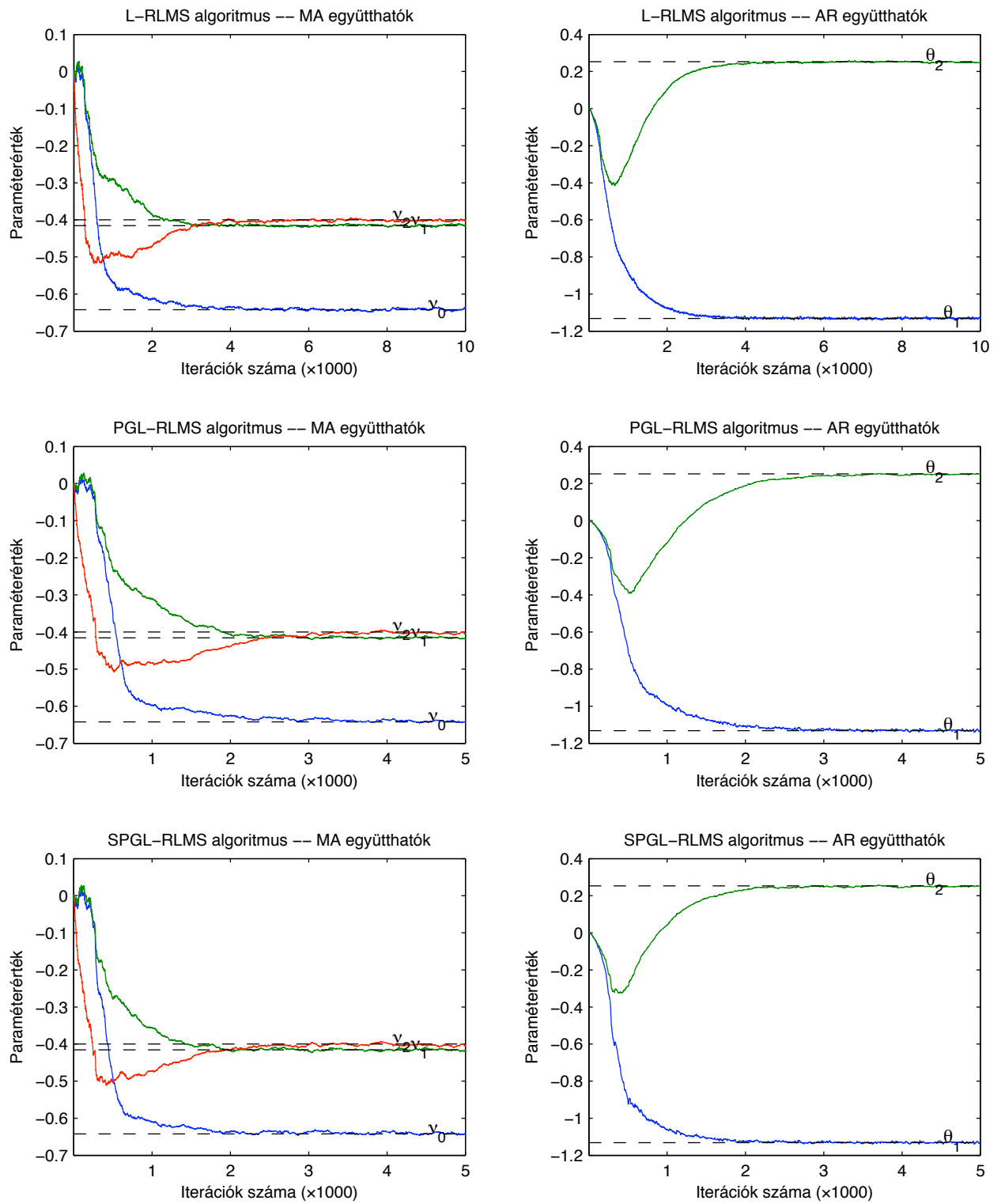




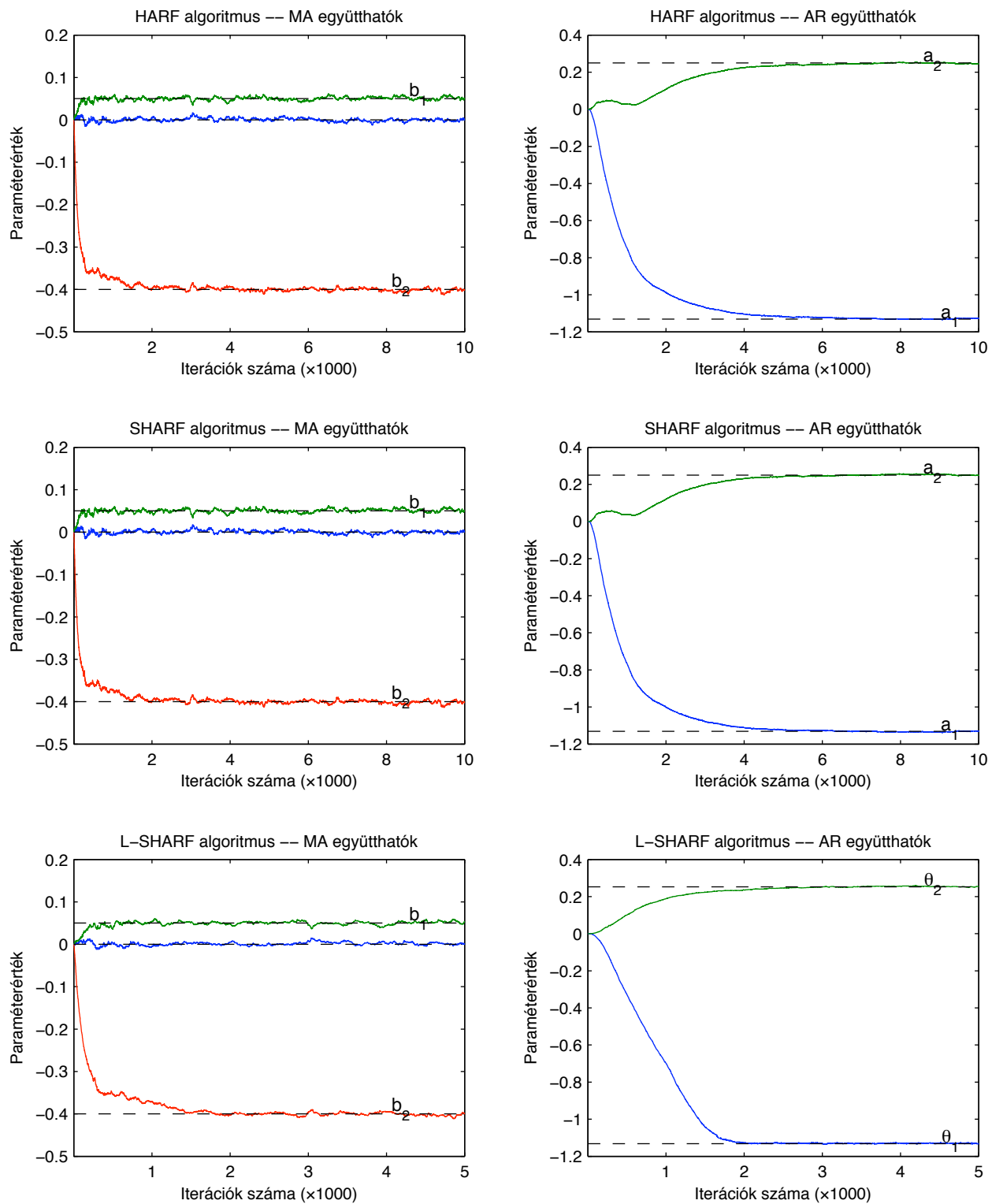
5.5. ábra.



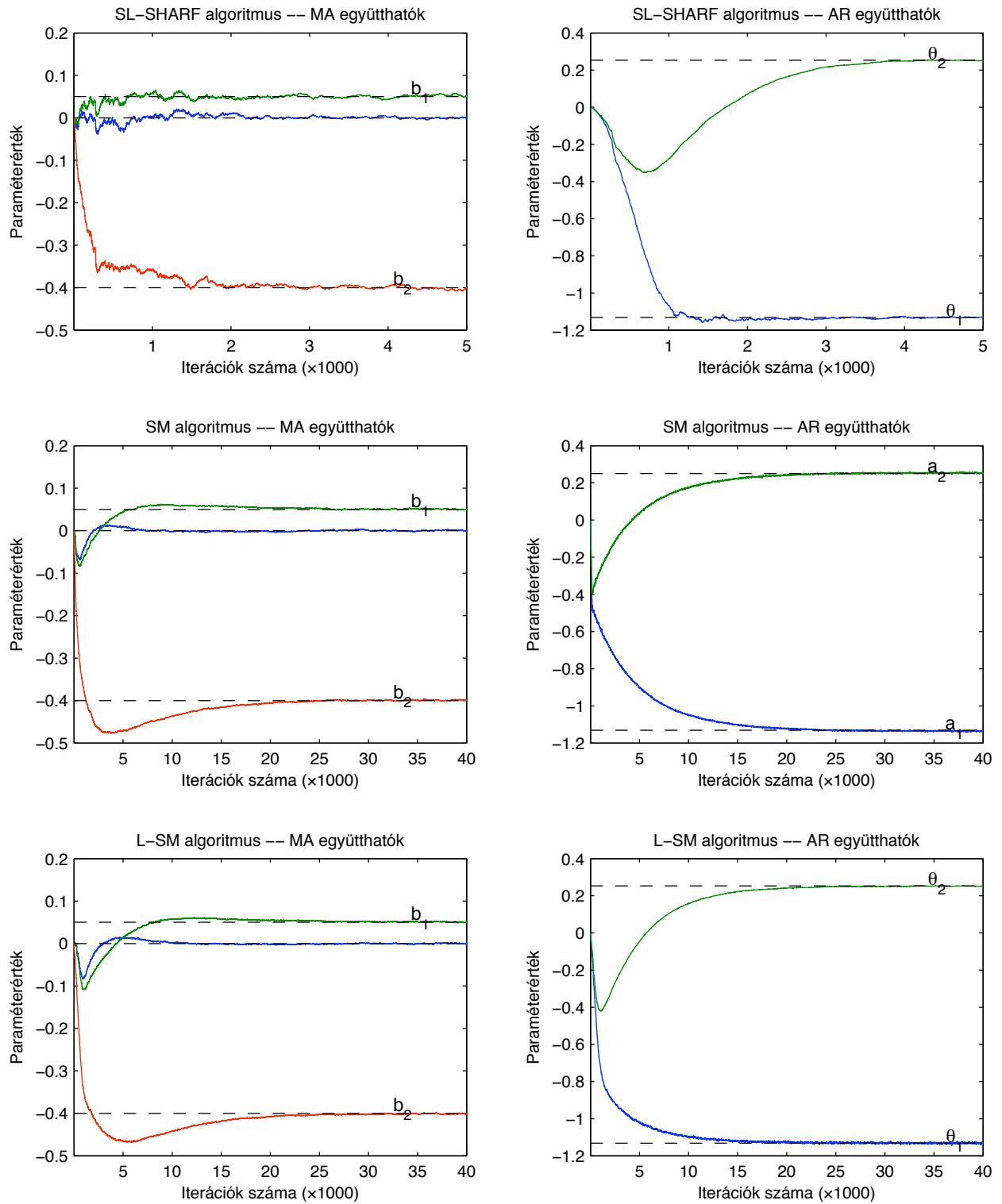
5.6. ábra.



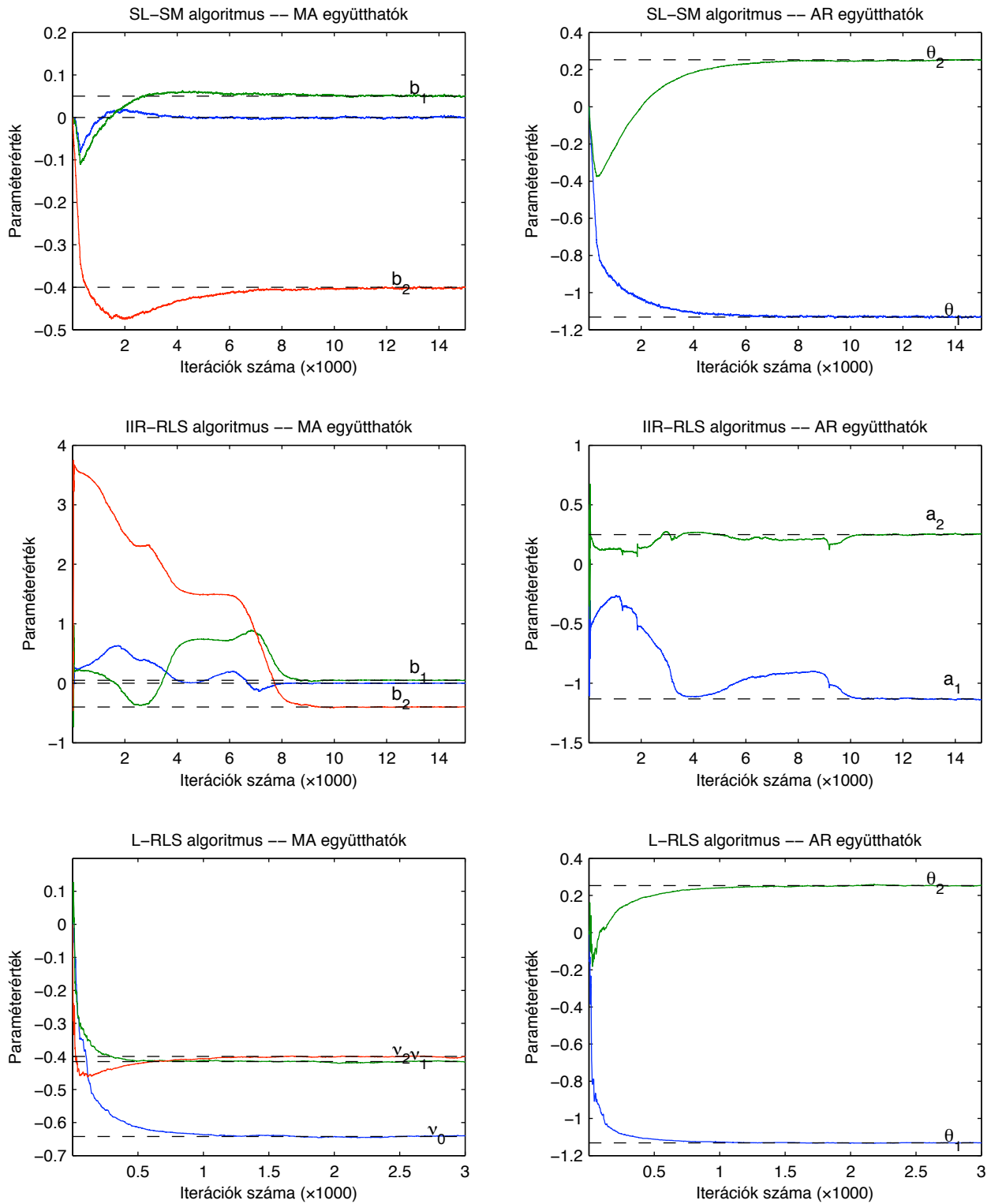
5.7. ábra.



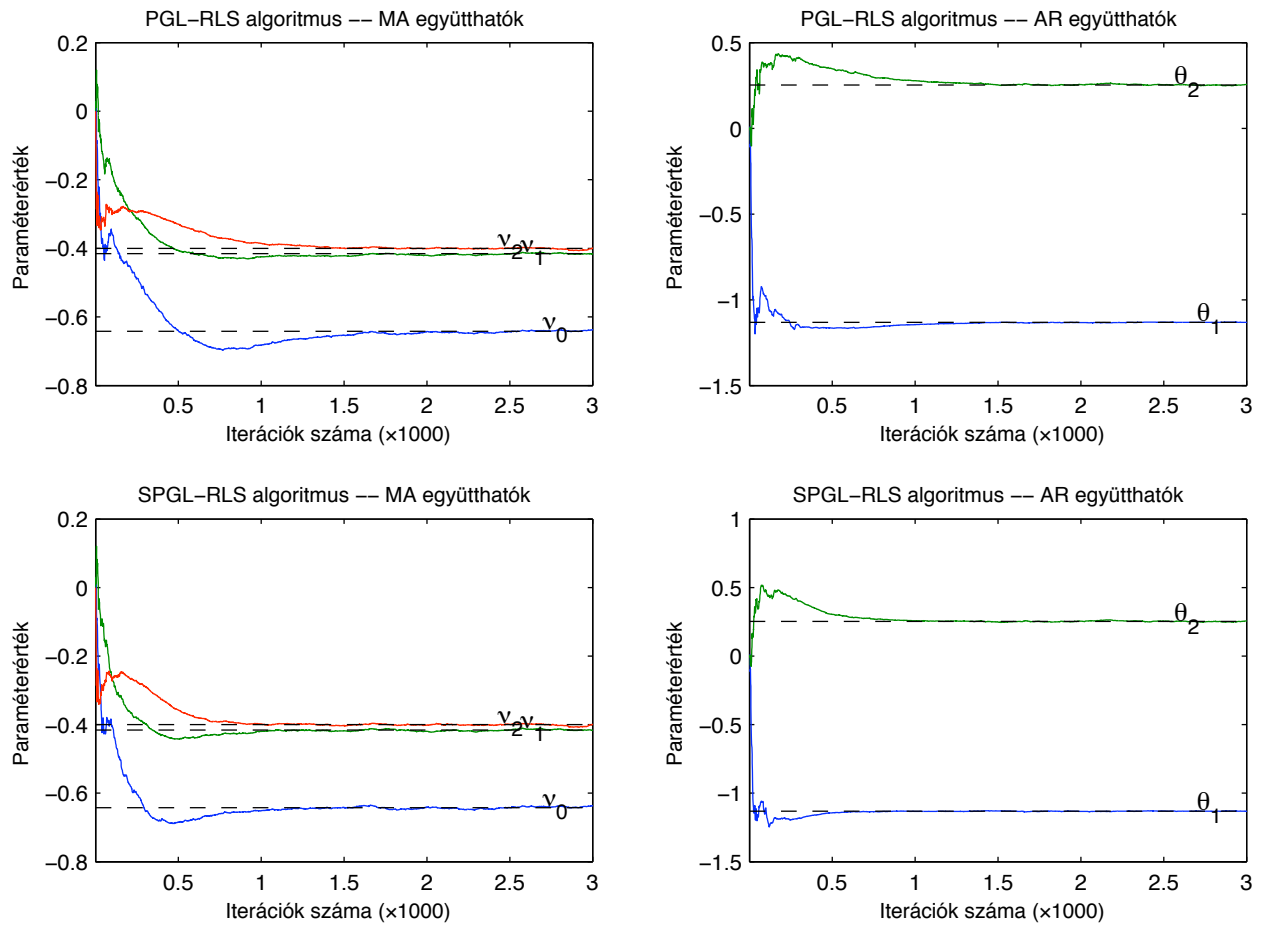
5.8. ábra.



5.9. ábra.



5.10. ábra.



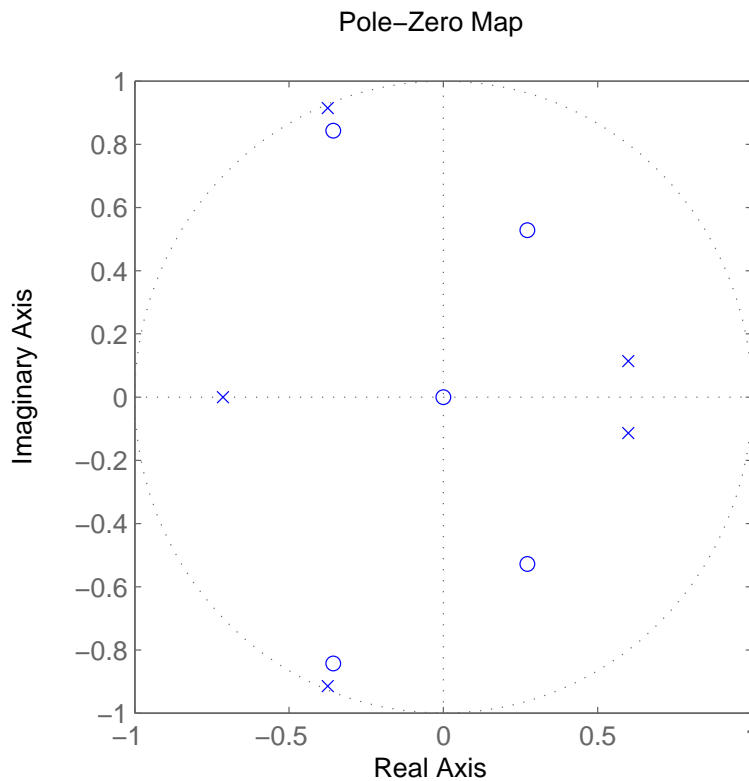
5.11. ábra.

## 5.4. Ötödfokú rendszer zajmentes indentifikációja

Az ismeretlen rendszer ötödfokú átviteli függvénye (5.13. ábra) egy nagyon gyengén csillapított komplex póluspárt tartalmaz (5.12. ábra), indentifikációja komoly kihívást jelentett az adaptív szűrőknek. Maga a függvény Regaliától származik [5], lattice paraméterekkel megadva

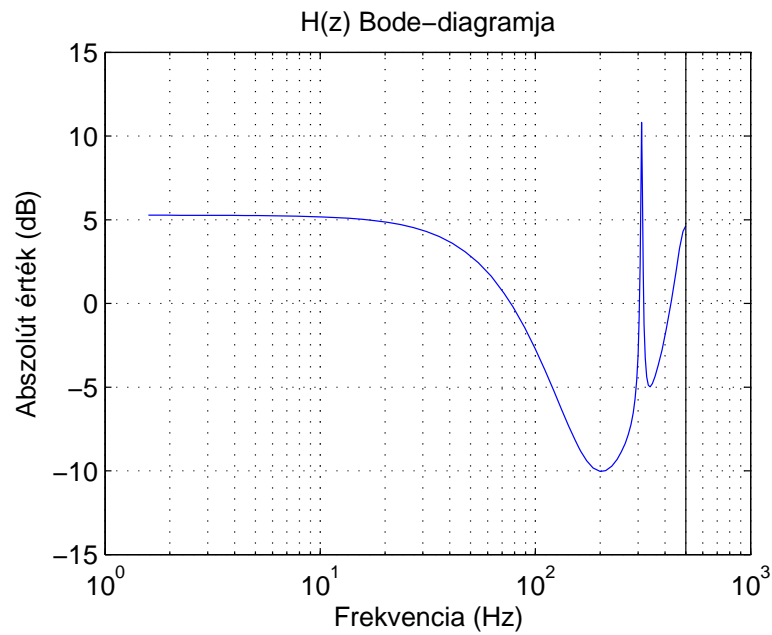
$$\Theta_P = \begin{bmatrix} 0.35909 \\ 1.03660 \\ -0.63754 \\ -0.37564 \\ 0.26247 \end{bmatrix}, \quad \nu_P = \begin{bmatrix} 0.56058 \\ 0.02272 \\ 0.75780 \\ -0.24935 \\ 0.22090 \\ 0.0 \end{bmatrix}.$$

Az  $1/A_P(z)$  függvény most is SPR, a  $C(z)$  kompenzálószűrőre az előző pontban tett megfontolások érvényesek. Az iterációk számát ezúttal 150000-re növeltük. Látni fogjuk, hogy a legtöbb adaptációs algoritmus még ennyi iteráció után sem érte el az állandósult állapotot. A  $\mu$  lépésközt (ill. a  $\lambda$  felejtési tényezőt) a még stabil szűrőt eredményező maximális (ill. minimális) értékre állítottuk, hogy konvergencia a lehető leggyorsabb legyen. A szimulációs grafikonokat az 5.14-5.20. ábrák mutatják, az 5.2. táblázat pedig az adaptációs algoritmusok paramétereit és a numerikus eredményeket tartalmazza.



5.12. ábra. Az ötödfokú  $P(z) \equiv H(z)$  átviteli függvény pólus-zérus képe.

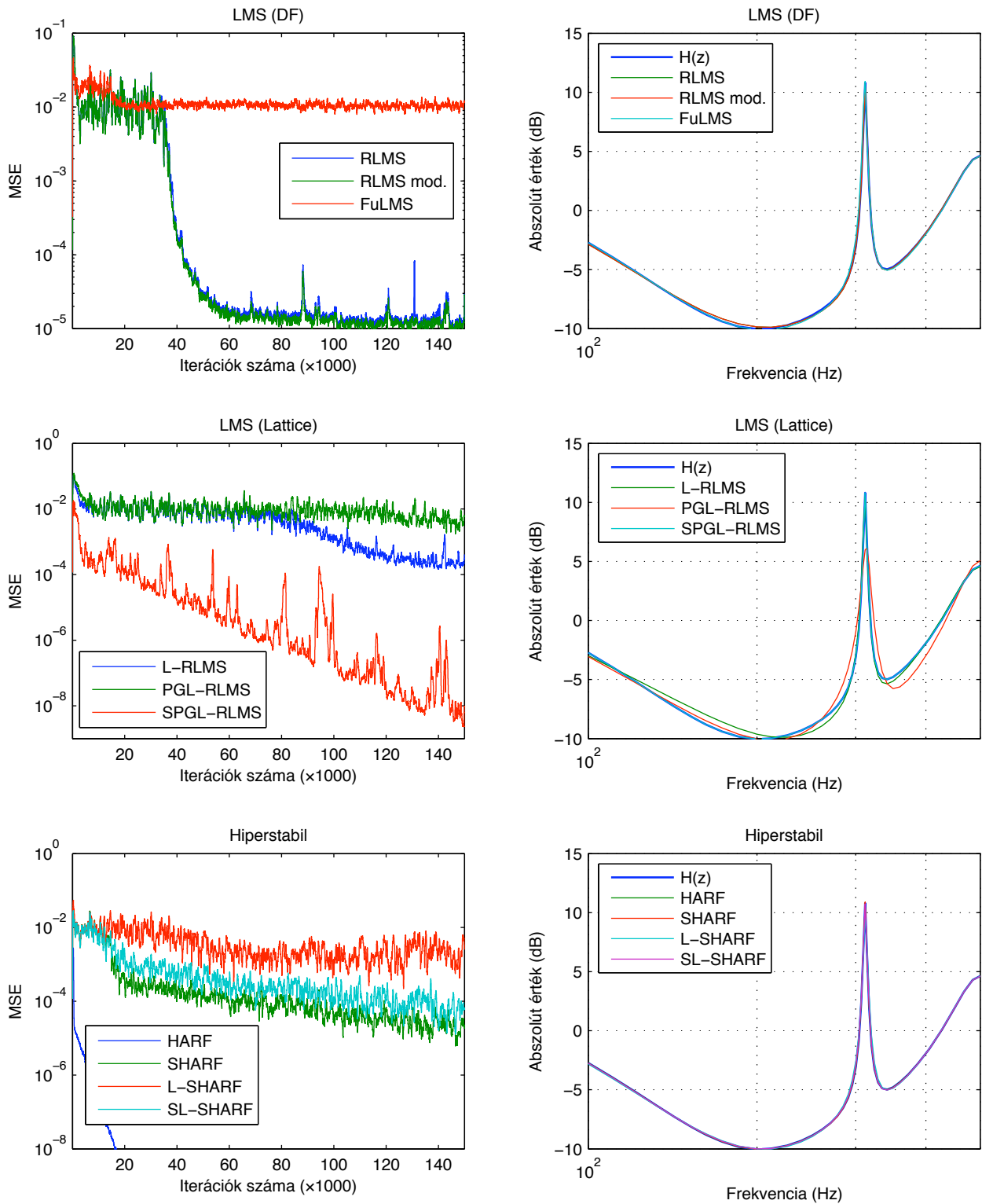




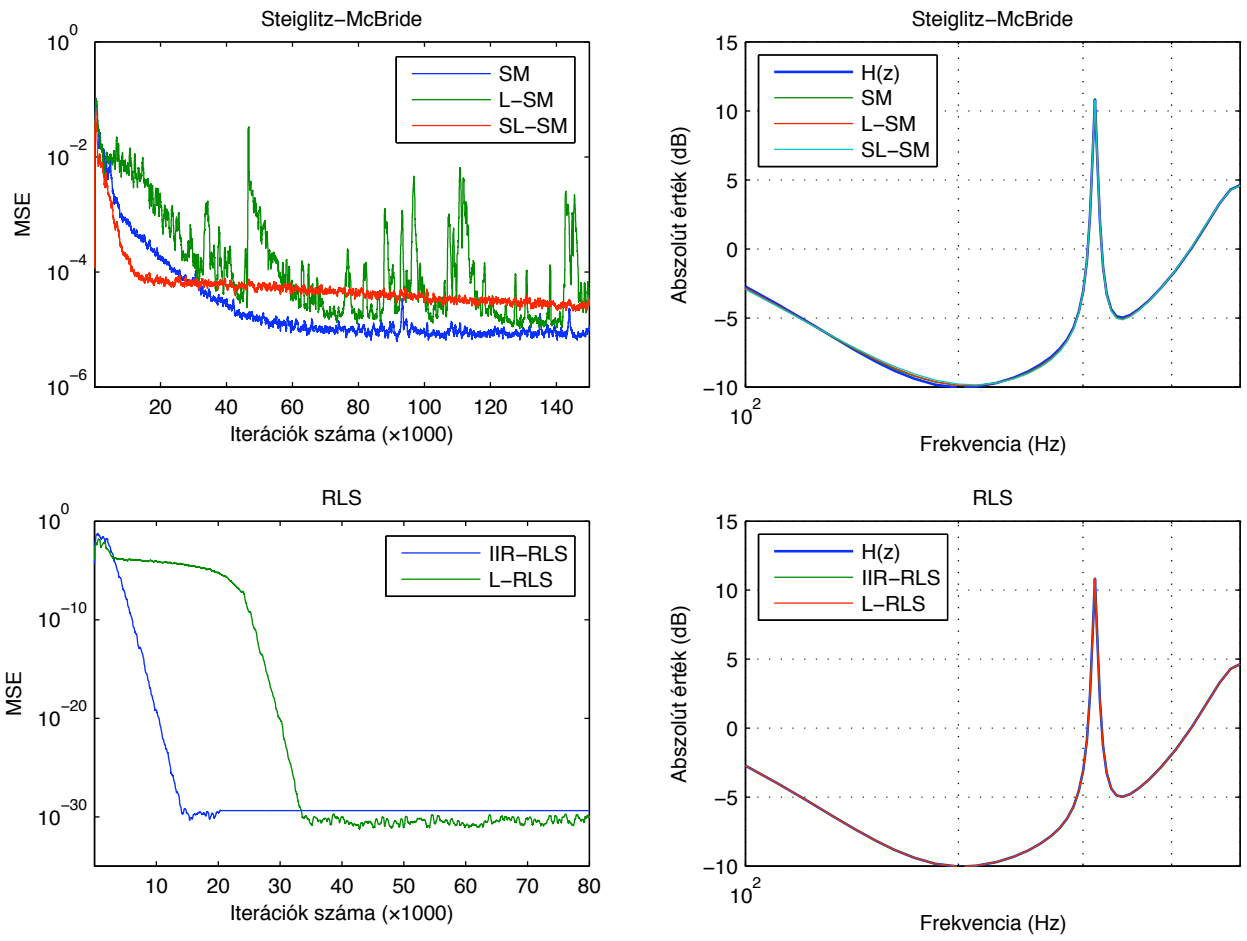
5.13. ábra. Az ötödfokú  $P(z) \equiv H(z)$  átviteli függvény Bode-diagramja.

5.2. táblázat. Ötödfokú rendszer identifikációja

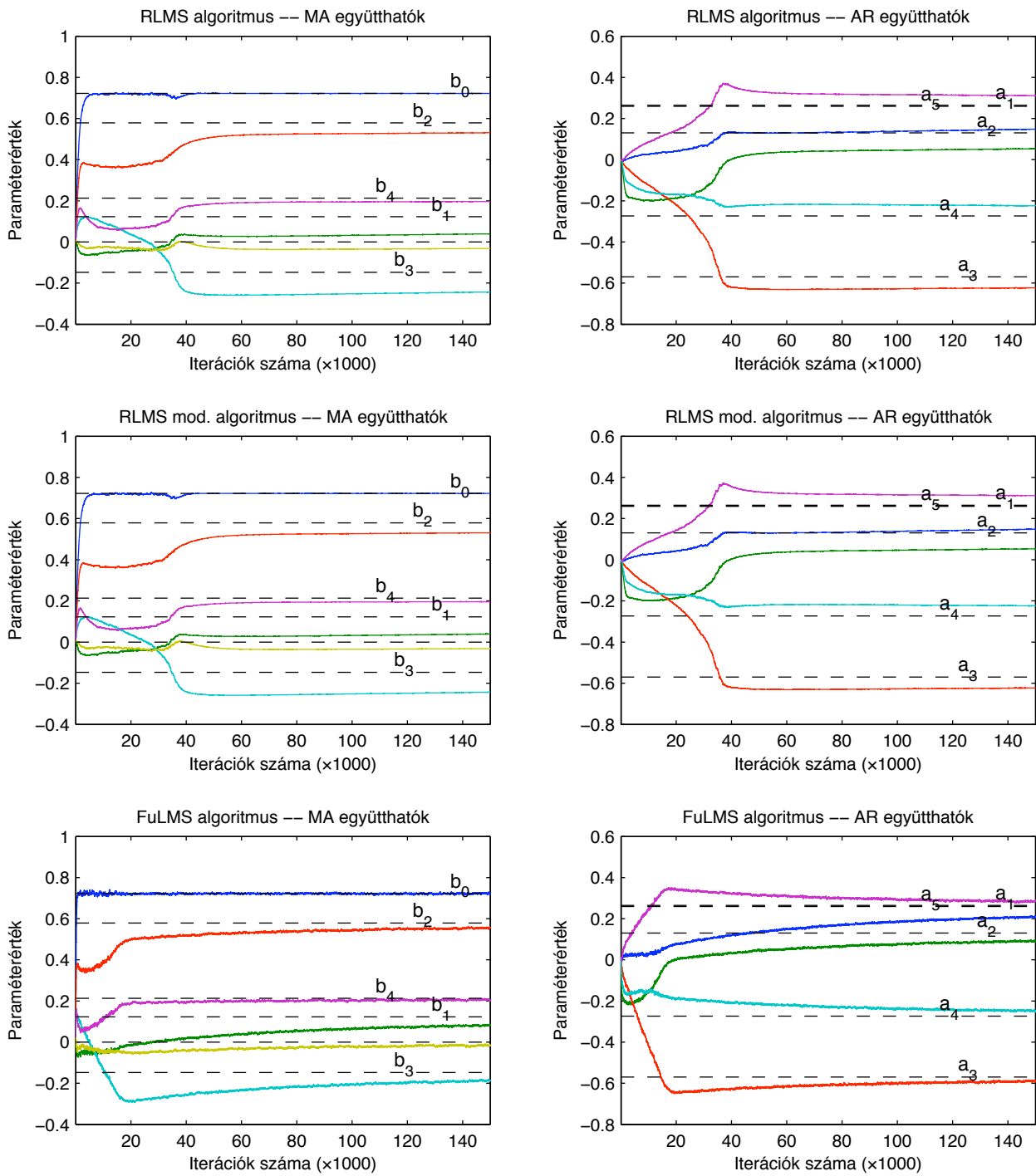
Algoritmus	$\mu / \lambda$	Konverg. (iteráció)	$\max \left  \frac{H(e^{j\omega})}{\hat{H}(e^{j\omega})} \right $ ( dB )	$\lim[\text{MSE}]$ (dB)
FuLMS	0.006	?	1.83	-18.6
RLMS	0.0009	?	0.23	-43.7
RLMS mod.	0.0009	?	0.23	-43.7
L-RLMS	0.0005	?	0.83	-33.8
PGL-RLMS	0.0003	?	4.85	-27.4
SPGL-RLMS	0.02	80000	0.00	-77.6
HARF	8	10000	0.00	$-\infty$
SHARF	0.008	?	0.19	-46.6
L-SHARF	0.003	?	1.15	-34.2
SL-SHARF	0.008	?	0.23	-45.2
SM	0.0085	?	0.18	-48.8
L-SM	0.0006	?	0.23	-47.0
SL-SM	0.002	?	0.35	-44.8
RLS	0.994	4000	0.00	$-\infty$
L-RLS	0.997	25000	0.00	$-\infty$
PGL-RLS	—	—	—	—
SPGL-RLS	—	—	—	—



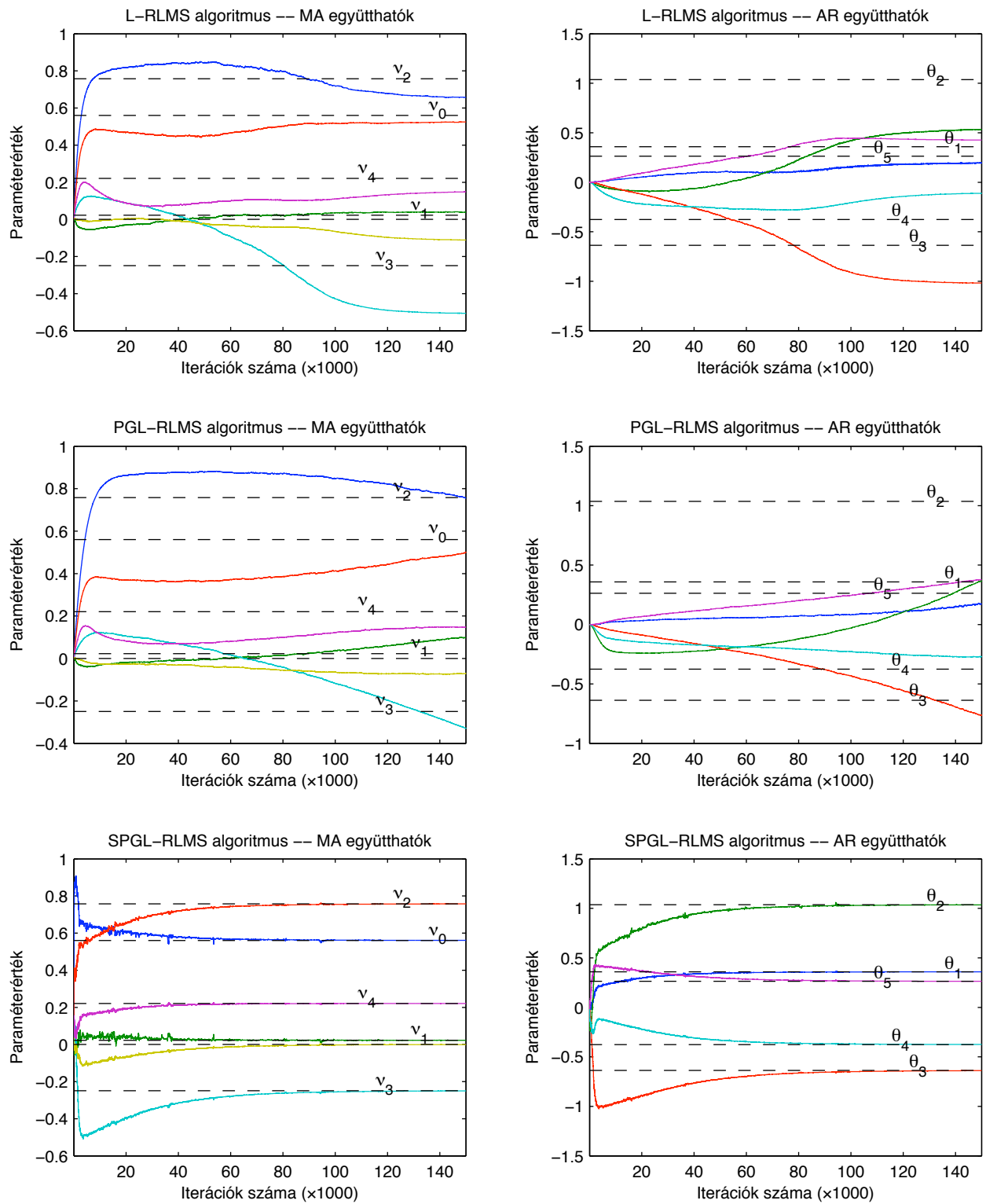
5.14. ábra.



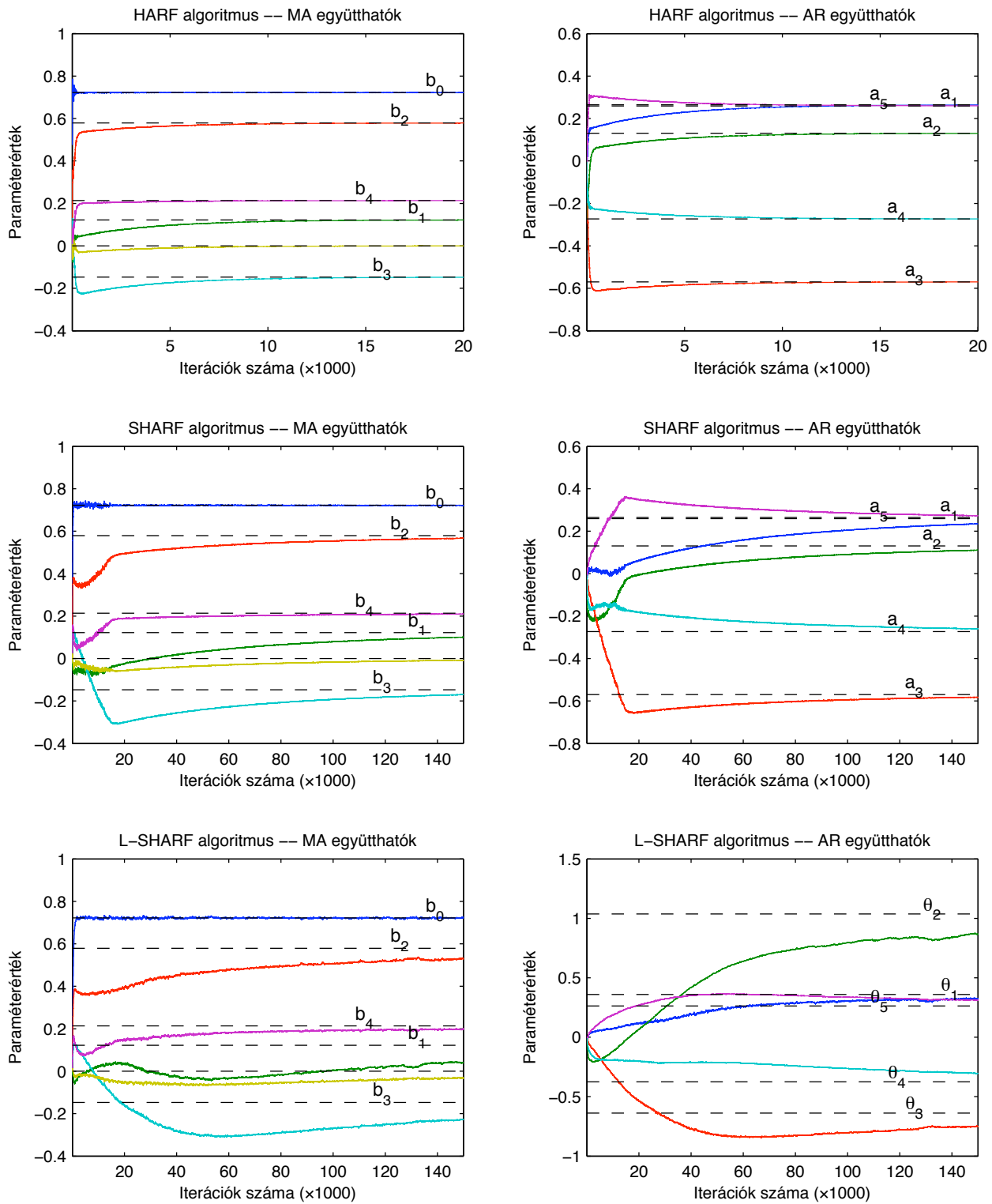
5.15. ábra.



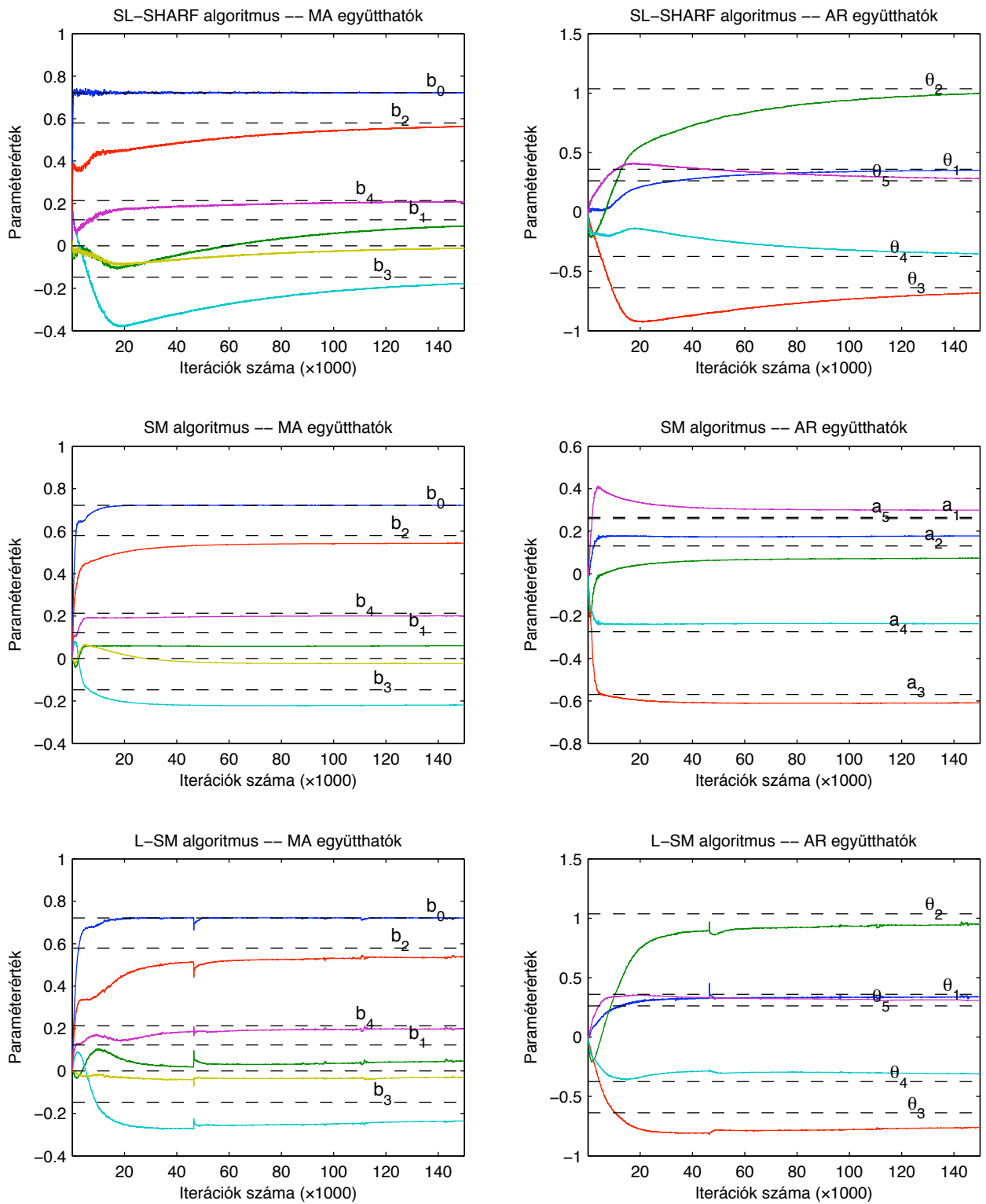
5.16. ábra.



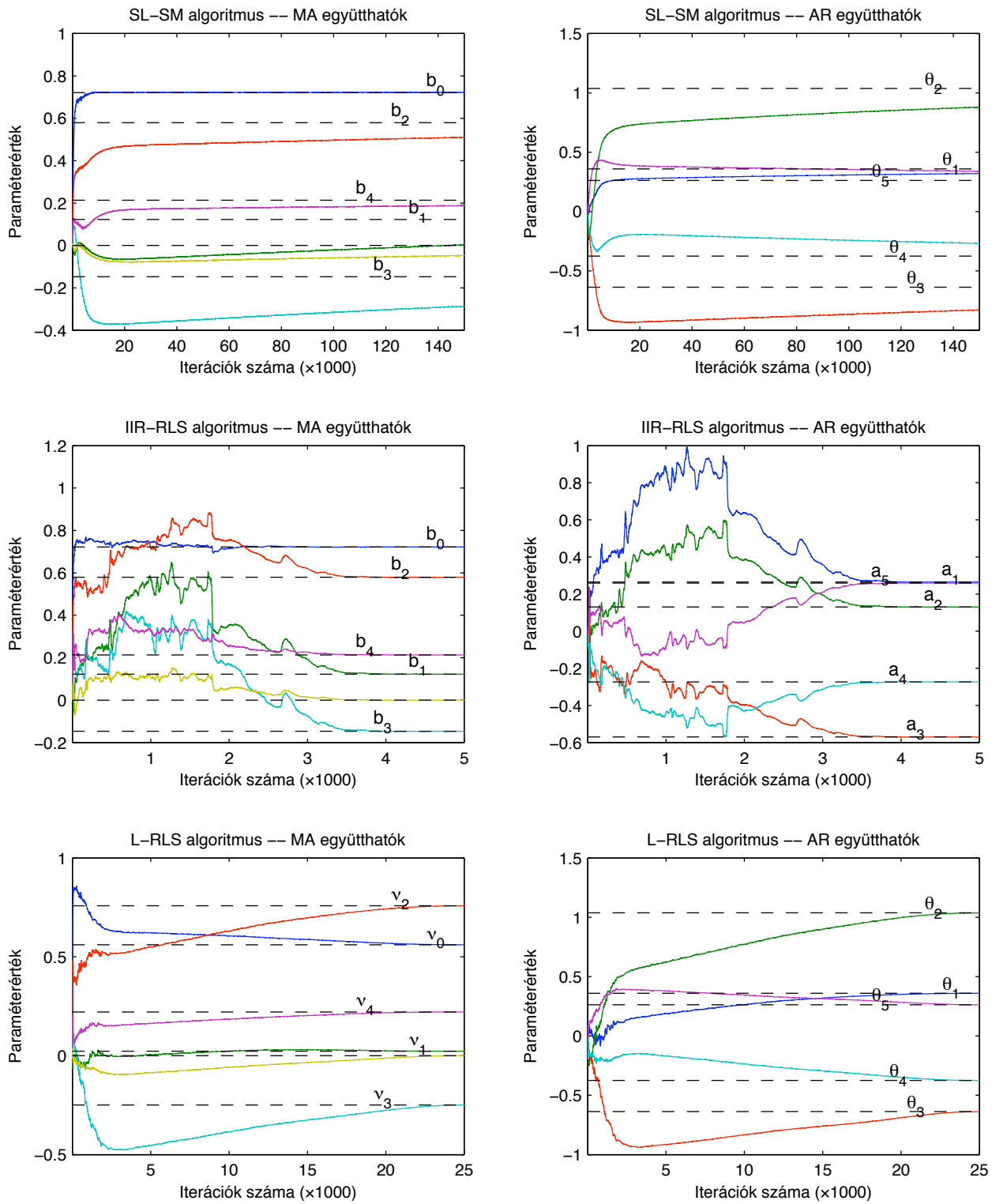
5.17. ábra.



5.18. ábra.



5.19. ábra.



5.20. ábra.



## 5.5. Aktív zajcsökkentés ( $F(z) = 0$ )

Az elsődleges zajút  $P(z)$  átviteli függvénye az identifikációban használt másodfokú függvény, megtoldva még 20 mintányi késleltetéssel:

$$P(z) = z^{-20} \frac{0.05z^{-1} - 0.04z^{-2}}{1 - 1.1314z^{-1} + 0.25z^{-2}}.$$

A beavatkozójel útjába iktatott  $S(z)$  átviteli függvény, ahogyan azt már korábban megelölegeztük, egy dinamikus hangszóró karakterisztikájának (durva) modellje. Az átviteli függvény egy nyolcadfokú IIR sáváteresztő szűrőt reprezentál, 150 Hz és 300 Hz törésponti frekvenciákkal (a grafikonokon szaggatott vonalak jelölik).  $S(z)$ -t az SPGL-RLS algoritmus segítségével egy ötödfokú IIR szűrővel approximáltuk (5.21. ábra): állandósult állapotban a MSE  $-31.0$  dB, a paramétervariancia  $(-65.8; -56.6)$  dB ( $\lambda = 0.999$ ). A 20 minta késleltetésre  $P(z)$ -ben a kauzalitási kritérium teljesülése miatt van szükség [1],  $S(z)$  ugyanis körülbelül ekkora késleltetést visz a beavatkozójel útjába.

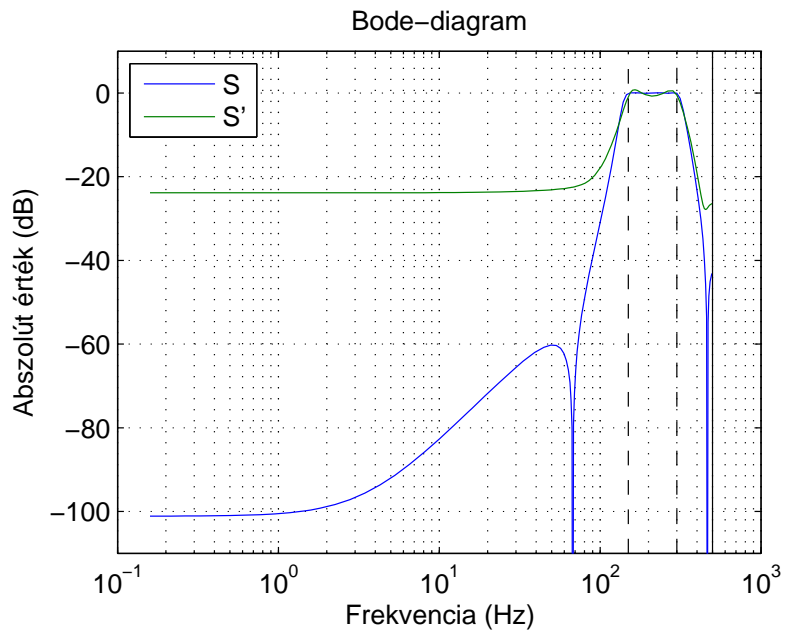
Az adaptív IIR szűrők  $M$  fokszámát 30-ra választottuk. A referenciajel 100 Hz és 400 Hz közé sávhatárolt fehér zaj. Additív, fehér  $n_v(n)$  mérési zaj miatt a szimulációk jel/zaj viszonya 40 dB ( $u(n)$ -re vonatkoztatva). Az iterációk száma 40000. FIR szűrőkkel való összehasonlítás céljából egy 60 tap-számú adaptív FIR szűrővel, az FxLMS algoritmust használva is elvégeztük a zajcsökkentési szimulációkat. Az RLS algoritmusokhoz a FASPIS sémát használtuk, amely valóban jobb konvergenciát biztosított, mint az egyszerű szűrt regresszoros (Fx) módszer.

Sem az FxLMS, sem az FuLMS (ill. HARF és SHARF) algoritmus konvergenciáját biztosító SPR feltétel nem teljesült maradéktalanul minden frekvencián (5.22-5.23. ábrák). Az FxLMS algoritmus esetében a kritérium csak a referenciajel spektrális tartományán kívüli frekvenciákra nem teljesül, ott is csak szűk sávban, különösebb akadály tehát nem várható a konvergenciát illetően. Az FuLMS és a hiperstabil algoritmusok az ábra alapján már problémásabbnak tűnnek: 170 Hz és 300 Hz között, pontosan a referenciajel frekvenciasávjában válik negatívvá a kritériumfüggvény. Szerencsére a szóban forgó algoritmusok a  $C(z) = 1$  választással is szépen konvergáltak, ellenben úgy tűnik, hogy 1 vezető együtthatójú  $C(z)$  kompenzálószűrő nem tervezhető, mely az SPR feltétel kielégülését a teljes frekvenciatartományban biztosítani tudná.

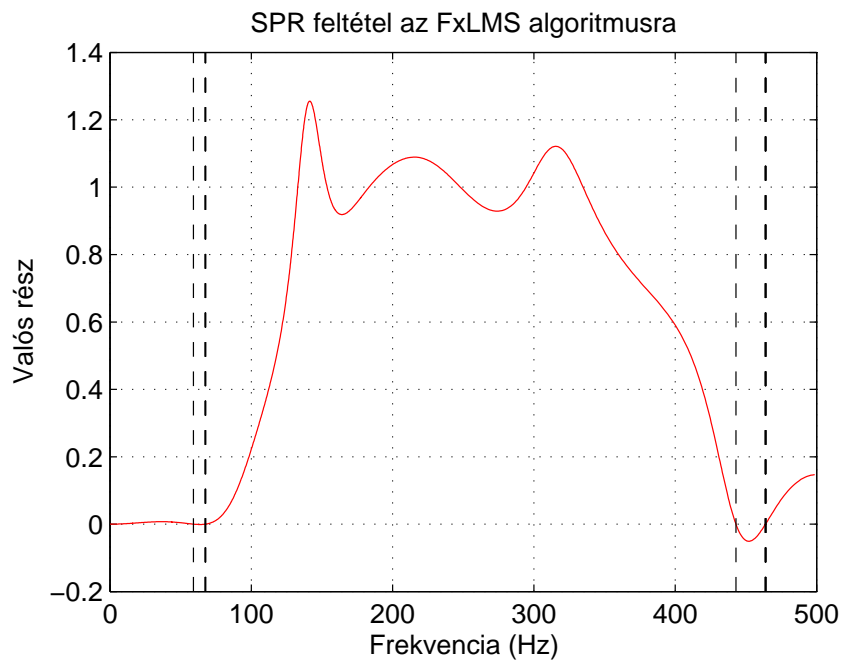
A  $\mu$  lépésközt és a  $\lambda$  felejtési tényezőt úgy törekedtünk megválasztani, hogy a zajcsökkenés mértéke és a konvergencia gyorsasága között harmonikus egyensúly alakuljon ki. A Full-Feedback algoritmust ( $L = 31$ ,  $M = 10$ ) fokszám összeállítással is kipróbáltuk ( $L$  és  $M$  most az adaptív szűrő MA és AR együtthatóinak számát jelölik; hacsak másként nem jelezzük,  $L = M$  érvényes). A Kautz-szűrőre kétféle pólus összeállítást készítettünk:

- az optimális változatban  $\hat{S}(z)$  zérusai és  $P(z)$  pólusai négy értékes jegy pontossággal szerepelnek, emellett 25 pólus kerül az origóba (az origóban lévő pólusok egy hagyományos transzverzális FIR szűrőtagot alkotnak);
- a szuboptimális változatban csak  $\hat{S}(z)$  zérusai szerepelnek, azok is kissé perturbálva; az origóban 20 pólus található (illetve az origó 20-szoros pólus).

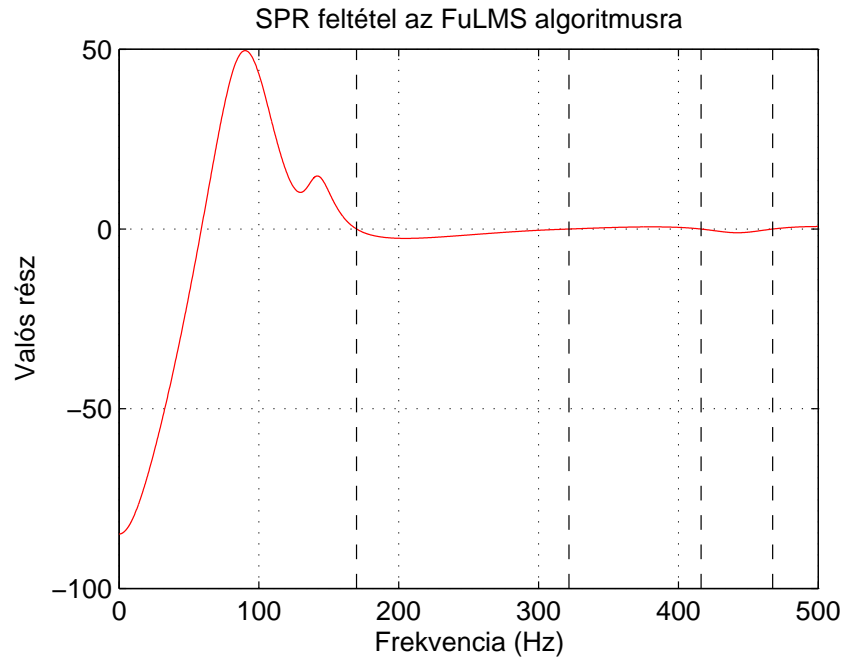
A szimulációs grafikonokat az 5.24-5.26. ábrák mutatják, az 5.3. táblázat pedig az adaptációs algoritmusok paramétereit és a numerikus eredményeket tartalmazza.



5.21. ábra.  $S(z)$  és ötödfokú IIR approximánsa,  $\hat{S}(z)$  Bode-diagramja.



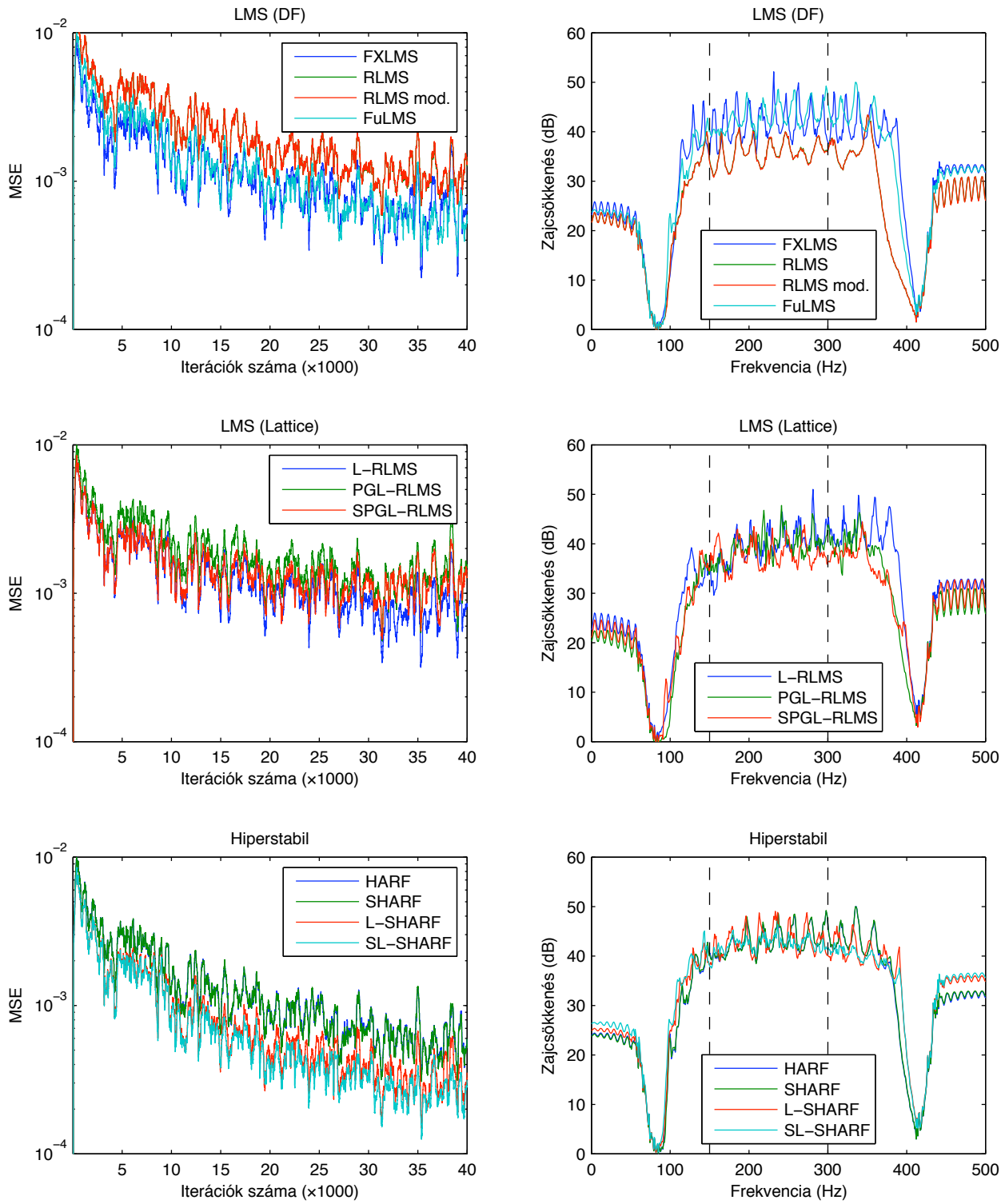
5.22. ábra. Az SPR kritériumfüggvény értéke az FxLMS algoritmusra (a szaggatott vonalak az abszcissa tengelymetszeteket jelölik).



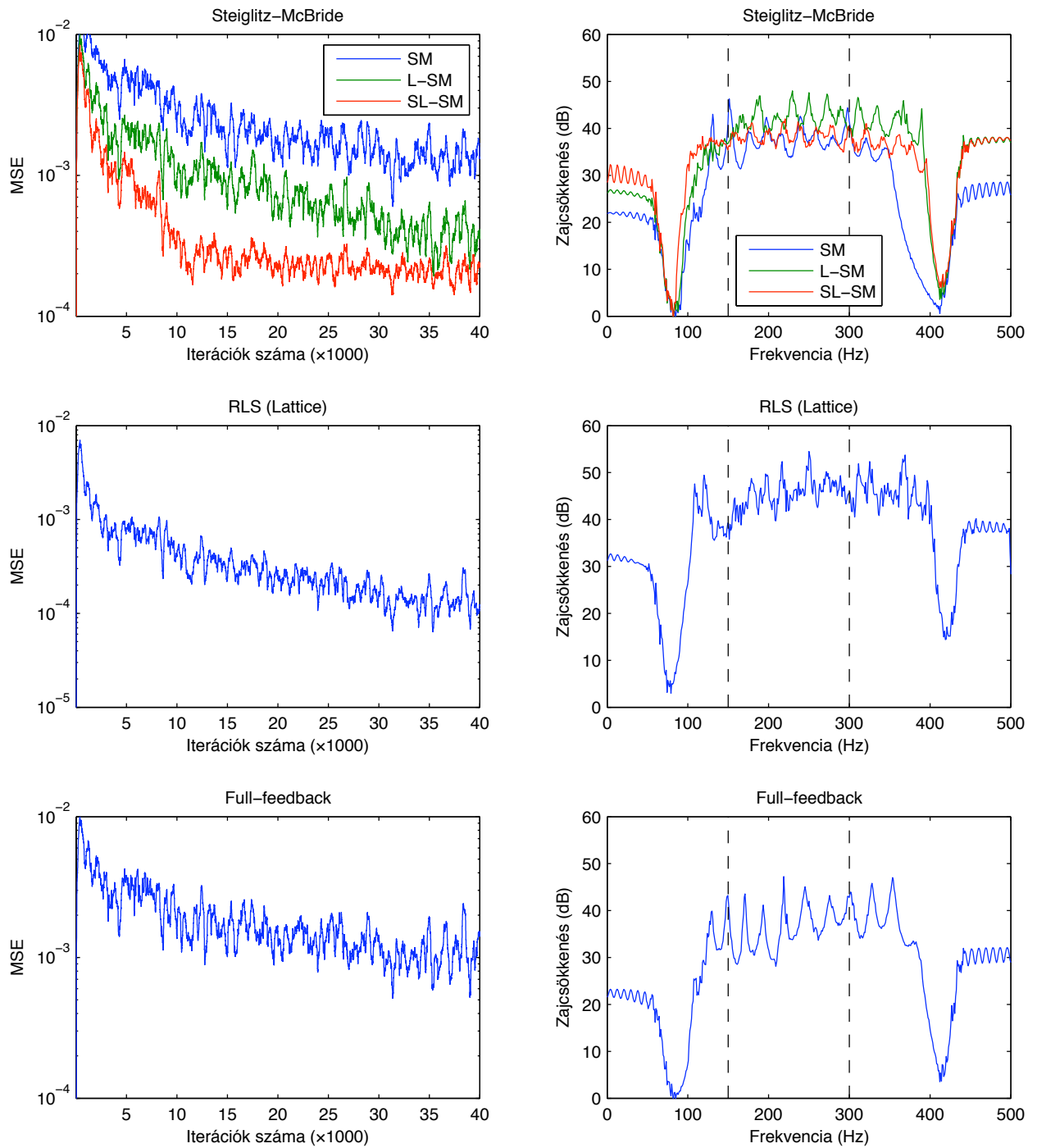
5.23. ábra. Az SPR kritériumfüggvény értéke az FuLMS algoritmusra (a szaggatott vonalak az abszcissa tengelymetszeteket jelölik).

5.3. táblázat. Aktív zajcsökkentés ( $F(z) = 0$ )

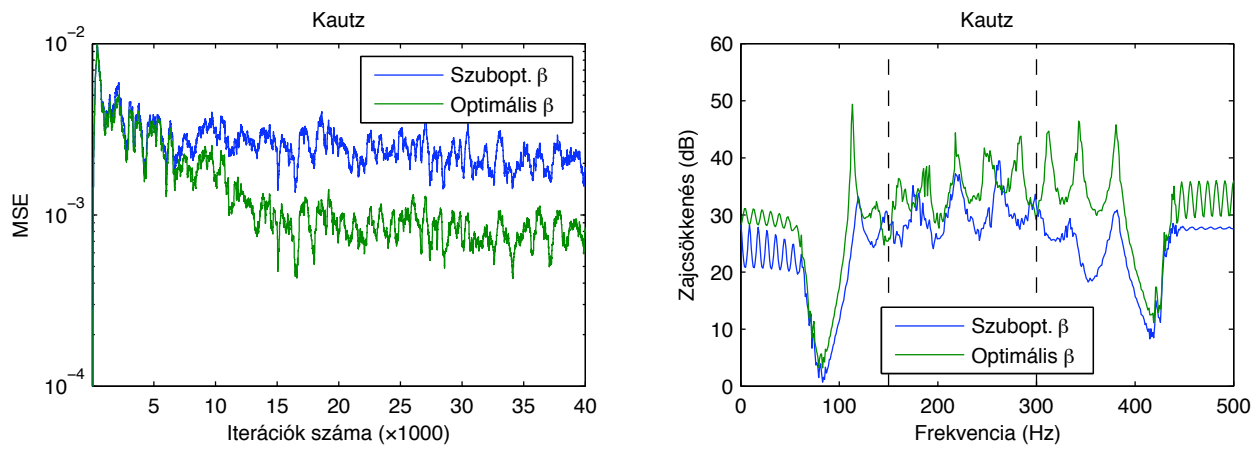
Algoritmus	$\mu / \lambda$	$\lim[\text{MSE}]$ (dB)	Zajcsökkenés (min-max) (dB)
FxLMS	0.005	-31.9	40 (40-45)
FuLMS	0.002	-32.6	43 (40-47)
RLMS	0.0007	-29.6	35 (35-40)
RLMS mod.	0.0007	-29.6	35 (35-40)
L-RLMS	0.005	-30.7	40 (35-50)
PGL-RLMS	0.002	-28.7	40 (35-47)
SPGL-RLMS	0.005	-28.8	37 (35-43)
HARF	0.002	-32.8	43 (40-50)
SHARF	0.002	-32.6	43 (40-50)
L-SHARF	0.005	-35.2	43 (40-47)
SL-SHARF	0.005	-35.5	41 (40-45)
SM	0.004	-29.5	37 (35-45)
L-SM	0.002	-34.3	43 (40-47)
SL-SM	0.005	-36.8	37 (35-42)
RLS	—	—	—
L-RLS	0.9999	-39.2	45 (40-55)
FFB-RLMS	0.0008	-28.5	37 (35-47)
( $M = 10$ )	0.002	-28.7	37 (30-47)
Kautz	0.005	-26.2	30 (22-40)
(optimális $\beta$ )	0.005	-29.8	35 (35-47)



5.24. ábra.



5.25. ábra.



5.26. ábra.

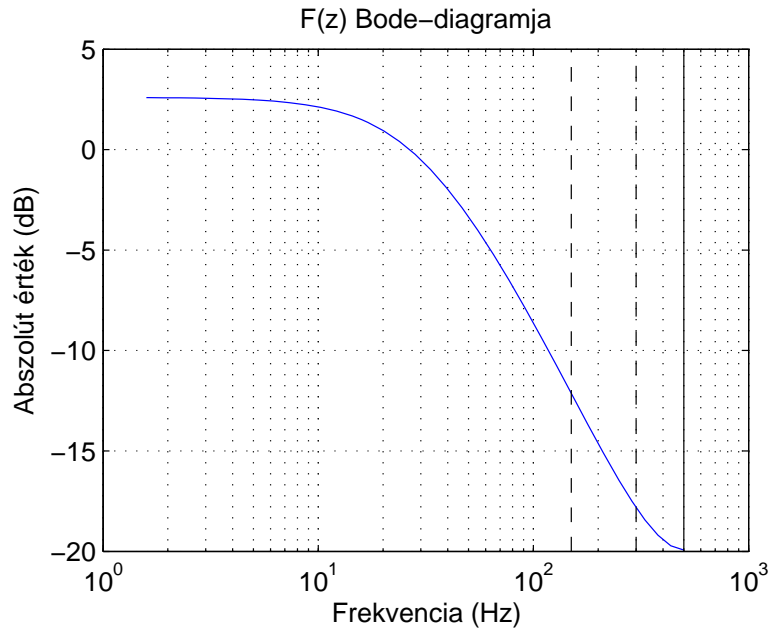
## 5.6. Aktív zajcsökkentés ( $F(z) \neq 0$ )

A beavatkozójel most visszacsatolódik a referenciajelbe, a visszacsatolás átviteli függvénye (5.27. ábra)

$$F(z) = 0.2 \cdot z^{-20} \frac{1 - 0.2z^{-1}}{1 - 1.1314z^{-1} + 0.25z^{-2}}.$$

Kompenzációt nem alkalmazunk, tehát  $\hat{F}(z) = 0$ . Minden más paraméterre és megfontolásra az előző szimulációban említettek érvényesek. A szimulációsorozatba minden algoritmuscsoportból csak azokat az variánsokat vontuk be, melyek a visszacsatolás-mentes ANC szimulációban mutatott teljesítményük alapján további vizsgálatra érdemesnek bizonyultak.

A szimulációs grafikonokat az 5.28-5.29. ábrák mutatják, az 5.4. táblázat pedig az adaptációs algoritmusok paramétereit és a numerikus eredményeket tartalmazza.

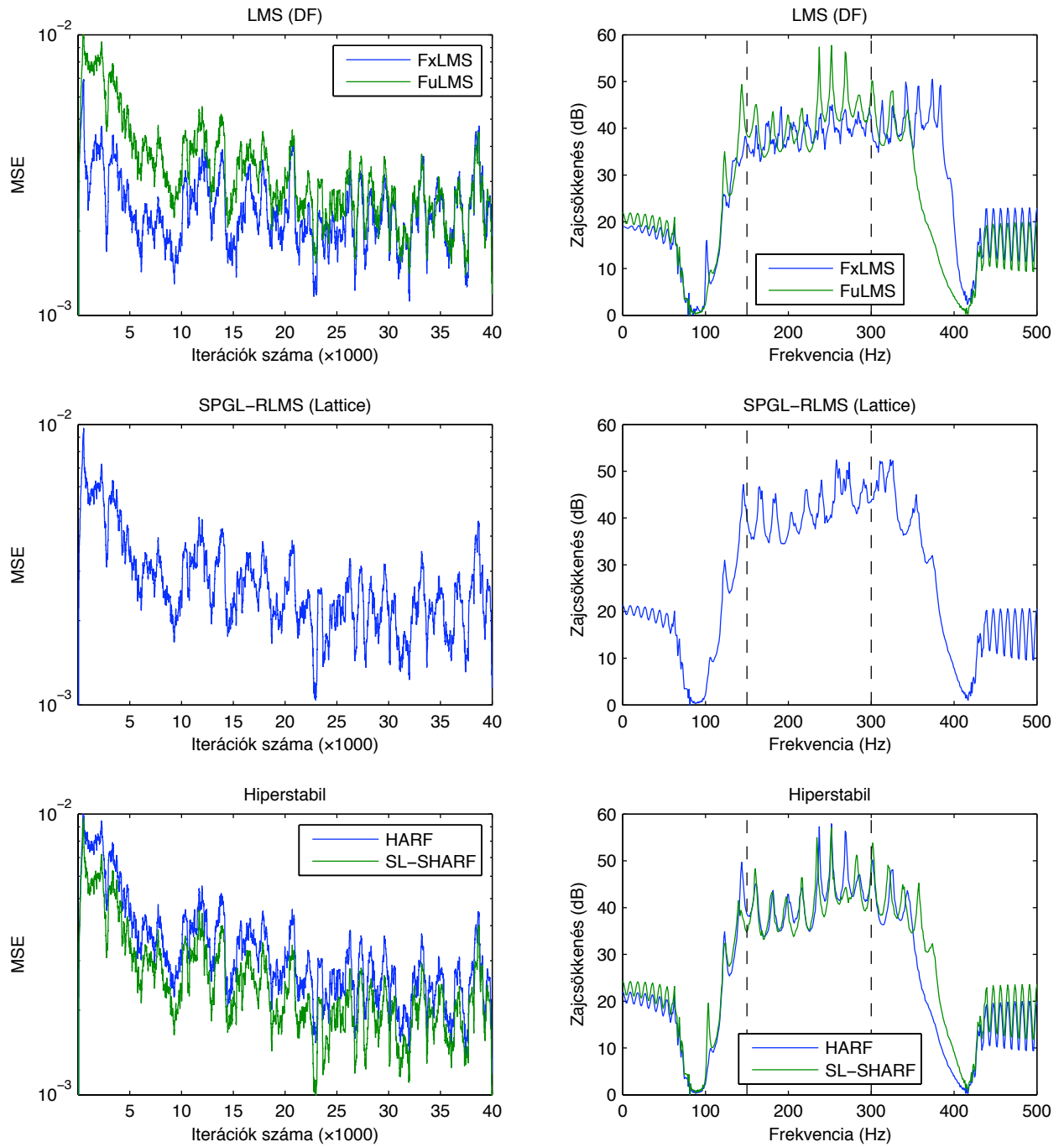


5.27. ábra. A másodlagos zaj  $F(z)$  akusztikus visszacsatolásának átvitele Bode-diagramon.

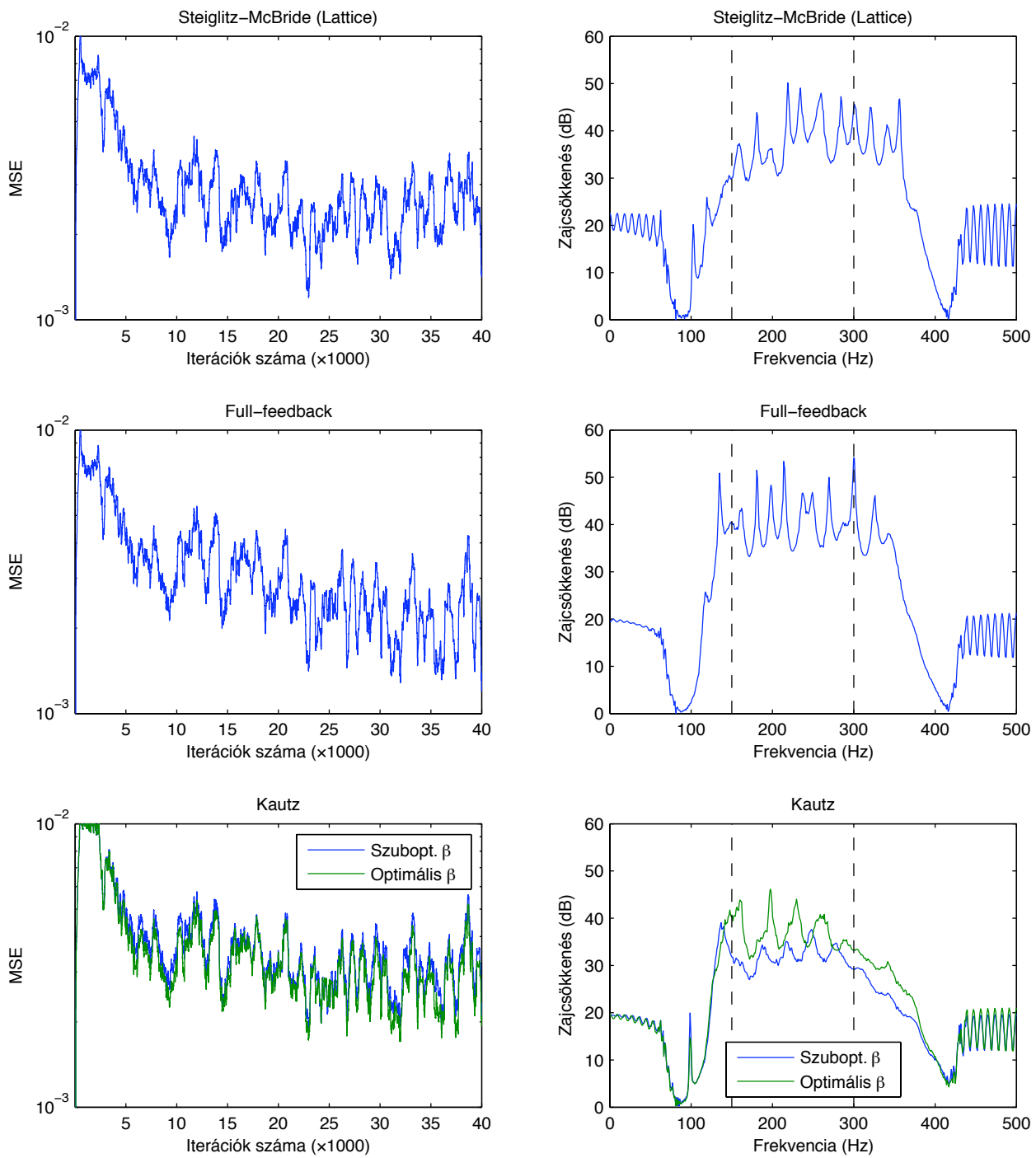
5.4. táblázat. Aktív zajcsökkentés ( $F(z) \neq 0$ )

Algoritmus	$\mu / \lambda$	$\lim[\text{MSE}]$ (dB)	Zajcsökkenés (min–max) (dB)	$\approx$ Beállítás (iteráció)
FxLMS	0.005	–30.3	40 (35-50)	6000
FuLMS	0.0004	–31.2	40 (35-57)	10000
SPGL-RLMS	0.001	–31.3	42 (35-52)	6000
SL-SHARF	0.001	–30.9	40 (35-57)	6000
HARF	0.0004	–31.2	42 (35-57)	10000
L-SM	0.0005	–30.2	37 (30-50)	10000
L-RLS	—	—	—	—
FFB-RLMS	0.0005	–31.5	40 (35-55)	9000
	0.001	–32.2	37 (35-45)	9000
Kautz (optimális $\beta$ )		–29.7	30 (25-37)	9000
	0.001	–30.9	35 (30-45)	9000





5.28. ábra.



5.29. ábra.

## 5.7. Következtetések

A prezentált táblázatok és grafikonok segítségével az algoritmusok közötti jó néhány fontos különbségre figyelhetünk fel. Kirajzolódnak bizonyos tendenciák, főképpen az algoritmus csoportok között, de az is jól látszik, hogy a feladatok jellegétől és paramétereitől függően akár gyökeresen eltérő képet is kaphatunk a különböző adaptív szűrők egymáshoz viszonyított viselkedéséről. Fontos kitérnünk a robusztusság kérdésére is, mivel fizikai implementációkban ez fokozott jelentőségű. A szimulációkban lehetőségünk van különböző beállításokkal kísérletezni, a körülményeknek megfelelő optimális paramétereket belőni, azonban egy valós – aktív zajcsökkentési – szituációban kevés *a priori* ismeret állhat a rendelkezésünkre, ráadásul  $S(z)$ ,  $F(z)$  és  $P(z)$  menet közben meg is változhat. A robusztus tervezés témakörével részletesebben Mosquera [6] foglalkozik, a szimulációk kapcsán most csak az adaptív szűrő lépésköze (ill. felejtési tényezője) megválasztásának részproblémájára koncentrálnak.

Egyes algoritmusok érzékenyebbek voltak a  $\mu$  lépésköz értékére, mint mások. Tipikusan a legtöbb közelítést tartalmazó, legegyszerűbb felépítésű algoritmusok, így az FuLMS, SPGL-RLMS, SHARF és SL-SHARF bizonyultak a leginkább robusztusnak: a konvergenciát minden feladatban könnyű volt elérni velük, nagy adaptációs lépésköz mellett is, a referenciajeltől függetlenül, stabilak maradtak és nagy zajelnyomást (ill. kis paramétervarianciát) produkáltak. Az RLS algoritmusok ebből a szemszögből nézve igen gyengén vizsgáztak:  $\lambda$  megválasztása rendkívül kritikus, az ANC szimulációkban pl. négy tizedes pontosságot igényelt, a konvergencia pedig érzékeny a referenciajelre, sőt nem is mindig biztosítható pusztán a felejtési tényező állításával. Kár, mert ez az algoritmuscsalád – konvergencia esetén – minden más tekintetben a legjobb teljesítményt produkálta a szimulációk során.

A sztochasztikus gradiens algoritmuscsalád tagjai közül az FuLMS és az SPGL-RLMS algoritmus emelkedett ki gyors konvergenciájával, jó modellezési képességével és a már említett robusztusságával. ANC rendszerekben a szimulációk szerint kiválóan megállják a helyüket. Az SPGL-RLMS algoritmus visszacsatolt beavatkozójel jelenlétében az FxLMS algoritmust túlszárnyaló zajcsökkenést realizál – hála a rekurzív modellnek –, a konvergencia sebessége pedig a két algoritmusra gyakorlatilag megegyezik 5.28. Szintén az SPGL-RLMS volt az az egyetlen algoritmus a családból, amely az ötödfokú rendszer identifikációjában is jól szerepelt. Az algoritmusban alkalmazott közelítések miatt, egyes esetekben, a többi gradiens lattice variánshoz képest valamivel nagyobb aszimptotikus MSE-t produkálhat, azonban a kedvező konvergenciatulajdonságok a szimulációkban ezt ellensúlyozni látszanak. Másrészt a direkt formájú RLMS variánsok, a kapott eredmények alapján nem számíthatnak túl nagy sikerre a fizikai implementációkban.

A hiperstabil algoritmuscsalád tagjaiból a direkt formájú változatok aktív zajcsökkentésben már bizonyították helytállásukat [8]. A lattice variánsok ehhez képest kicsivel gyorsabb konvergenciát és nagyobb zajelnyomást ígérnek. Zajmentes identifikációra egyértelműen a HARF a legjobb választás, feltéve, hogy a  $C(z)$  kompenzálószűrő tervezése megoldott. Az elmélettel összhangban a lépésköz tetszőlegesen nagy lehet, határt csak a numerikus problémák szabnak neki. Aktív zajcsökkentéshez nem érdemes használni, mert a SHARF kevesebb számítással is hasonló teljesítményt produkál (a kis  $\mu$  lépésköz miatt). Az SL-SHARF és az L-SHARF viszonyára ugyanúgy érvényes, hogy a közelítésekből adódó modellezési pontatlanságot a kedvező konvergenciatulajdonságok – és persze a kisebb számításigény – kompenzálják.

A Steiglitz-McBride család algoritmusai a szimulációk alapján alkalmasnak tűnnek ANC rendszerekben való sikeres felhasználásra. A konvergencia a lattice változatokban egyenletes és gyors, a zajelnyomási képesség még a szaggatott vonallal jelölt sávszéleken kívül is jó. Az SL-SM és az L-SM változat közül papírforma szerint az előbbi gyorsabban konvergál, az utóbbi a zajcsökkentésben hatékonyabb. A grafikonok alapján az alkalmazás kompromisszumainak mértéke megítélhető.

Az L-RLS algoritmus aktív zajcsökkentésben csak tiszta referenciajellel ( $F(z) = 0$ ) konvergált, az IIR-RLS még így sem. A FASPIS séma adott  $\lambda$  mellett képes volt stabilizálni az adaptív szűrőt, alkalmazása tehát mindenképp javallott. Kisebb rekurzív fokszámmal is jól teljesített a Full-Feedback struktúra a visszacsatolás-mentes szimulációban, ami az elméletileg várt modellezési előnyöket alátámasztotta [16]. Az algoritmus egyébként az FuLMS-hez hasonlóan viselkedett, és igen robusztusnak bizonyult: a második ANC szimulációban a konvergencia  $\mu = 0,001$  lépésközzel is gond nélkül megmaradt.

A Kautz-szűrő rendelkezik az adaptív FIR szűrők minden kedvező konvergencia- és stabilitási tulajdonságával, azonban a zajelnyomás mértékét tekintve sok múlik a pólusok megválasztásán (5.26. és 5.29. ábra). A szűrő a szimulációkban csak fix lépésköz mellett volt hajlandó konvergálni, bár kvázi-identifikációs problémákban az NLMS adaptációs algoritmus sokkal gyorsabb paraméter beállást eredményezett, mint fix lépésközű megfelelője.

## 6. fejezet

### Utószó

A dolgozatban áttekintettük az adaptív IIR szűrés elméleti hátterét, az identifikáció és az approximáció problematikáját. Foglalkoztunk a szűrőstruktúrák és az adaptációs algoritmusok tulajdonságaival, és szimulációk segítségével próbáltuk értékelni a tárgyalt adaptív IIR szűrők aktív zajcsökkentésben való használatának potenciális lehetőségeit. Jó néhány kérdésünkre legalább részben választ kaptunk, de természetesen rengeteg nyitott kérdés maradt még, amely további vizsgálódás tárgya lehetne. Néhányat említünk ezek közül.

Az IIR RLS algoritmusok aktív zajcsökkentésben mutatott teljesítménye bizalomgerjesztő, ám a stabilitási problémákat valahogyan orvosolni kellene ahhoz, hogy egy robusztus, a gyakorlatban is jól működő adaptív szűrőt nyerjünk. A robusztusság igénye a többi algoritmuscsaláddal kapcsolatban is felmerül. Bár a normalizált lattice szűrők strukturálisan stabilak, jó volna a lépésköz – akár dinamikus – megválasztásába valamilyen intelligenciát integrálni, hogy a konvergencia lehetőleg minden külső körülmény mellett bekövetkezzen.

További kérdés, hogy milyen a tárgyalt adaptív szűrők követési képessége. Elképzelhetők olyan ANC alkalmazások is, amelyekre erősen nemstacioner külső környezet a jellemző, amikor is a követés gyorsasága és megbízhatósága első számú követelménnyé léphet elő. Más szituációkban az  $S(z)$  másodlagos út az, ami idővariáns viselkedést mutat. A szűrt regresszoros (Fx) ANC sémák zajcsökkentési teljesítménye függ az  $\hat{S}(z)$  approximáns jóságától. Vizsgálható lenne, hogy a megismert adaptív szűrők esetében milyen erős ez a függés.

Az aktív zajcsökkentésben sikerrel alkalmazott, ígéretes algoritmusok között mindenképp említést érdemelnek a dolgozatban nem tárgyalt fuzzy, neurális és genetikus módszerek [27], [28], [29], [30], [31]. A modellezett akusztikus és mechanikus rendszerek nemlinearitásai bizonyos helyzetekben nem hagyhatók figyelmen kívül. Tipikus példa erre a dinamikus hangszórók esete, amelyek terhelhetőségük maximumához közeledve erőteljesen nemlineáris viselkedést kezdenek mutatni. Minden akusztikai zajcsökkentő rendszer másodlagos útjában egy dinamikus hangszóró található, melynek inverz modellje részét képezi az adaptív szűrő által modellezendő dinamikus rendszernek. Neurális hálókkal és fuzzy-szabályzókkal sikeresen modellezhetjük az ismeretlen rendszerben fellelhető nemlinearitásokat, ezáltal csökkenthető az ANC implementáció reziduális hibája. A genetikus keresési algoritmusokkal lehetőség nyílik egy multimodális költségfüggvény globális minimumhelyének megtalálására [27], [31], mely sztochasztikus gradiens módszerekkel nem lehetséges. További előnyök is felhozhatók a fenti módszerek mellett, mint pl. robusztusság, egyszerű fel-

építés, olcsó és gyors implementáció. A szimulációs eredmények biztatóak, érdemes volna részletesebb összehasonlító vizsgálatot folytatni a klasszikus IIR algoritmusok és az új módszerek között.

# Irodalomjegyzék

- [1] S. M. Kuo, D. R. Morgan, *Active Noise Control: A Tutorial Review*, Proc. IEEE, vol. 87, pp. 941-973, June 1999
- [2] D. R. Morgan, *An Analysis of Multiple Correlation Cancellation Loops with a Filter in the Auxiliary Path*, IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol. ASSP-28, pp. 454-467, August 1980
- [3] S. M. Kuo, D. R. Morgan, *Active Noise Control Systems (Algorithms and DSP Implementations)*, John Wiley & Sons (Wiley Series in Telecom. and Signal Proc.), 1995
- [4] B. Widrow, S. D. Stearns, *Adaptive Signal Processing*, Prentice-Hall (Prentice-Hall Signal Proc. Series), Engelwood Cliffs, N.J., 1985
- [5] P. A. Regalia, *Adaptive IIR Filtering in Signal Processing and Control*, Marcel Dekker, New York, 1995
- [6] C. Mosquera, *Relaxation of the SPR Condition with Application to the Convergence of Adaptive Recursive Algorithms*, Ph.D. thesis, Universidade de Vigo, Spain, July 1998
- [7] L. J. Eriksson, M. C. Allie, R. A. Greiner, *The Selection and Application of an IIR Adaptive Filter for use in Active Sound Attenuation*, IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol. ASSP-35, pp. 433-437, April 1987
- [8] C. Mosquera, J. A. Gómez, F. Pérez, M. Sobreira, *Adaptive IIR Filters for Active Noise Control*, presented at the 6<sup>th</sup> Int. Congress on Sound and Vibration, Copenhagen, Denmark, 5-8 July, 1999, pp. 1571-1582
- [9] A. V. Oppenheim, R. W. Schaffer, *Discrete-Time Signal Processing*, Prentice-Hall International (Prentice-Hall Signal Processing Series), London, 1989
- [10] D. K. Wise, *A Tutorial on Performance Metrics and Noise Propagation in Digital IIR Filters*, AES Convention Paper 5470, Presented at the 111<sup>th</sup> Convention, New York, NY, USA, September 2001
- [11] T. Paatero, M. Karjalainen, *Kautz Filters and Generalized Frequency Resolution: Theory and Audio Applications*, Journal of the Audio Engineering Society, vol. 51, no. 1/2, pp. 27-44, January/February 2003

- [12] T. Paatero, *Modeling of Long and Complex Responses Using Kautz Filters and Time-Domain Partitions*, Proceedings of 12th European Signal Processing Conference (EUSIPCO 2004), pp. 313–316, 2004
- [13] L. S. H. Ngia, F. Gustafsson, *Using Kautz filter for Adaptive Acoustic Echo Cancellation*, Conf. Record of the 33. Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers, vol. 2, pp. 1110–1114, 1999
- [14] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, Prentice-Hall International (Prentice-Hall Information and System Sciences Series), London, 1991
- [15] P. L. Feintuch, *An Adaptive Recursive LMS Filter*, Proc. IEEE, pp. 1622–1624, November 1976
- [16] D. H. Crawford, R. W. Stewart, E. Toma, *A Novel Adaptive IIR Filter for Active Noise Control*, IEEE Proc. on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP-96, vol. 3, pp. 1629–1632, May 1996
- [17] J. Yuan, *Adaptive Laguerre Filters for Active Noise Control*, Applied Acoustics, vol. 68, no. 1, pp. 86–96, 2007
- [18] P. S. R. Diniz, *Adaptive Filtering (Algorithms and Practical Implementation)*, Springer, New York, 2008
- [19] R. Merched, A. H. Sayed, *Order-Recursive RLS Laguerre Adaptive Filtering*, IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 48, no. 11, pp. 3000–3010, November 2000
- [20] R. W. Jones, B. L. Olsen, B. R. Mace, *Comparison of Convergence Characteristics of Adaptive IIR and FIR Filters for Active Noise Control in a Duct*, Applied Acoustics, Applied Acoustics, vol. 68, no. 4, pp. 729–738, 2007
- [21] X. Sun, G. Meng, *Steiglitz–McBride Type Adaptive IIR Algorithm for Active Noise Control*, Journal of Sound and Vibration, vol. 273, no. 7, pp. 441–450, 2004
- [22] X. Sun, D.-S. Chen, *A New Infinite Impulse Response Filter-Based Adaptive Algorithm for Active Noise Control*, Journal of Sound and Vibration, vol. 258, no. 2, pp. 385–397, 2002
- [23] F. Pérez-González, R. López-Valcarce, *Misconvergence and Stabilization of Adaptive IIR Lattice Filters*, IEEE Proc. on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2000. ICASSP '00, vol. 1, pp. 65–68, June 2000
- [24] R. López-Valcarce, C. Mosquera, F. Pérez-González, *Hyperstable Adaptive IIR Algorithms with Polyphase Structures: Analysis and Design*, IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 47, no. 7, pp. 2043–2046, July 1999
- [25] C. R. Johnson, Jr., *A Convergence Proof for a Hyperstable Adaptive Recursive Filter*, IEEE Trans. on Information Theory, vol. 25, pp. 745–749, November 1979



- [26] M. P. Nowak, B. D. Van Veen, *A Constrained Transform Domain Adaptive IIR Filter Structure for Active Noise Control*, IEEE Trans. on Speech and Audio Processing, vol. 5, no. 4, pp. 334–347, July 1997
- [27] K. H. Jim, J. B. Kim, T. P. Lee, D. S. Ahn, *Genetic Adaptive IIR Filtering Algorithm for Active Noise Control*, 1999 IEEE International Fuzzy Systems Conference Proceedings, vol. 3, pp. 1723–1728, 1999
- [28] Q.-Z. Zhang, W.-S. Gan, Y.-L. Zhou, *Adaptive Recurrent Fuzzy Neural Networks for Active Noise Control*, Journal of Sound and Vibration, vol. 296, no. 3, pp. 935–948, 2006
- [29] Q.-Z. Zhang, W.-S. Gan, *Active Noise Control Using a Simplified Fuzzy Neural Network*, Journal of Sound and Vibration, vol. 272, no. 3, pp. 434–449, 2004
- [30] J. M. Sousa, C. A. Silva, J. M. G. Sá da Costa, *Fuzzy Active Noise Modeling and Control*, International Journal of Approximate Reasoning, vol. 33, pp. 51–70, 2003
- [31] A. Kalinli, N. Karaboga, *A New Method for Adaptive IIR Filter Design Based on Tabu Search Algorithm*, International Journal of Electronics and Communications, vol. 59, pp. 111–117, 2005



# A. Függelék

## Példa az *ANCsim* környezet használatára

Az alábbi egyszerű szimulációs m-script file-t fogjuk futtatni, és megmutatjuk, hogy milyen szöveges outputot és ábrákat generál a program. Az ábrák mennyiségét és típusát az ún. profilok határozzák meg, melyeket az `ancdisp2` m-függvényben előre definiáltunk. A profilok a felhasználó által bővíthetők és újak is létrehozhatók, de a már definiált profilok is szinte minden ANC és identifikációs feladat nyomon követésére alkalmasak. Egy `'ident'` nevű profil kifejezetten az identifikációs problémákhoz készült, képes többek között megjeleníteni a szűrőegyütthetők trajektóriáit. A másik két profil (`'sim'` és `'full_sim'`) ANC szimulációkra szolgál, idő- és frekvenciatartományban egyaránt készítenek ábrákat; a legösszetettebb a `'full_sim'` profil, ennek ábráit tartalmazzák a screenshotok (A.1. és A.2. ábra), azokkal a méretekkel és elrendezéssel, ahogy a szimulátor elkészítette őket. Mivel nem fért el minden ábra egymás mellett a képernyőn, ezért a második screenshoton (A.2. ábra) a takarásban lévőket hoztuk előtérbe.

```
%% ANCSim példa m-script
%% Inicializálás
clear all;
close all;
N = 10000;
fs = 1000;
x = randn(N,1);

% 10-edfokú elliptikus aluláteresztő (fc = 0.2*fs/2);
[num,den] = ellip(10,0.1,50,0.2);
input = filter(num,den,x);

%% Átviteli függvények
Pz = 'z^-20';
Sz = '(z^2-0.4164*z+1.2346)/(z^2+0.6627*z+0.6414)';
Shatz = '(.98*z^2-0.4*z+1)/(z^2+0.7*z+0.65)';

%% Szimuláció
ancsim(input,...           % referencijel (+mérési zajok)
        Pz,...             % P(z)
```

```

Sz,...           % S(z)
'FuLMS',...     % algoritmus
'Shatz',Shatz,... % S(z) approximánsa
'L',32,...      % L (ahol értelmezett)
'M',32,...      % M
'mu',0.01,...   % az MA együtthatók lépésköze
'mu2',0.01,...  % az AR együtthatók lépésköze(i)
'wInit',{0,0},... % a szűrőegyütthatók kezdeti értéke
'Fz','0.5+0.1*z^-2',... % F(z)
'Fhatz',{0.5 1},... % F(z) approximánsa
'noOptTf',...   % nem használunk opcionális
'fs',fs,...     % átviteli függvényeket
'profile','full_sim');

```

A futás közben generált output (Command Window):

```

<<<<<<<<<< ANC simulation parameters >>>>>>>>>

                type: 'feedforward'
            channels: [1 1 1]
secondaryPathModeling: 'offline'
                domain: 'time'

***** Primary path *****

P(z) =

z^-20

***** Secondary path *****

S(z) =

1 - 0.4164 z^-1 + 1.2346 z^-2
-----
1 + 0.6627 z^-1 + 0.6414 z^-2

***** Secondary path estimate *****

Shatz(z) =

0.98 - 0.4 z^-1 + z^-2
-----
1 + 0.7 z^-1 + 0.65 z^-2

***** Feedback path *****

F(z) =

```

0.5 + 0.1 z<sup>-2</sup>

\*\*\*\*\* Feedback path estimate \*\*\*\*\*

Fhat(z) =

0.5

Algorithm: FuLMS

Input: 10000 samples

L = 32

M = 32

mu = 0.01

mu2 = 0.01

Initial weight vector: w0 = zeros

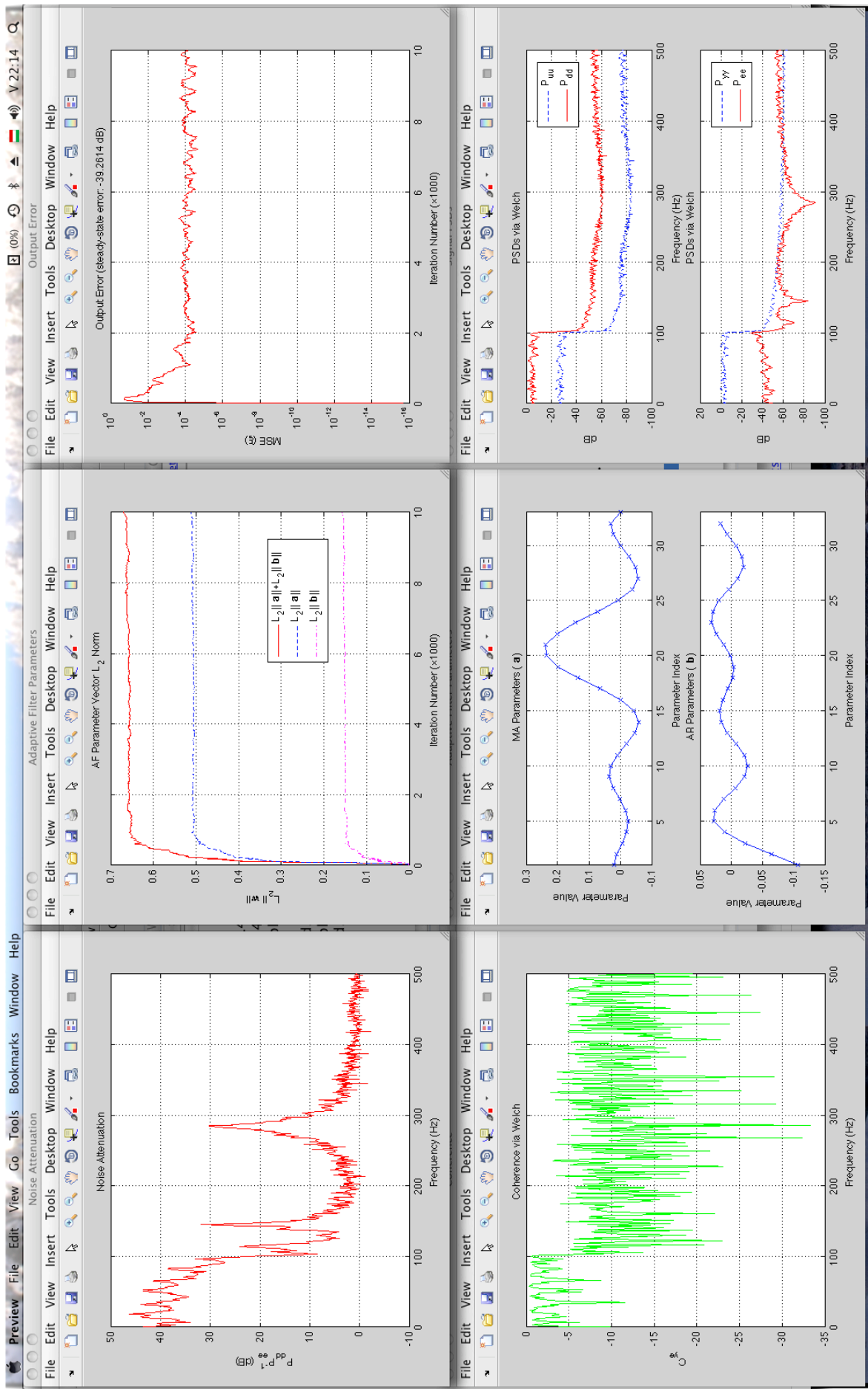
<<<<<<<<<< Simulation engine (v2.1) >>>>>>>>>

Iterative core runtime: 2.02836 s

Simulation runtime: 2.03067 s

Trim time axes to (.1000) [No trim] : [ENTER]

Quitting ANCSim...Bye!



A.1. ábra.

