

# Tartalomjegyzék

<b>KIVONAT</b> .....	<b>3</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>4</b>
<b>BEVEZETÉS</b> .....	<b>5</b>
<b>1 A HANGSZINTÉZIS FAJTÁI</b> .....	<b>6</b>
1.1 ABSZTRAKT ALGORITMUSOK .....	6
1.2 RÖGZÍTETT MINTÁK FELDOLGOZÁSA .....	7
1.3 SPEKTRÁLIS MODELLEZÉS .....	8
1.4 FIZIKAI MODELLEZÉS .....	9
<b>2 A ZONGORA FIZIKÁJA</b> .....	<b>11</b>
2.1 A KALAPÁCS .....	11
2.2 A HÚROK .....	14
2.2.1 <i>A húr egyenlete</i> .....	14
2.2.2 <i>A csatolt húrok elmélete</i> .....	16
2.3 A HÍD ÉS A REZONÁTORLEMEZ .....	22
<b>3 MODELL ARCHITEKTÚRA</b> .....	<b>23</b>
3.1 A HÚR MODELLEZÉSE HULLÁMVEZETŐVEL.....	23
3.2 LEZÁRT HÚR HULLÁMVEZETŐ MODELLEJE .....	24
3.3 A CSATOLÁS MODELLEZÉSÉNEK LEHETŐSÉGEI .....	27
3.3.1 <i>Csatolás megvalósítása több hullámvezetővel</i> .....	27
3.3.2 <i>A kétütemű lecsengés és a lebegés megvalósítása rezonátorbankkal</i> .....	29
3.4 A KALAPÁCS MODELLEZÉSE .....	30
3.5 A CSILLAPÍTÓ MODELLEZÉSE .....	32
3.6 A REZONÁTORLEMEZ MODELLEZÉSE .....	32
3.7 A ZONGORA MODELLEZÉSE .....	33
<b>4 HÚRPARAMÉTER BECSLÉS</b> .....	<b>34</b>
4.1 HULLÁMVEZETŐ HOSSZÁNAK MEGHATÁROZÁSA .....	34
4.1.1 <i>Az alapharmonikus meghatározása sávselektív Fourier transzformációval</i> .....	34
4.1.2 <i>Fázis alapján történő frekvenciamérés</i> .....	38
4.2 AUTO REGRESSIVE MOVING AVERAGE MODELLEZÉS .....	40
4.2.1 <i>Auto Regressive (AR) modell illesztése</i> .....	40
4.2.2 <i>Auto Regressive Moving Average (ARMA) modellezés</i> .....	41
4.2.3 <i>Optimalizációs algoritmusok</i> .....	42
4.2.4 <i>A modellezés korlátai</i> .....	42

4.3	KÖZELI FREKVENCIÁJÚ MÓDUSOK KERESÉSE FREKVENCIANAGYÍTÁSSAL .....	43
4.3.1	<i>A módszer analízise szintetikus jeleken</i> .....	45
4.4	ZONGORAHANGOK VIZSGÁLATA FREKVENCIANAGYÍTÁSSAL.....	48
4.5	FELHARMONIKUSOK VIZSGÁLATA .....	50
4.6	A CSATOLÁSI PARAMÉTEREK SZÁMÍTÁSA A KÉTPÓLUSÚ MODELLBŐL .....	52
4.6.1	<i>Konstans csatolási tényező vizsgálata</i> .....	55
4.6.2	<i>Frekvenciafüggő csatolás vizsgálata</i> .....	56
4.7	OFFLINE ANALÍZISPROGRAM A MODELL PARAMÉTEREINEK SZÁMÍTÁSÁRA.....	58
<b>5</b>	<b>VALÓSIDEJŰ HANGSZINTÉZIS.....</b>	<b>60</b>
5.1	JELFELDOLGOZÓ PROCESSZOROK ÁLTALÁNOS JELLEMZŐI.....	60
5.2	AZ ADSP 21061 JELFELDOLGOZÓ PROCESSZOR JELLEMZŐI .....	62
5.3	IIR SZŰRŐ HATÉKONY MEGVALÓSÍTÁSA.....	65
5.4	HULLÁMVEZETŐ MEGVALÓSÍTÁSA JELFELDOLGOZÓ PROCESSZORRAL .....	67
5.5	ZONGORAMODELL MEGVALÓSÍTÁSA JELFELDOLGOZÓ PROCESSZORRAL .....	69
5.6	A POLIFONIKUS DALLAMLEJÁTSZÁS MEGVALÓSÍTÁSA.....	70
5.7	ÖSSZEGZÉS .....	73
<b>6</b>	<b>ÖSSZEFOGLALÁS ÉS TOVÁBBFEJLESZTÉSI LEHETŐSÉGEK .....</b>	<b>75</b>
6.1	EREDMÉNYEK .....	75
6.2	ÉRTÉKELÉS ÉS TOVÁBBFEJLESZTÉSI LEHETŐSÉGEK .....	76
	<b>IRODALOMJEGYZÉK .....</b>	<b>78</b>
	<b>FÜGGELÉK.....</b>	<b>81</b>

## Kivonat

A diplomaterv célja fizikai alapú digitális zongora megvalósítása jelfeldolgozó processzoron. A fizikai alapú hangszintézis előnye, hogy könnyen tudja modellezni a hangszerek részei közötti kölcsönhatásokat, így pl. a húrok csatolásának jelenségét is.

A dolgozatban ismertetem a fizikai modell működésének megértéséhez feltétlenül szükséges fizikai ismereteket; elemzem a húrok csatolásának jelenségét, és a híd impedancia hatását a csatolásra. Bemutatom a zongora fizikai modelljének részeit (kalapács, húrok, rezonátorlemez). A kalapács és a húr kölcsönhatását a kalapács nemlineáris modellje alapján számítom. A húrokat digitális hullámvezetővel modellezem. A húrok csatolására a Smith által ajánlott modellt használom fel, mely feltételezi, hogy a húrok veszteségét csak a híd okozza, ezért nem tartalmaz veszteségi szűrőt. Így a húrvesztéséget kizárólag egy csatolási szűrővel állítom be. A húr diszperzióját és a finomhangolást mindent áteresztő szűrők használatával modellezem. A rezonátorlemez FIR szűrővel valósítom meg.

A húron kialakuló harmonikusok módusainak meghatározása az ARMA modellezésen alapul. A minél nagyobb felbontás elérése érdekében az ARMA modell illesztése előtt a vizsgált harmonikust lekeverem a 0 frekvencia környékére, megszűröm, és decimálom: ez a frekvencianagyítás. Az ehhez készített Matlab programot szintetikus jeleken és valódi zongorahangokon is teszteltem. Matlab programot készítettem a felvett zongorahangok harmonikusainak megkeresésére. Az így kapott harmonikusokat alkotó módusok vizsgálatára frekvencianagyítást alkalmaztam. Az elemzésből kapott módusokból kettőt használtam fel a frekvenciafüggő csatolási tényező kiszámításához. A csatolási tényező amplitúdómenetére a négyzetes hibát minimalizálva illesztettem elsőfokú szűrőt. Tanulmányoztam a konstans és a frekvenciafüggő csatolás, és a különböző elhangolások hatását is a szintetizált zongorahangra.

A csatolt húros modell programját Matlabban és C-ben írtam meg. A valós idejű megvalósítást az ADSP 21061 assembly nyelvén csatolás nélkül készítettem el. Ez a jelfeldolgozó processzor hardware korlátok miatt csak háromszólamú dallam megszólaltatására képes. Léteznek nagyobb teljesítményű processzorok, melyeken az általam elkészített program teljes digitális zongora megvalósítására lenne alkalmas.

## Abstract

The goal of the thesis is the implementation of a digital piano based on physical modelling. The advantage of the physical modelling approach is, that it is capable to model the interaction of the different parts of the instrument, such as the coupling of the strings. The thesis describes the physical theory of the piano focusing on the coupling of piano strings.

The parts of the physical model of the piano (hammer, string, soundboard) are also discussed. The hammer and the string relation is calculated based on a nonlinear hammer model. The strings are implemented using digital waveguides. For the coupling Smith's model is used, in which there are no loss filters. The loss is caused only by the coupling filter. The dispersion and fine tuning is modelled by allpass filters. The soundboard is implemented with FIR filter.

The modes of the harmonics of the strings are estimated with ARMA modelling. For that the signal was mixed to the 0 frequency and lowpass filtered before being decimated: this is called the frequency zooming. The Matlab program created for this purpose is tested with synthetic signals and with original recorded piano sound. A Matlab program was written for searching the harmonics of the prerecorded signals. Frequency zooming was used for the analysis of these harmonics. From the resulted modes two were used for the calculation of the frequency dependent coupling coefficient. On the magnitude of the coupling coefficient a first order filter was fitted based on the least squares optimization. The effect of the frequency dependent and constant coupling for the synthesised piano tones were analysed too.

The coupled string model was implemented in C and Matlab. The real time implementation was created on an ADSP 21061 digital signal processor without coupling. With this DSP only three tones can be played at the same time. However on more powerful DSPs the created code could realise a digital piano at full polyphony.

## Bevezetés

Hangszerek hangját nagyon sokféleképpen lehet modellezni. Kezdve az absztrakt módszerektől, a hang felvételén és visszajátszásán alapuló mintavételezéses szintézisig számos módszer ismert, amelyek közül válogathatunk. A hang rögzítésén és visszajátszásán alapuló módszerrel jó minőségű zongorahang állítható elő, a mai digitális zongorák is általában ezt a módszert használják. Ennek a módszernek a hátránya viszont, hogy bizonyos jelenségeket nem, vagy csak nagyon nehezen lehetne vele modellezni.

A tervezés célja egy fizikai alapú zongoramodell létrehozása és megvalósítása jelfeldolgozó processzoron. Fizikai modell alapú megközelítéssel olyan jelenségek is leírhatók, amelyeknek megvalósítását az eddigi módszerek nem tették lehetővé. Ilyen például egy hang újbóli megütése, valamint a húrok csatolása.

A zongora hangjának fizikai modellezéséhez a részek működésének pontos leírása szükséges. Viszont minél precízebb a modellezés, annál nagyobb a szükséges algoritmusok számításigénye. Ha például minden részt a differenciálegyenletes fizikai leírás alapján akarnánk modellezni, akkor ezek számításigénye rendkívül nagy lenne. Ehelyett olyan módszereket szeretnénk találni, amelyek egyrészt elég pontosan leírják a fizikai működést, másrészt a számításigényük olyan, hogy a mai hardware és software eszközök lehetővé teszik a valós idejű megvalósításukat.

Az 1. fejezet a hangszintézis módszerek rövid összefoglalását, és a fizikai modellezés előnyeit tartalmazza. A 2. fejezet összefoglalja a zongora hangképzésének fizikai alapjait. A 3. fejezet a zongora fizikai modelljének részeit, és azok megvalósítását tárgyalja. A 4. fejezet a húron kialakuló módusok analízisével, és a húrparaméterek beállításával foglalkozik, a csatolás megvalósítására koncentrálna. Végül az 5. fejezet a modell valós idejű megvalósítását és annak korlátait ismerteti.

# 1 A hangszintézis fajtái

A digitális hangszintézis kezdetekor a szintézis technikákat kétféle kategóriára osztották linearitásuk szerint. Egy akusztikus rendszer lineáris, ha (1) két különböző bemenetből származó kimenet összege ugyanaz, mint az előző két bemenet összegével gerjesztett rendszer kimenete, és (2) ha a bemenetet egy skalárral megszorozva a kimenet is ugyanilyen skalárszorosra változik. Azok a rendszerek, amelyek ezt a két feltételt nem elégítik ki, nemlineárisak. A nemlineáris rendszerek ismertetőjele, hogy a kimenetben olyan frekvenciájú komponensek is megjelenhetnek, amelyek a bemenetben nem voltak jelen, és a kimenet spektruma függ a bemeneti amplitúdótól is.

A lineáris technikák közé tartozik az additív és a szubtraktív szintézis. A nemlineáris technika képviselője például a frekvencia modulációs hangszintézis. A ma létező sokféle technika már nem sorolható egyértelműen az előző két kategória egyikébe sem. Smith a módszerek új csoportosítását javasolta 1991-ben. A következő négy főbb kategóriát jelölte meg: absztrakt algoritmusok, rögzített minták feldolgozása, spektrális és fizikai modellek. Az absztrakt algoritmusok a fizikai képhez nem kapcsolódó módszerek és függvények segítségével próbálják a valóság hangjait utánozni. A második csoport algoritmusai valódi hangok felvételén, feldolgozásán és visszajátszásán alapulnak. A spektrális modellek a szintetizálandó hang spektrumát próbálják előállítani. A fizikai modellek a hangszerek fizikai működését szimulálva állítanak elő hangokat [Smith 1991],[Válimáki és Takala 1996].

## 1.1 Absztrakt algoritmusok

A nemlineáris módszereket általában modulációs technikáknak is hívják. Ezeknek a legjobb reprezentánsa a frekvenciamodulációs szintézis. Ebben egy oszcillátor a vivő frekvenciáját módosítja:

$$e = A \sin(\alpha t + I \sin \beta t). \quad (1.1)$$

Ahol  $\alpha$  a vivő frekvenciája  $\beta$  a moduláló jel frekvenciája  $I$  a modulációs index. Ez a függvény felírható az alábbi alakban is:

$$e = \{J_0(I)[\sin(\alpha + \beta)t - \sin(\alpha - \beta)t] + J_1(I)[\sin(\alpha + 2\beta)t - \sin(\alpha - 2\beta)t]\}. \quad (1.2)$$

Ahol  $J_n(I)$  elsőfajú  $n$ -ed rendű Bessel függvény. Vagyis a megjelenő frekvencia-összetevők a modulációs frekvencia többszöröseinél fognak elhelyezkedni a vivőtől számítva, burkolójuk pedig a megfelelő rendű Bessel függvény lesz. A modulációs index időbeni változtatásával változatos spektrumú jelformák hozhatók létre [Chowning 1973].

Frekvenciamodulációval is lehetséges zongorahangok előállítására [Schottstaedt 1977]. Ehhez bonyolult moduláló függvényekre van szükség. Schottstaedt két szinusz összegéből álló moduláló függvényt használt frekvenciafüggő modulációs indexekkel, amelyekkel jó szimulációs eredményeket kapott.

Másik nemlineáris szintézis technika a hullámformálás. Először oszcillátorral előállítunk egy szinuszjelet, amelynek az amplitúdóját az idő függvényében változtatjuk (ezt a burkoló generátor vezérli). Az így kapott jelet a hullámformálóba vezetjük, amely tulajdonképpen egy nemlineáris karakterisztikájú erősítő. Ennek a karakterisztikának a változtatásával sokféle jelspektrumot elő tudunk állítani [Roads 1979]. Ezzel a módszerrel Beauchamp rézfűvós hangszerek hangját szimulálta [Beauchamp 1979].

## **1.2 Rögzített minták feldolgoása**

Ezek a módszerek a hang rögzítésén, feldolgozásán, majd visszajátszásán alapulnak. Vagyis a rögzített hang visszaszintetizálását nagyon pontosan meg tudják tenni. A probléma ezzel a módszerrel a hatalmas eltárolandó adatmennyiség.

A mintavételezéses szintézis a legelterjedtebb ilyen módszer. A piacon kapható digitális zongorák nagy része ezen az elven alapul. A különböző hangok hangját eltárolják a memóriában, és egy billentyű leütésekor visszajátsszák. A burkoló és hangszín időbeli változását időben változó szűrővel valósítják meg. Ez a módszer a hangokat külön-külön állítja elő, tehát nem képes a csatolt húrok, vagy egy hang újbóli leütésének modellezésére. A módszer előnye viszont, hogy a megvalósítás algoritmusai egyszerű [Bank 2000].

### 1.3 Spektrális modellezés

A spektrális modellek a hanghullámok frekvenciatartománybeli tulajdonságaira koncentrálnak. Hátránya ezeknek a módszereknek, hogy egy hangszer leírásához nagyon sok paraméterre van szükség. Ez az osztály magában foglalja a hagyományos lineáris technikákat, mint az additív és szubtraktív szintézis, de nemrégiben újabb módszereket is kifejlesztettek. Ezek a módszerek figyelembe veszik azt a tényt, hogy a hangok nem stacionáriusak, spektrális összetételük az időben változik.

Az additív technika a szintézis módszerek egyik legrégebbike. Az additív szintézis megfelelő számú szinuszjel összeadását jelenti a kívánt spektrum eléréséhez. Általában Fourier transzformációval könnyen elemezhetők a felvett szintetizálendő hangok. A Fourier transzformáció megadja az egyes komponensek amplitúdóját, fázisát és frekvenciáját. A módszer hátránya, hogy minden szintetizálendő hanghoz rengeteg paramétert kell eltárolnunk.

A legnagyobb probléma az additív szintézissel a paraméterek nagy száma (frekvencia, amplitúdó, fázis minden harmonikushoz). Az első kísérlet az adatmennyiség csökkentésére a fázis elhanyagolása volt, valamint lineáris trajektóriák meghatározása a hangban jelenlévő minden szinusz hullámra.

A csoport szintézis az additív szintézis hatalmas paraméterigényét igyekszik csökkenteni. Ennek érdekében a közeli harmonikusokat összefogják egy csoportba, ezeknek a szintetizálásakor ugyanaz lesz az amplitúdójuk és a frekvenciájuk [Horner és Lee 1999].

Serra és Smith (1991) kiterjesztette az additív szintézist egy szinusz és zaj modellé. Ennek lényege, hogy a kiemelkedő frekvencia csúcsokat a megfelelő szinusz hullám hozzáadásával szintetizáljuk, míg a hang többi részét zajként modellezzük. Ez a modell leginkább olyan zene szintetizálását segíti, ahol a hangok nagyon zajosak lehetnek. Zajos hangok visszaszintetizálása az egyik leggyengébb pontja volt a korai additív szintézisnek, mivel nagyon sok szinuszjelet kellett a hanghoz adni a szélessávú zaj szintetizálásához. Ebben a modellben a zajkomponenst fehér zaj időben változó szűrésével állítják elő [Välimäki és Takala 1996].

Az additív technika alkalmazható lenne zongorahang szintézisére is. Viszont zongorahangok esetén a Fourier transzformáció nem adja meg az összes szükséges információt a hangról a közeli harmonikusok miatt. Ehhez az Auto Regressive Moving



Average modellezés használata szükséges [Karjalainen et al. 2002]. Az ezzel előállított paraméterekkel élethűen vissza lehet állítani egy megadott hangot (ld. 4.4 pont). Digitális zongora készítéséhez az összes hang elemzését el kellene készíteni. Így a kétütemű lecsengés és a lebegés is modellezett, viszont például a hangok újbóli megütése, vagy a hangok közötti csatolás jelensége nem megvalósítható, ráadásul hatalmas adatmennyiség tárolása szükséges.

A szubtraktív szintézis lineárisan megszűr egy bementi jelet, ezáltal eltávolít bizonyos összetevőket annak spektrumából. Jobb elnevezés a forrás-szűrő modell, mivel a szintézis két részből áll: a gerjesztés előállításából és ennek szűréséből. A gerjesztő jelben tipikusan sok spektrumösszetevő található [Välimäki és Takala 1996].

## **1.4 Fizikai modellezés**

Digitális szintézis módszerekkel elvileg bármilyen hangot elő tudunk állítani, de ezek nagy része zeneileg érdektelen, mert nem valóságos hangzásúak. Olyan technikákat kellett tehát kifejleszteni, amelyek képesek zeneileg hasznos hangok előállítására. Erre nagyon előnyösen használhatók azok a módszerek, amelyek magát a hangszert, és annak részeit fizikailag modellezzik.

A fizikai modellezéshez használt módszereket öt nagy csoportba lehet osztani: (1) forrás-szűrő modellek, (2) parciális differenciálegyenletek numerikus megoldása, (3) rezgő tömeg-húr hálózatok, (4) modális szintézis, (5) hullámvezetős szintézis [Välimäki és Takala 1996].

Az első módszerre valóságos példa az emberi hangképzés. A hangszálak periodikus rezgése a gerjesztés, amit utána a hangképző szervek különböző módokon megszűrnek. Igaz, hogy a legtöbb hangszer jóval bonyolultabb ennél a kételemű struktúránál, és nem lehet őket ilyen egyszerűen modellezni.

Az első kísérleteket fizikai modellen alapuló hangképzésre Hiller és Ruiz tette meg 1971-ben. Ők a húr differenciálegyenletéből indultak ki, és ezt közelítették véges differenciákkal. Ez a módszer nagyon számításigényes. Még a mai hardware lehetőségekkel is nehéz a valószerű kivitelezése sokhúros rendszerek esetén (pl. a zongora esetében).

Az 1970-es évek végén a fizikai modellezés egy másik megközelítését használták Franciaországban. Létrehozták a CORDIS-nak nevezett rendszert, amely a hangszereket

olyan tömegpontok halmazaként vizsgálja, melyeknek bizonyos rugalmassági és súrlódási tulajdonságaik vannak. Ez a módszer közeli rokonságban van a véges elem módszerrel. A vizsgált tárgy nagyszámú térrészre van felosztva, mindegyik térrész apró rugókkal van a szomszédjához kapcsolva. Ez a hálózat utánozza a vizsgált tárgy rezgéseit. Az 1980-as évek elején ezen az alapon, egy külön erre a célra készített mikroprocesszorral állítottak elő először valós időben fizikai modell alapú hangot.

Párizsban egy harmadik technikát fejlesztettek ki a fizikai modellezésre, és modális szintézisnek nevezték el. Ez az eljárás a rezgő rendszert frekvenciák és csillapítási tényezők halmazaként fogja fel. Amikor a hangszert gerjesztjük egy pontban, akkor ez a módusokat gerjeszti [Välimäki és Takala 1996].

Az előző módszerek komoly hátránya a nagy számításigény. Ezt a számításigényt nagyban csökkenti a Smith által kifejlesztett digitális hullámvezető modell, ami közvetlenül digitálisan utánoz egy fizikai jelenséget: a rugalmas közegben terjedő hullámokat (a továbbiakban az egyszerűség kedvéért a digitális hullámvezetőt csak hullámvezetőnek fogom hívni). A hullámvezető modell lényegében késleltetővonal, a végein egy-egy  $-1$ -es szorzóval. Ebben a struktúrában a diszperzió és a veszteség egy lineáris szűrővel valósítható meg, ami még hatékonyabbá teszi húrok és sípok modellezését [Smith 1992].

Láthattuk, hogy a nemlineáris technikák elvont, a fizikai képhez nem kötődő függvények és módszerek alkalmazását igénylik a megfelelő szimulációs eredmények eléréséhez. Az additív szintézis problémája pedig a hatalmas tárolandó adatmennyiség. Történtek próbálkozások a tárolandó adatmennyiség csökkentésére például csoportok keresése additív szintézishez, de a fizikai modellezésen kívül egyik szintézis módszer sem képes kivédeni azt a hibát, ami abból fakad, hogy független hangok spektrumát próbálja modellezni. A fizikai modellezéssel a csatolás megvalósítása és a hangok újbóli leütésének modellezése nem gond, hiszen a fizikailag értelmezhető számítások ezek megvalósítását magukban hordozzák. Hátránya viszont a módszernek, hogy a működéshez szükséges paraméterek előállítása viszonylag bonyolult. Mint látni fogjuk a számítási kapacitás sajnos nem elegendő ahhoz, hogy az összes hang kölcsönhatását modellezzük, de nyitott a lehetőség, hogy az algoritmusok fejlődésével és a processzorok gyorsulásával olyan digitális zongorát állítsunk elő, melynek hangja egy igazi zongoráét nagyon pontosan közelíti.



A mechanika tulajdonképpen egy emelő, mely a billentyű leütésekor a hangtompítót felemeli a húrról, a kalapácsot pedig hozzáüti a húrhoz. A kalapács szabadon tud forogni egy felfüggesztésen. Ha óvatosan nyomunk le egy billentyűt, akkor a kalapács 4-6 mm-rel a húr előtt megáll. Erőteljesebb leütés esetén a kalapács mozgási energiája miatt éri el a húrt. A billentyű elengedésekor a hangtompító visszaesik a húrra, ezáltal elfojtva a hangot.

A kalapács húr kölcsönhatást közelíthetjük egy tömegpont és egy nemlineáris húr kölcsönhatásaként [Boutillon 1988]. A nemlinearitás a puhafa kalapács külső borításának inhomogenitásából származik. Ez a folyamat egyrészt a kalapács húrtól független gyorsulásából, másrészt a húr és a kalapács nemlineáris kölcsönhatásából áll. A kalapács mozgásegyenlete a következő:

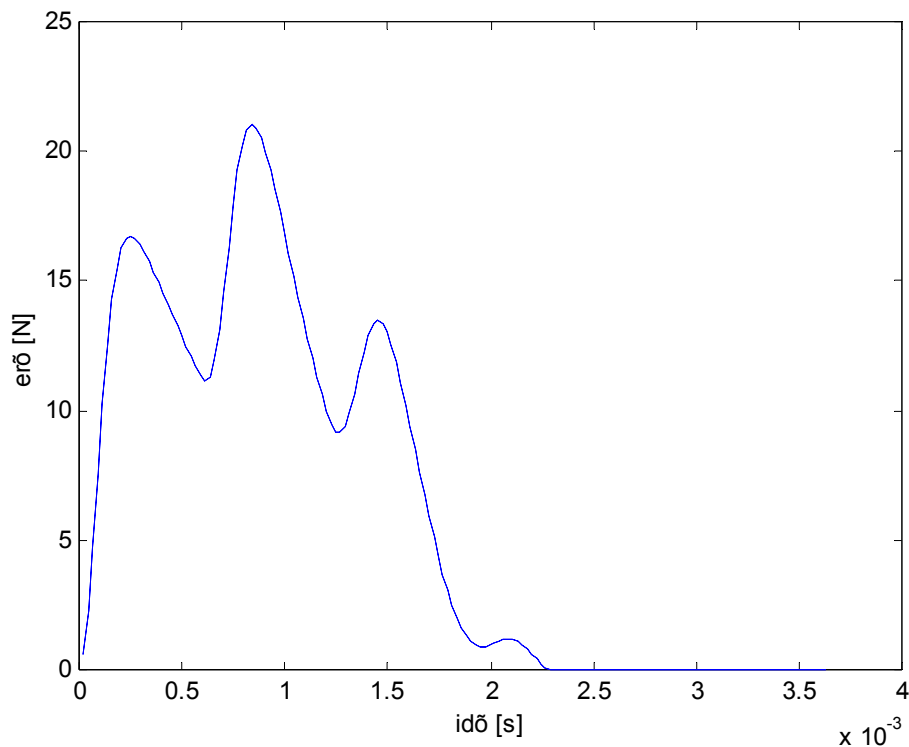
$$F(t) = m_h \frac{d^2 y_h(t)}{dt^2}; \quad (2.1)$$

ahol  $F(t)$  a húr és a kalapács között fellépő erő,  $y_h$  a kalapács elmozdulása,  $m_h$  a kalapács tömege. Hangszereken végzett mérések alapján fel lehet állítani a következő tapasztalati képletet, amit az irodalomban több helyen megtalálhatunk (pl. [Borin 1997]):

$$F(t) = f(\Delta y(t)) = \begin{cases} k\Delta y(t)^p, & \Delta y(t) > 0 \\ 0, & \Delta y(t) \leq 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Ahol  $\Delta y(t) = y_h(t) - y_s(t)$  a kalapács filcborításának összenyomódása,  $y_s(t)$  a húr helyzete,  $k$  a kalapács rugalmassági együtthatója,  $p$  pedig a rugalmassági kitevő. Ha  $\Delta y(t) < 0$ , akkor a kalapács nem érinti a húrt, így nincs erőhatás.

A 2-2. ábrán egy tipikus erőfüggvény látható. A kalapács a 0. időpillanatban éri el a húrt. A görbe lefutását fizikailag a következőképpen magyarázhatjuk: amikor a kalapács a húrhoz ér, akkor a húron mindkét irányban hullámok indulnak el. Ezt most tekinthetjük egy impulzusnak, vagy egy rövid hullámcsomagnak. Mikor a kalapács hozzáér a húrhoz, erőhatás lép fel. Ez az erő egy darabig növekszik, majd hirtelen elkezd csökkenni, majd ismét növekedni. Ez annak köszönhető, hogy ekkorra a húr közelebbi vége felé indult hullámok már ellentétes fázisban visszaverődtek, és ezek a hullámok ellökik a kalapácsot a húrtól.



2-2. ábra A húr és a kalapács között fellépő erő az idő függvényében

Az erőgörbe alakját a  $p$  és a  $K$ , valamint a kalapács kezdeti sebessége befolyásolják. Növelve  $K$  vagy a kezdeti sebesség értékét növekszik a gerjesztés magas harmonikus tartalma. Az ütközés átlagos időtartama a kalapács és a húr tömegének arányától függ. Minél nehezebb a kalapács, annál hosszabb az ütközés időtartama [Chaigne és Askenfelt 1994].

A húrt akkor lehet a legjobban gerjeszteni, ha az ütközés időtartama egyenlő az adott hang periódusidejének felével. Ez a középső oktávok hangjaira nagyjából teljesül is. Viszont a mélyebb hangoknál ez már nem igaz. Ezért a modern zongoráknál változó tömegű kalapácsokat használnak [Conklin 1996].

A kialakult hang nagyban függ attól is, hogy a kalapács hol üti meg a húrt. Azok a harmonikusok, amelyeknek duzzadóhelyük lenne a megütés helyénél kevésbé gerjesztettek [Conklin 1996].

A kalapács viselkedésének csak közelítő leírása az előbbi modell. A kalapács filcborításának összenyomódása és kitágulása során nem ugyanakkora erő lép fel. A kalapács hiszterézis hatása általánosságban a szilárd testek fizikája alapján vezethető le, és lényegében abból áll, hogy a rugalmassági együtthatót egy időfüggő kifejezéssel

helyettesítjük [Stulov 1994]. A hiszterézises kalapácsmodellt például Borin [1996] használta modelljében.

## 2.2 A húrok

### 2.2.1 A húr egyenlete

Végtelen hosszúnak feltételezett homogén sűrűségű húr hullámeqyenlete a következő alakban írható fel [Morse 1948]:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (2.3)$$

Ahol  $E$  a húrban fellépő feszültség,  $\rho$  a sűrűség,  $y$  a keresztirányú elmozdulás. A fenti parciális differenciálegyenlet általános megoldása a következő alakban írható fel:

$$y(x, t) = f^+ \left( t - \frac{x}{c} \right) + f^- \left( t + \frac{x}{c} \right). \quad (2.4)$$

Az előző alakú megoldások szinuszos hullámokat feltételezve felírhatók a következőképpen:

$$f(x, t) = f(x) e^{j\omega t}, \quad (2.5)$$

ahol  $f(x)$  a hullám térfüggő komponense (a komplex amplitúdó),  $\omega$  pedig a hullám időbeli körfrekvenciája. Ezt a komplex amplitúdót a következőképpen írhatjuk tovább, ha feltételezzük, hogy a húr csak egyik végén van lezárva:

$$f(x) = A e^{-j\beta x} + B e^{j\beta x} = A \left( e^{-j\beta x} + \rho e^{j\delta} e^{-2j\beta l} e^{j\beta x} \right), \quad (2.6)$$

ahol  $r = \rho e^{j\delta}$ , a lezárás komplex reflexió tényezője. Azonos átalakítások után ezt a következő alakra hozhatjuk:

$$f(x) = A(1 - \rho)e^{-j\beta x} + 2A\rho e^{j\left(\frac{\delta}{2} - \beta x\right)} \cos\left(\beta(1-x) - \frac{\delta}{2}\right). \quad (2.7)$$

Ebből látszik, hogy a húron kialakuló hullámoknak van egy haladó, és egy álló komponense (amelynek amplitúdója egy adott pontban állandó). Ha a lezárás egységnyi, akkor csak állóhullámok alakulnak ki a húron.

A valóságban a hűrok nem ideálisak, ezért saját veszteségük, és diszperziójuk van. Veszteséges hűr egyenlete a következő [Morse 1948]:

$$\varepsilon(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( T(x) \frac{\partial y}{\partial x} \right) - R(\omega) \frac{\partial y}{\partial t}; \quad (2.8)$$

ahol  $\varepsilon$  a hűr sűrűsége,  $T(x)$  a hűrban fellépő feszűltség a hűr  $x$  helyén,  $R$  pedig a hűr egységnyi hosszára eső súrlódási ellenállás.

A zongorában a hűrok hossza nincs fordított arányban a frekvenciájukkal. Ha ez így lenne, az alacsonyabb hangok túl hosszúak lennének. Ezért azok a hűrok rövidebbek, de nagyobb tömegűek a számítottnál. Másrészről viszont a vastagabb hűroknak nagyobb az inharmonicitása, mert a hűrok rűdként kezdenek el viselkedni. Minél vastagabb egy hűr, viselkedését annál kevésbé írja le helyesen a 2.3 hűregyenlet. A nemideális hűr egyenlete, ha  $T$  erűvel feszítjük ki a hűrt, és a hűr nem teljesen rugalmas [Morse 1948]:

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - QS\kappa^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}; \quad (2.9)$$

ahol  $y$  a hűr keresztirányú elmozdulása,  $\rho$  a hűr sűrűsége.  $Q$  a Young modulus,  $S$  a hűr keresztmetszete,  $\kappa$  pedig a keresztmetszet elhajlásának sugara, melyet  $z$  távolságra a hűr vizsgált keresztmetszetének tetejétől a következőképpen definiálunk:

$$\kappa^2 = \frac{1}{S} \iint z^2 dS. \quad (2.10)$$

A negyedik derivált miatt diszperzió fog megjelenni a hűrban, ami azt jelenti, hogy a hullámok sebessége nem lesz egyforma. A nagyobb frekvenciájú komponensek gyorsabban fognak haladni a hűron, ezért frekvenciájuk meg fog nőni. A fenti egyenlet megoldásával kis merevségi egyűtthatóknál a következő összefűggés adódik az alapharmonikus és a felharmonikusok frekvenciái között [Morse 1948]:

$$f_n \approx \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{T}{\rho S}} \left[ 1 + \frac{2}{l} \sqrt{\frac{QS\kappa^2}{T}} \right]; \quad (2.11)$$

ahol a  $f_0$  az alapharmonikus frekvenciája,  $n$  a keresett harmonikus sorszáma,  $l$  a húr hossza.

## 2.2.2 A csatolt húrok elmélete

A zongorában minden hanghoz kettő vagy három húr tartozik. A húrok nincsenek tökéletesen összehangolva. A zongora jellegzetes hangját a kalapács mellett a húrok kölcsönhatásának köszönheti, mivel több húr csatolása esetén jöhet létre kétütemű lecsengés és lebegés.

A csatolás fizikai tárgyalásának matematikai alapjait az állandó együtthatós lineáris differenciál egyenletrendszerek elmélete teremti meg. Állandó együtthatós lineáris két ismeretlenes differenciál egyenletrendszer általánosan a következő alakban írható fel:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + By + f_1(t) \\ \frac{dy}{dt} &= Cx + Dy + f_2(t) \end{aligned}; \quad (2.12)$$

ahol  $x$ ,  $y$  az időtől függő ismeretlen függvények,  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  pedig a gerjesztés. Ez az egyenlet mátrixos alakban:

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \mathbf{A} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \bar{\mathbf{F}}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Ennek a differenciálegyenletnek az általános megoldása:

$$\bar{\mathbf{x}} = c_1 \bar{s}_1 \exp(\lambda_1 t) + c_2 \bar{s}_2 \exp(\lambda_2 t); \quad (2.14)$$



ahol  $\lambda_1$  és  $\lambda_2$  az  $A$  mátrix sajátértékei,  $s_1$  és  $s_2$  az  $A$  mátrix sajátvektorai,  $c_1$  és  $c_2$  pedig a kezdeti feltételektől függő konstansok. A számunkra fontos esetben a sajátértékek egymás komplex konjugáltjai lesznek. Mivel

$$e^{\lambda t} + e^{-\lambda t} = e^{\alpha} e^{j\beta} + e^{\alpha} e^{-j\beta} = e^{\alpha} \frac{\cos(\beta t)}{2}, \quad (2.15)$$

ezért ebben az esetben komplex  $A$  mátrixnak is van fizikai értelmezése, hiszen a sajátértékek valós része a csillapításért, képzetes része pedig a frekvenciáért felelős.

A gyakorlati esetekben sokszor a  $\lambda' = j\lambda$  érték szerepel a sajátérték helyett, így az alábbi levezetésekben én is ezt a terminológiát fogom használni. Ekkor tehát a valós rész jelenti a körfrekvenciát, a képzetes pedig a csillapítást.

A húrok csatolásának elméletét Weinreich [1977] munkája alapján tárgyalom. Feltételezés szerint a különböző frekvenciájú állóhullámok nem hatnak egymásra, így külön-külön vizsgálhatjuk viselkedésüket. A húr pontjai – az állóhullámok kialakulása miatt – olyan rezgő pontokként modellezhetők egy adott módus esetében, melyek mozgása csak az idő függvénye. A csatolás- és csillapításmentes, közös  $\omega_0$  rezonanciafrekvenciájú oszcillátorok mozgásegyenlete az alábbi alakban írható fel [Weinreich 1977]:

$$\ddot{q}_k + \omega_0^2 q_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots; \quad (2.16)$$

ahol  $q$  az oszcillátorok elmozdulását jelenti. A rendszer gerjesztetté válik, ha a jobb oldalon a 0-kat  $q$ -nak és deriváltjainak valamilyen lineáris kombinációjával helyettesítjük. Ezeket a függvényeket  $f_k$ -val jelöljük. Az ilyen egyenletrendszerek megoldása a következő alakban írható fel (a megállapodásnak megfelelően  $j$ -t kiemeltünk a sajátértékekből, így a képzetes rész felelős a csillapításért):

$$q_k = \sum_n A_{kn} \exp(j\lambda_n t). \quad (2.17)$$

Mivel az egyenletünk valósegýtthatos, ezért a megoldások komplex konjugált párokban írhatók fel. A 2.16 egyenletet a következő alakban is felírhatjuk [Weinreich 1977]:

$$\left(\frac{d}{dt} - j\omega_0\right)\left(\frac{d}{dt} + j\omega_0\right)\psi_k = f_k. \quad (2.18)$$

Az egyenlet második tényezőjét  $2j\omega_0$ -al helyettesítve, és vele az egyenlet mindkét oldalát elosztva az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\left(\frac{d}{dt} - j\omega_0\right)\psi_k = j\sum_l \Omega_{kl}\psi_l. \quad (2.19)$$

Elhagyva az  $j\omega_0\psi_k$  tagokat, akkor a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{d\psi}{dt} = j\Omega\psi; \quad (2.20)$$

ahol  $\psi$  az időfüggvényekből képzett oszlopvektor,  $\Omega$  mátrix elemei pedig az egymásra hatást jelentik. Fontos megjegyezni, hogy a 2.20 egyenlet sajátértékei – az  $j\omega_0\psi_k$  tagok elhagyása miatt –  $j\omega_0$ -al kisebbek, mint a 2.19 egyenleté. Ezt könnyen beláthatjuk egy általánosabb tétel segítségével: ha egy mátrix főátlójának minden tagjához ugyanazt a számot hozzáadjuk, akkor a sajátérték ezzel a számmal nagyobb lesz. A csatolási mátrix elé ki van emelve a képzetes egység. Ez összhangban van azzal a korábbi megjegyzéssel, hogy a sajátértékek képzetes része jelenti a csillapítást, valós része pedig a körfrekvenciát. Most tegyük fel, hogy két húrunk van, és  $\Omega_{lk} = a$   $\Omega_{kl} = b$ . Ekkor a 2.19 egyenletet minden  $k$ -ra felírva a következő egyenletrendszeret kapjuk:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} - j\omega_0\right)\psi_1 &= a\psi_1 + b\psi_2 \\ \left(\frac{d}{dt} - j\omega_0\right)\psi_2 &= b\psi_1 + a\psi_2 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Ezt átrendezve:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\right)\psi_1 &= (a + j\omega_0)\psi_1 + b\psi_2 \\ \left(\frac{d}{dt}\right)\psi_2 &= b\psi_1 + (a + j\omega_0)\psi_2 \end{aligned}, \quad \Omega_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Láthatjuk, hogy  $\Omega_2$  sajátértékei a különböző oszcillátorok  $\omega_0$ -tól való eltéréseit jelentik. Két elhangolt zongorahúr esetében az elhangolás ( $2\varepsilon$ ) és a híd admittanciája segítségével lehet felírni az  $\Omega$  mátrix elemeit, ugyanis fizikailag a hídon keresztül van összekapcsolva a két húr. Legyen  $\zeta = j\omega_0 Z_0 Y/\pi$ , ahol  $Z_0$  a húrok impedanciája,  $Y$  pedig a híd admittanciája, így a csatolási mátrix a következő lesz:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 2\varepsilon + \zeta & \zeta \\ \zeta & \zeta \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

A híd admittanciája az előzőek alapján a következő:

$$Y = \frac{-j\zeta\pi}{\omega_0 Z_0}. \quad (2.24)$$

Általánosságban  $\zeta$  komplex:  $\zeta = \xi + j\eta$ . A megállapodás értelmében a képzetes rész felelős a csillapításért. A valós rész lehet pozitív és negatív,  $\eta$  csak pozitív lehet, mert ez a tag jelenti a fellépő energiaveszteséget.

Célszerű  $\Omega$ - $\zeta$  sajátértékeit meghatározni, mivel ekkor a sajátértékek valós részei 0 és  $2\varepsilon$  között maradnak, és ennek van fizikai jelentése. A sajátértékek a következő alakban írhatók fel:

$$\lambda_{1,2} = \zeta + \varepsilon \pm (\varepsilon^2 + \zeta^2)^{1/2} - \xi. \quad (2.25)$$

Érdeemes megvizsgálni két speciális esetet. Az első amikor a híd admittanciája tiszta képzetes ( $\eta=0$ ). Ekkor a sajátértékek a következő alakúak :

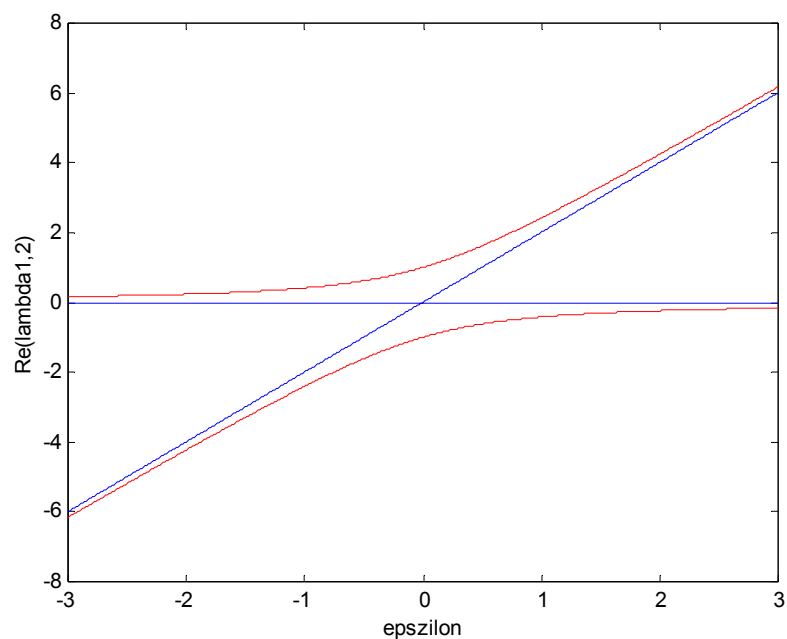
$$\lambda_{1,2} = \xi + \varepsilon \pm (\varepsilon^2 + \xi^2)^{1/2}. \quad (2.26)$$

Ha az elhangolás nagy ( $\varepsilon \gg 0$ ), akkor a húrok frekvenciája a csatolás nélküli esethez közelít, míg, ha az elhangolás kicsi, akkor a frekvenciák közelebb kerülnek egymáshoz annál, mint ahogy csatolás nélkül lennének. Fontos, hogy ebben az esetben a frekvenciák sohasem lesznek egyformák (ld. 2-3. ábra).

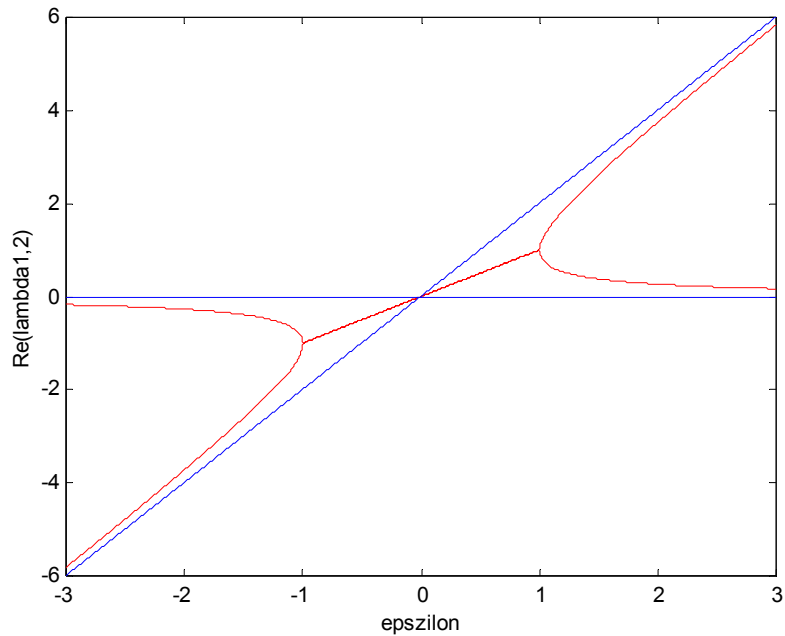
A másik speciális eset, amikor az admittancia valós ( $\xi=0$ ). Ekkor a sajátértékek:

$$\lambda_{1,2} = j\eta \pm (\varepsilon^2 - \eta^2)^{1/2} + \varepsilon. \quad (2.27)$$

Ez további két alettre bontható: ha  $\varepsilon > \eta$ , akkor a gyökvonás után pozitív valós számot kapunk, ami frekvenciakülönbséget jelent. A plusz-mínusz jel miatt ez az egyik módusnál frekvencianövekedést, a másik módusnál frekvencia csökkenést jelent. Vagyis a módusok között kicsi frekvenciakülönbség lép fel, ami lebegést eredményez. Ha viszont  $\varepsilon < \eta$ , akkor a gyökvonás komplex számot eredményez, ami csillapításnak felel meg. Ekkor a módusok lecsengési ideje el fog térni egymástól, vagyis az egyik módus hamarabb eltűnik, mint a másik, tehát kétütemű lecsengés lép fel. Ebben az esetben a módusok frekvenciája egyforma (ld. 2-4. ábra).

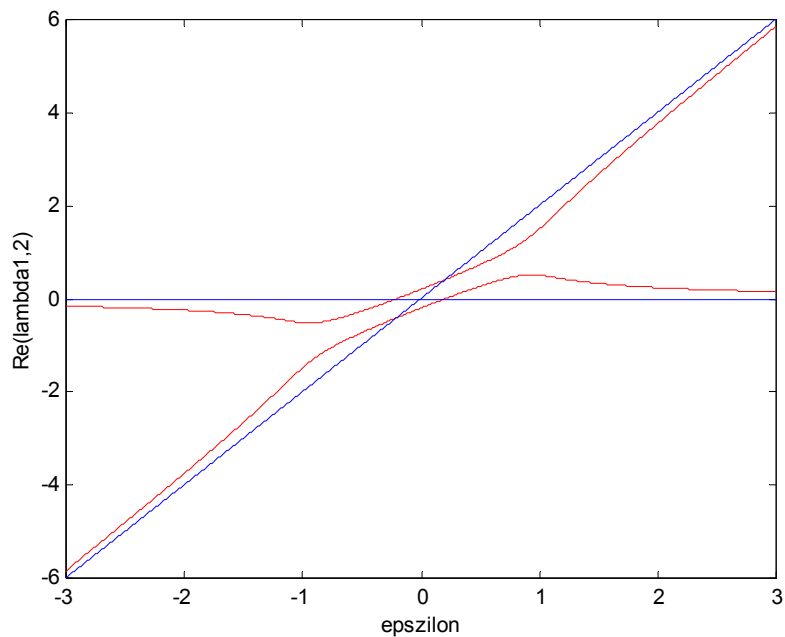


**2-3. ábra Egy kéthúros rendszer két normál módusának körfrekvenciája az elhangolás függvényében tiszta reaktív csatolás esetén (piros görbe,  $\eta=0$   $\xi=1$ ). A kék egyenesek a csatolás nélküli körfrekvenciákat ábrázolják**



**2-4. ábra Kéthúros rendszer normál módusainak körfrekvenciája az elhangolás függvényében tiszta rezisztív csatolás esetén (piros görbe,  $\eta=1$   $\xi=0$ ). A kék egyenesek a csatolás nélküli körfrekvenciákat ábrázolják**

Általános esetben mind a frekvenciák, mind a lecsengési idők el fognak térni egymástól (ld. 2-5. ábra) [Weinrich 1977].



**2-5. ábra A két normál módus körfrekvenciája általános csatolás esetén (piros görbe,  $\eta=0.98$   $\xi=0.2$ ). A kék egyenesek a csatolás nélküli körfrekvenciákat ábrázolják**

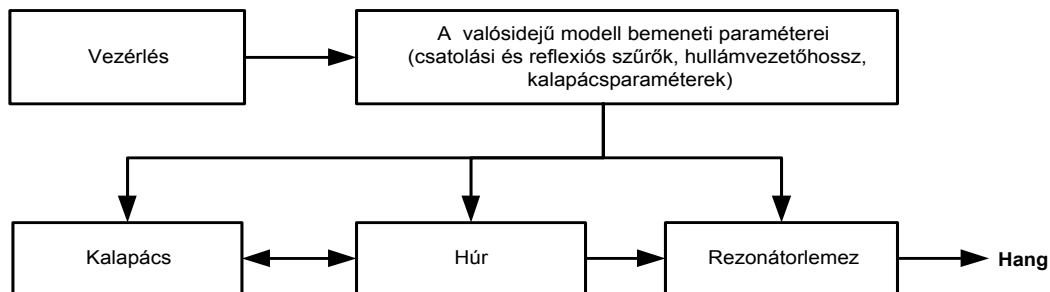
### **2.3 A híd és a rezonátorlemez**

A híd vezeti a húrok energiáját a rezonátorlemez felé. A híd az impedanciaillesztő szerepét tölti be amellett, hogy a csatolás kialakulásánál is meghatározó szerepet játszik. Impedanciájától függ ugyanis, hogy a húrok energiájának mekkora része verődik vissza, és mekkora része továbbítódik a rezonátorlemez felé.

A rezonátorlemez igazából nem rezonátor. Feladata a hang kisugárzása a levegőbe, ezért a hangvezetésének nagyon jónak kell lennie. A zongorák rezonátorlemeze általában puhafából – például lucfenyőből – készül. A fa hangvezetése sokkal jobb szálirányban, ezért az oldalirányú vezetőképességet keresztirányú merevítő lécek becsapolásával növelik. A merevség fokozásával ugyanis növekszik a sebesség. A húrok rezgései a hídon keresztül továbbítódnak a rezonátorlemez felé.

### 3 Modell architektúra

A zongora fizikai modelljében ugyanazok az alkatrészek találhatók meg, mint egy igazi zongorában, csak digitálisan megvalósítva (3-1. ábra). A fizikai kép annyiban egyszerűsített, hogy csak a kalapács és a húr egymásrahatását modellezzük, a húr és a rezonátorlemez egymásrahatását nem. A híd impedanciája határozza meg a visszavert és a továbbított hullámok amplitúdóját. A hidat csak a csatolási tényező számításánál fogom figyelembe venni, mivel a híd impedancia csak kicsit változik, ami a rezonátorlemez felé a hullámtovábbítást csak kevéssé, de a csatolást annál inkább befolyásolja.



3-1. ábra A zongora fizikai modellje

#### 3.1 A húr modellezése hullámvezetővel

A húron kialakuló hullámfüggvényt térben és időben mintavételezve a következő egyenletet kapjuk [Smith 1992]:

$$y(t_n, x_m) = y^+ \left( n\Delta t - m \frac{\Delta x}{c} \right) + y^- \left( n\Delta t + m \frac{\Delta x}{c} \right). \quad (3.1)$$

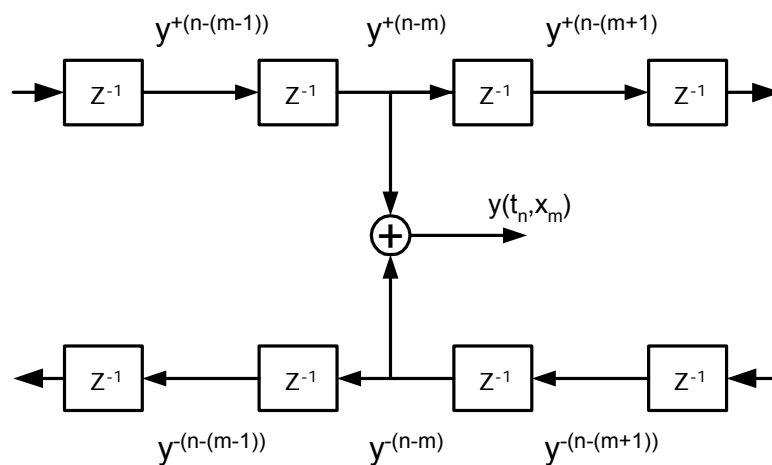
Ha térbeli mintavételezés periódusát az időbelihez igazítjuk, akkor a képletet egyszerűsíthetjük:  $\Delta x = c\Delta t$ . Ekkor a fenti egyenlet a következőképpen írható fel:

$$y(t_n, x_m) = y^+((n-m)\Delta t) + y^-((n+m)\Delta t). \quad (3.2)$$

Mivel a  $\Delta t$ -vel az argumentum minden tagját meg kell szorozni, ezért bevezethetjük a következő jelölést:  $y(k\Delta t) = y(k)$ . Így a fenti egyenletet felírhatjuk az alábbi alakban, mivel egy térbeli, vagy időbeli elmozdulás a mintákon ugyanazt jelenti [Smith 1992]:

$$y(t_n, x_m) = y^+(n-m) + y^-(n+m). \quad (3.3)$$

A fenti egyenletet megvalósíthatjuk két késleltetősorral, ahol a húr függőleges elmozdulását a két késleltetősor azonos térkoordinátájú mintáinak összegeként számíthatjuk. Ezt szemlélteti a 3-2. ábra [Smith 1992].



3-2. ábra A hullámvezető szemléltetése [Smith 1992]

A hullámegyenlet bármilyen, a húr mozgását jellemző változó segítségével felírható. Használhatjuk tehát a húr pontjainak keresztirányú elmozdulását, sebességét, gyorsulását, vagy akár a rájuk ható erőt is [Smith 1992].

### 3.2 Lezárt húr hullámvezető modellje



A húrok két vége rögzített. A lezárás impedanciájának függvényében változik a visszavert hullámok amplitúdója. Mivel a kalapács által beadott gerjesztés erő jellegű, ezért érdemes olyan mennyiséget felvenni a hullámvezető változójának (az előző fejezet végén láthattuk, hogy többféle mennyiség közül választhatunk), hogy az erőt könnyen át tudjuk rá számítani. A húr karakterisztikus impedanciáját a következőképpen definiálhatjuk:

$$Z_0 = \frac{F^+}{v^+} = -\frac{F^-}{v^-}, \quad Z_0 = \sqrt{E\rho}; \quad (3.4)$$

ahol  $F^+$  és  $v^+$  a jobb-  $F^-$  és  $v^-$  a bal felé haladó erő és sebesség hullámok,  $E$  a húr feszültsége Newtonban,  $\rho$  pedig a húr sűrűsége. A 3.4 egyenlet kapcsolatot teremt a húr pontjainak sebessége, és a rájuk ható erő között. Így, ha a hullámvezető változójának a húr pontjainak keresztirányú sebességét veszem, akkor a kalapács modellből adódó gerjesztő erőt ennek segítségével könnyen át tudom majd sebességre számítani: csupán le kell osztani az erőt az impedancia kétszeresével, és már lehet is a húrba csatolni az így kapott értéket (ld. 3-3. ábra). Ha a húr  $Z$  impedanciával zárjuk le, akkor a  $Z = Z_0$  esetet kivéve a hullámok visszaverődnek. A húrponatok transzverzális sebességére vonatkozó reflexiós tényező a következőképpen számítható:

$$r_v = \frac{v^-(l,t)}{v^+(l,t)} = \frac{Z_0 - Z}{Z_0 + Z}. \quad (3.5)$$

Egy tökéletesen szilárd lezárás végtelen lezáró impedanciának felel meg. Ez azt jelenti, hogy a sebesség hullámok ugyanakkora amplitúdóval, de ellenkező előjellel ( $r_v = -1$ ) verődnek vissza.

Ha a húr egy véges  $Z > Z_0$  impedanciával zárjuk le, akkor a reflexiós tényező valamivel kisebb lesz, mint 1. Ha a lezáró impedancia valós, akkor a reflexiós tényező is valós szám. A hullámot annyiszor kell megszorozni  $r$ -el, amennyiszor áthalad a lezáráson. Vagyis a kialakult állóhullám csillapodni fog  $\tau$  időállandóval. Ezt az időállandót a következőképpen kaphatjuk meg:

$$e^{-t/\tau} = |r_v|. \quad (3.6)$$

Feltételezve, hogy  $t = 1/f_0$ , mivel egy periódus alatt csak egyszer csillapodik a hullám:

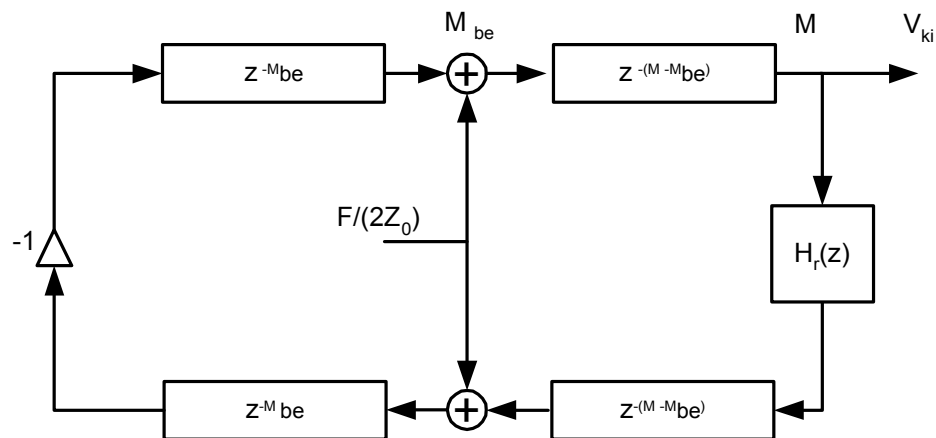
$$\tau = -\frac{1}{f_0 \ln |r_v|}; \quad (3.7)$$

ahol  $r_v$  a transzverzális sebesség reflexiós tényezője,  $f_0$  pedig az alapharmonikus frekvenciája. Ha mindkét véget véges  $Z$ -vel zárjuk le, akkor a fenti képlet a következőképpen módosul:

$$\tau = -\frac{1}{f_0 \ln r_v^2}. \quad (3.8)$$

Nem csak a lezárás okoz csillapítást. Mint láhattuk, a hűroknak van saját vesztesége, és diszperziója is (2.8 és 2.9 egyenletek). Mivel a hűr viselkedését csak két pont között vizsgáljuk, ezért a csillapítás és a diszperzió teljes hűrra vonatkozó számítását elég egy pontban, a hűr végén elvégezni [Smith 1992]. Tehát a hűr végére egy frekvenciafüggő, komplex lezárást kell illeszteni, ami magában foglalja mind a hűr csillapítását és diszperzióját, mind a végződés csillapítását.

A komplex, frekvenciafüggő reflexió egy lineáris szűró ( $H_r(z)$  ld. 3-3. ábra), vagyis csak ennek a szűrónek az együtthatóit kell úgy méreteznünk, hogy a hűr a valódi hűrhoz hasonlóan viselkedjen. A megvalósítás egyszerűsítésére megtehetjük azt, hogy a lezárás csillapítását is egy végnél vesszük figyelembe:  $g = r_v r_v$ , ahol  $g$  az egy oldalra összevont reflexiós tényező. Így a másik oldalon csupán egy  $-1$ -es szorzóra van szükség.



3-3. ábra A nem ideális hullámvezető modellje

Az 3-3. ábrán látható a hullámvezető modellezéséhez szükséges két késleltetősor. Mindkét késleltetősor  $M$  mintából áll. A kalapács jelét az  $M_{be}$ -ik minta után juttatjuk be

a hullámvezetőbe. A húr alapharmonikusát a késleltetősor hossza határozza meg, és a következőképpen számítható ki:

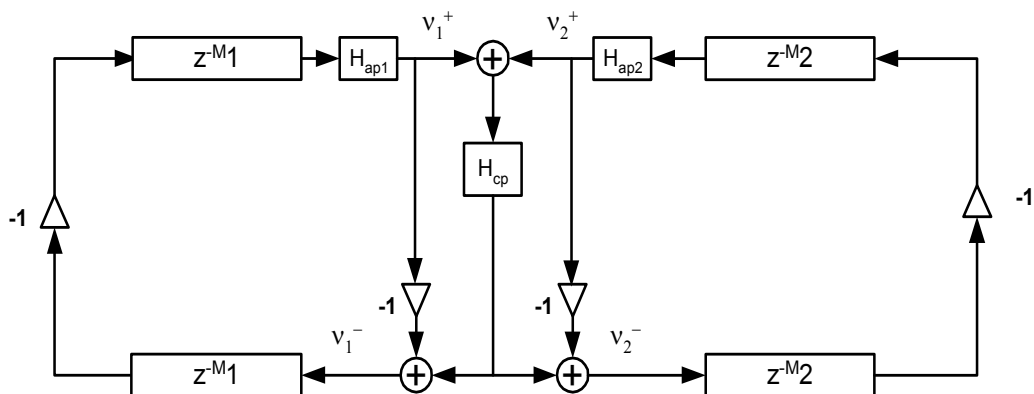
$$f_0 = \frac{f_s}{N}; \quad (3.9)$$

ahol  $f_s$  a mintavételi frekvencia  $N$  pedig a teljes késleltetősor hossza. Ezt a képletet úgy kaphatjuk meg, hogy tudjuk, hogy a húron állóhullámok alakulnak ki, és az alapharmonikus hullámhossza a húr hosszának kétszerese. Mivel  $N$  nem egész számra is adódhat ezért szükség lesz mindentáeresztő törtrész-késleltető szűrőre is a finomhangoláshoz. Ezt a szűrőt is beleépíthetjük a 3-3. ábra lezáró  $H_r$  szűrőjébe.

### 3.3 A csatolás modellezésének lehetőségei

#### 3.3.1 Csatolás megvalósítása több hullámvezetővel

A csatolást megvalósíthatjuk úgy, hogy két hűrt csatlakoztatunk a hídhoz, és feltételezzük, hogy a veszteségek csak a híd impedanciájából származnak (3-4. ábra) [Smith 1993]. Ez közelítés, de a kéthúros elméleti vizsgálatból adódó burkolókat mind meg lehet vele valósítani, megfelelő szűrőket alkalmazva. Smith modelljében a diszperziós szűrőkön kívül csak egyetlen csatolási szűrőre ( $H_{cp}$ ) van szükség. Ez a szűrő lehetne akár egy valós szám is (frekvencia független csatolás). A mindentáeresztő szűrők ( $H_{ap1}$ ,  $H_{ap2}$ ) a finomhangolásért, a hűrok elhangolásáért és a diszperzióért felelősek, ezeket a csatolási szűrőktől függetlenül kell megvalósítani.



3-4. ábra A csatolás megvalósítása Smith szerint [Smith 1993]

A csatolás paramétereit a híd és a húrok impedanciájának segítségével számíthatjuk.

Esetünkben a hídhoz két húr csatlakozik. Ebben a pontban, ha a hidat nem deformálhatónak tételezzük fel, akkor  $v_1 = v_2 = v_b$ , ahol a sebességek rendre az első, a második húr, és a híd sebességei, valamint  $f_b = f_1 + f_2$ . A híd sebessége és a rá ható erő között a következő kapcsolat áll fenn a komplex frekvenciatartományban:  $F_b(s) = R_b(s) V_b(s)$ . Ezt a következőképpen írhatjuk tovább:

$$\begin{aligned}
 R_b(s) V_b(s) &= F_b(s) = F_1(s) + F_2(s) = \\
 &= [F_1^+(s) + F_1^-(s) + F_1^+(s) + F_1^-(s)] = \\
 &= R_1 [V_1^+(s) - [V_b(s)] - V_a^+(s)] + \quad ; \\
 &+ R_2 [V_2^+(s) - [V_b(s)] - V_2^+(s)] = \\
 &= H_b(s) [R_1 V_1^+(s) + R_2 V_2^+(s)]
 \end{aligned}
 \tag{3.10}$$

ahol  $R_i$  az  $i$ -edik húr hullámimpedanciája, és

$$H_b(s) = \frac{2}{R_b(s) + R_1 + R_2} .
 \tag{3.11}$$

Ha adott a szűrő kimenete:  $v_b(t)$ , akkor a beérkező hullám sebességéből a kimenő hullám sebességét a következőképpen számíthatjuk:

$$\begin{aligned}
 v_1^-(t) &= v_b(t) - v_1^+(t) \\
 v_2^-(t) &= v_b(t) - v_2^+(t)
 \end{aligned}
 \tag{3.12}$$

Mivel  $V_2^-(s) = H_b(s) R_1 V_1^+(s) = H_b(s) F_1^+(s)$  amikor  $V_2^+(s) = 0$ , és fordítva, ezért  $H_b$ -t felfoghatjuk a húrok keresztátviteli admittanciájaként.

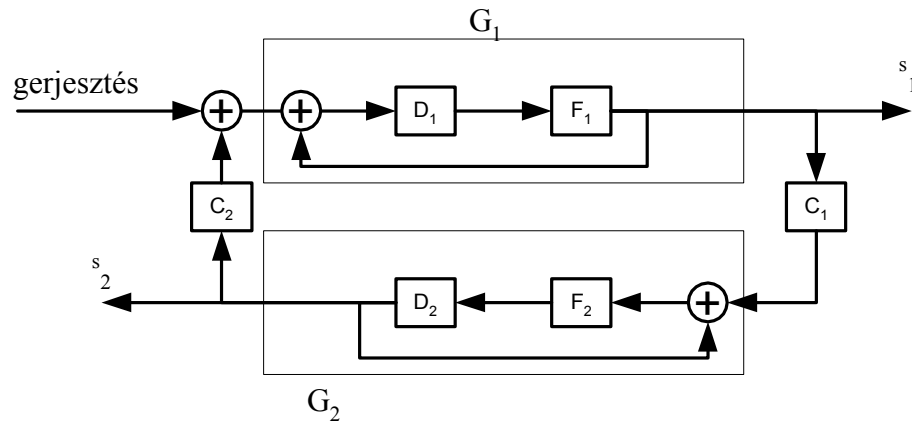
Ha a két húr impedanciája egyforma, akkor a 3.10 egyenletből kiemelhetjük az impedanciát, és így a 3.11 egyenlet a következőképpen írható fel:

$$H_b(s) = \frac{2R}{R_b(s) + 2R} = \frac{2}{2 + \frac{R_b(s)}{R}} .
 \tag{3.13}$$

Egy általános csatolási mátrixban minden helyen egy átviteli függvény áll, vagyis általános esetben  $N$  db csatolási szűrő kellene. Legegyszerűbb esetben, amikor csak két húrunk van mindössze egy átviteli függvényre van szükségünk. Ennek a számnak az

amplitúdója a csillapítást, fázisa pedig a késleltetést jellemzi. A fenti analitikus elemzésben a húrokat csillapításmentesnek tételeztük fel.

Hasonló megoldást javasolt egy francia kutatócsoport [Aramaki et al 2001], de a csatolást aszimmetrikusnak tételezték fel, a húrokat pedig veszteségesnek (3-5. ábra).  $D_1$  az első hullámvezető késleltetőszora,  $F_1$  a reflexiós szűrője,  $C_1$  az egyes hullámvezetőből a kettesbe csatolt jelet szűri.



3-5. ábra Két húr csatolásának megvalósítása [Aramaki et al.]

Így a harmonikusok burkolójának időbeli alakulását két csatolási szűrő is befolyásolja. Ennek hátránya viszont, hogy így – a hullámvezető reflexiós szűrőivel együtt – négy szűrőt kell tervezni. Ezeknek a szűrőknek a tervezésére felvett hangok analízise alapján javasoltak megoldást. Ezen módszer megvalósításának számítási igénye a két csatolási szűrő miatt mindenképpen jóval nagyobb, mint a Smith-modell alapú rendszereké.

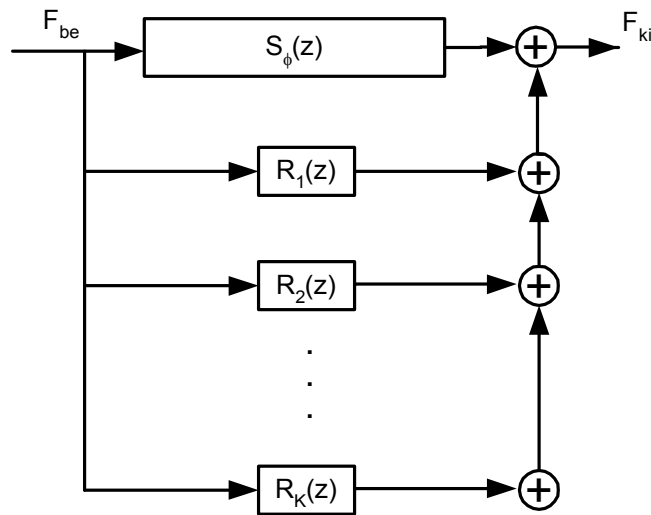
### 3.3.2 A kétütemű lecsengés és a lebegés megvalósítása rezonátorbankkal

A csatolás által előállított burkolók szimulációjára egy másik lehetőség a következő módszer [Bank 2000]. A megoldás a hullámvezető rezonátoros megvalósításán alapul. A hullámvezető átviteli függvénye felírható az alábbi alakban:

$$\frac{F_{out}}{F_{in}} = \frac{1}{N} \left( \frac{a_1}{1 - z^{-1} p_1} + \dots + \frac{a_N}{1 - z^{-1} p_N} \right) z^{-M}, \quad p_k = r_k e^{j\theta_k}; \quad (3.14)$$

ahol  $M$  a húr hossza időmintákban,  $N=2M$ ,  $a_k$ -k a rezonátorok komplex amplitúdói,  $\theta_k$  - k a frekvenciái. Mivel a pólusok komplex konjugált párokat alkotnak, ezért megvalósíthatók másodfokú szűrőkként.

A megvalósításban csak egy hullámvezetőt kell használni, és e mellé párhuzamosan csatolunk rezonátorokat ahelyett, hogy egy második hullámvezetőt is megvalósítsanak. Ezt a struktúrát a 3-6. ábrán láthatjuk.  $S_\phi$  a hullámvezető  $R_k(z)$ -k pedig a megvalósított rezonátorok.



3-6. ábra A kétütemű lecsengés és a lebegés megvalósítása rezonátoros megoldással

A hullámvezető és a rezonátorok gerjesztőjele közös. Ennek a megvalósításnak az előnye, hogy nem kell két hullámvezetőt megvalósítani, amelyek számításigénye rendkívül nagy. Hátránya viszont, hogy már nem értelmezhető fizikailag, így a burkolók megfelelő beállításához szükséges paramétereket absztrakt képletekkel kaphatjuk meg.

### 3.4 A kalapács modellezése

A kalapács és húr között fellépő erőgörbe legegyszerűbb modellje egy Hanning impulzus [Garnett 1987]. Ez a modell nem veszi figyelembe a húr végekről visszapattanó hullámok erőgörbét befolyásoló hatását.

Pontosabb a kalapács modellje, ha a 2.1 és 2.2 egyenletekből álló nemlineáris differenciál egyenletrendszer mintavételezésével előálló differenciaegyenleteket megoldjuk.

Az első egyenletet a következőképpen írhatjuk fel diszkrét alakban:

$$F(t) = m_h a_h(t) = m_h \frac{dv_h(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( m_h \frac{v_h(t_1) - v_h(t_2)}{\Delta t} \right) = m_h \frac{v_h(t_1) - v_h(t_2)}{t_s}, \quad (3.15)$$

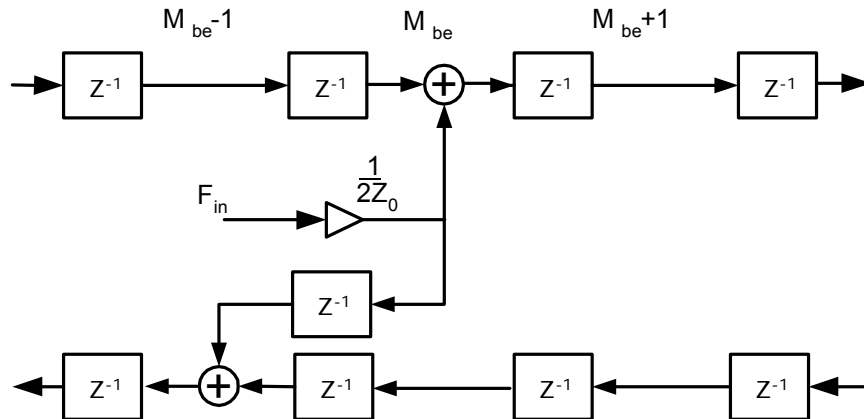
ahol  $t_s$  a mintavételi frekvencia, és eléggé kicsi ahhoz, hogy a közelítés jó legyen. A fenti egyenlet integrálásával meghatározhatjuk a kalapács sebességét, még egyszer integrálva pedig a kalapács elmozdulását:

$$\begin{aligned} \frac{F(t)}{m_h} &= a_h \\ v_h &= v_h + a_h t_s \quad . \\ y_h &= y_h + v_h t_s \end{aligned} \quad (3.16)$$

Ezután, ha ismerjük a húr elmozdulását az adott időpillanatban, akkor a 2.1 és 2.2 egyenletek felhasználásával meghatározhatjuk az erőt.

A kalapács által a húrra kifejtett erőnek a húrba csatolására alapvetően két lehetőségünk van. Az első, hogy először kiolvassuk a jelet a hullámvezetőből, hozzáadjuk a gerjesztést, visszaírjuk az összeget a hullámvezetőbe, majd minden értéket eggyel eltolunk a hullámvezetőben. Ebben az esetben a ráütés helyén a húr sebessége mindig 0 lesz, hiszen  $\Delta y = 0$ . Mivel ebből a pontból származik a visszacsatolás a kalapácsba, ezért az úgy viselkedik, mintha merev falnak ütközne. Ha viszont először adjuk hozzá a gerjesztőjelet, és utána olvassuk ki a húr sebességét, akkor az első időpillanatban kétszer akkora lesz a húr kitérése, mint amekkorának lennie kellene. Folytonos esetben ez a jelenség azért nem mutatkozik, mert ha az alsó és felső hullámvezetőbe egy-egy Dirac impulzust csatolunk, akkor azok  $T_s/2$  idő alatt a térrész középpontjából a szélére vándorolnak, tehát nem tartózkodik két Dirac impulzus  $T_s$  ideig ugyanabban a térrészben. Viszont diszkrét rendszer esetén az egységimpulzus nem tud a mintavételi idő törtrésze alatt továbbhaladni, az csak az egész számú többszöröseinél tud. Ezt az effektust úgy tudjuk kivédeni, hogy a gerjesztés

időpontjában ( $M_{be}$ ) a gerjesztést csak az egyik húrhoz adjuk hozzá, a másik húrhoz csak egy időszellettel később (ld. 3-7. ábra) [Bank 2000].



3-7. ábra Az erőbeadás helyes modellezése

### 3.5 A csillapító modellezése

A reflexiós tényező ( $r_v$ ) megváltoztatásával könnyen modellezhetjük a csillapító viselkedését. Az  $r_v \approx 0.8$  egy jó közelítés nagyjából minden hangra. A hang ilyen csillapítása a valóságosnál sokkal tisztább hangot eredményez, és főleg akkor jó közelítés, ha a csillapodás nagy. A mély hangoknál finomabb modellezésre lenne szükség. Viszont figyelni kell arra, hogy a hirtelen váltás tranzienszt eredményez, ezért valószínűleg jobb lesz a megoldás, ha több lépésben csökkentjük a reflexiós tényezőt az eredetiről a 0.8 értékre [Bank 2000].

### 3.6 A rezonátorlemez modellezése

A rezonátorlemez tulajdonképpen egy háromdimenziós hullámvezető, legjobb modellje egy háromdimenziós hullámvezető struktúra lenne. Ez a rendszer sajnos távol van a valós időben megvalósítható algoritmusoktól. Ehelyett alkalmazhatunk kétdimenziós hullámvezetőt [Garnett 1987]. Garnett ezt 6 különböző hosszúságú hullámvezetővel valósítja meg, amelyeket a hídhoz kapcsol.

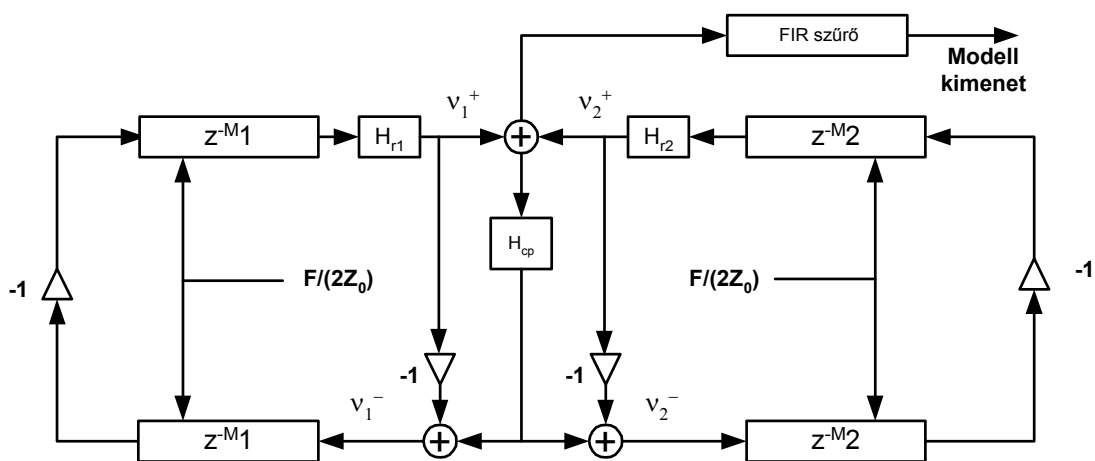
A rezonátorlemez modellezhetjük egyszerűen egy FIR szűrővel is, amit a rögzített impulzusválasz első pár ezer mintájából alakíthatunk ki. Nem ez a leghatékonyabb technika, de a modell egyszerűsítése miatt ezt választottam.



### 3.7 A zongora modell

A 3-8. ábrán az általam megvalósított fizikai alapú zongora modellje látható. Az kalapács modelljének a 2.1 és 2.2 egyenletek numerikus megoldását választottam. Az erő becsatolását a 3-7. ábrán látható módszer alapján végeztem. A húrok közötti csatolásra Smith modelljét alkalmazta.

Mint majd látni fogjuk a Smith féle modellel megvalósítható a módusonkénti két burkoló. Ezek mellé a modellben mindössze a diszperziós szűrőkre, a finomhangolást biztosító szűrőkre és az elhangolást biztosító szűrőkre van szükség. A rezonátorlemez modellje egy FIR szűrő, amelybe a húr kimenetét közvetlenül továbbítom.



3-8. ábra A megvalósított zongora modell

A 3-8. ábrán  $H_{r1}$  és  $H_{r2}$  a két reflexiós – mindent áteresztő – szűrő.  $M_1$  és  $M_2$  a hullámvezetők hosszai.  $H_{cp}$  pedig a csatolási szűrő.

## 4 Húrparaméter becslés

A húr paramétereinek beállítása a húr hosszának, a reflexiós és a csatolási szűrők együtthatóinak meghatározását jelenti. Ebben a fejezetben a húr hosszának kiszámításával, valamint a csatolási szűrő tervezésével foglalkozom. A diszperziós és a törtrészkesleltető szűrő tervezésének részletei megtalálhatók például a következő irodalmakban: [Laakso 1996], [Rocchesso és Scalcon 1996].

### 4.1 Hullámvezető hosszának meghatározása

A hullámvezető hosszát kiszámíthatjuk, ha meghatározzuk az alapharmonikus frekvenciáját. Innen, mivel térben és időben egyenletesen mintavételezünk:

$$N = \frac{f_s}{f_0}; \quad (4.1)$$

ahol  $N$  a teljes hullámvezető hossza (az alsó és a felső együtt).

#### 4.1.1 Az alapharmonikus meghatározása sávselektív Fourier transzformációval

Ez az eljárás az FFT egy finomított változata. Az FFT felbontása a spektrum periodicitása miatt  $F_s/N$ , ahol  $F_s$  a mintavételi frekvencia,  $N$  pedig az FFT pontszáma. Tehát például egy 44100Hz mintavételi frekvenciájú digitális jelfolyam egy  $2^{16}$  pontos részletét FFT-vel vizsgálva a felbontás 0.6729Hz. Figyelembe kell vennünk, hogy nekünk a pontos hangoláshoz nagyon finom felbontás szükséges, ezen kívül, ha így szeretnénk meghatározni a lebegést összetevő két módust, akkor még ennél is finomabbra. Mivel a processzorok számítási kapacitása korlátos, ezért a pontszám növelése nem vezet eredményre (túl sokáig fut az analízis). A másik lehetőség a mintavételi frekvencia csökkentése. Mivel a digitális jelek spektruma periodikus, periódusuk pedig a mintavételi frekvencia, ezért figyelmünket elég a spektrum egy periódusára összpontosítani. Ha a mintavételi frekvenciát csökkentjük, csökken a jel

spektrumának periódusa, így az előzőleg feltételezhetően a mintavételi tétel betartásával mintavételezett jelünk spektruma átlapolódhat. Ezért a mintavételi frekvencia csökkentése (decimálás) előtt mindenképpen aluláteresztő szűrést kell a jelen végrehajtani. A megfelelő szűrés után végrehajtott decimálás a jel spektrumát nem torzítja.

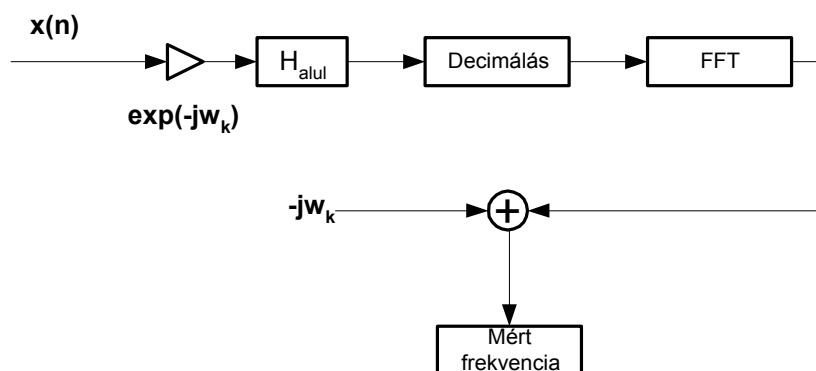
Mivel a leghatásosabban úgy csökkenthető a sáv szélesség, ha a hasznos jelkomponensek az alapsáv környékén vannak, ezért a szűrés előtt alapsávra kell keverni a vizsgált spektrumrészletet. Egy komplex exponenciálissal való szorzással a számunkra fontos spektrumrészletet az alapsáv környékére keverhetjük. Ezt könnyen be is láthatjuk. Egy jel Fourier transzformáltját a következő képlettel definiáljuk:

$$F(t) = \sum f(t) \exp(-j\omega t). \quad (4.2)$$

Most tekintsük a komplex exponenciálissal szorzott  $g(t) = f(t) \cdot \exp(-j\omega_0 t)$ . Ekkor a spektrum:

$$F(t) = \sum g(t) \exp(-j\omega t) = \sum f(t) \exp(-j(\omega + \omega_0)t). \quad (4.3)$$

Ezután egy keskeny aluláteresztő szűrővel a jelet megsűrjük. Ekkor csak az alapsáv környéki harmonikustartalom marad a jelben. Ezután decimálással lecsökkentjük a mintavételi frekvenciát (4-1. ábra).



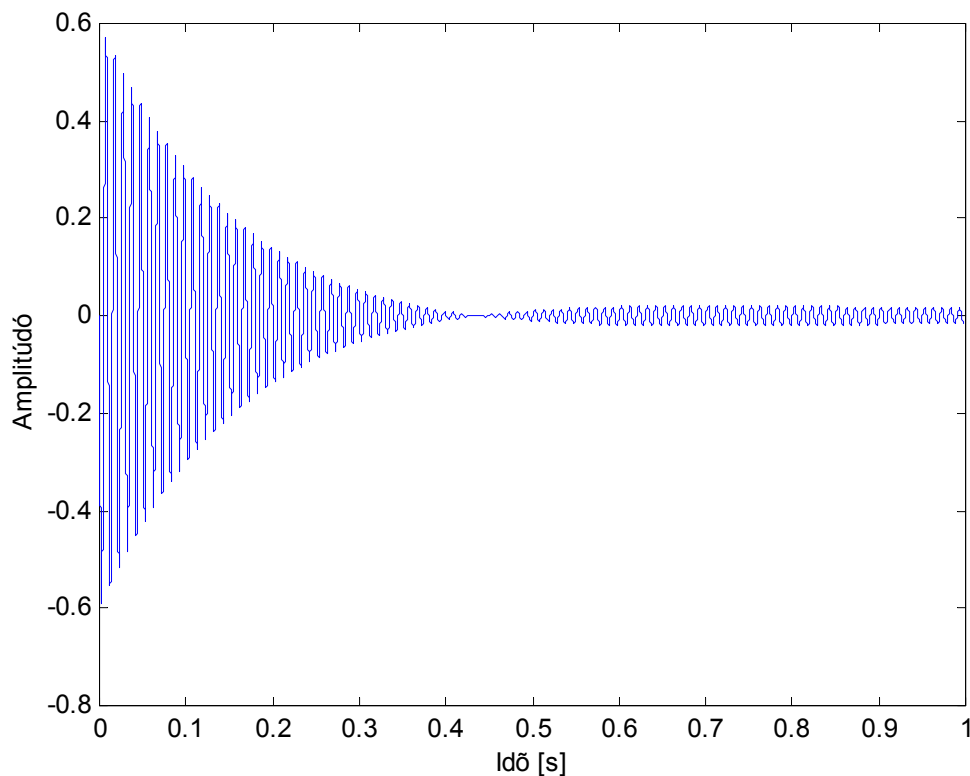
4-1. ábra Sávselektív Fourier transzformáció

Ezzel az eljárással elvileg elérhető lenne a szükséges felbontás, azonban figyelembe kell venni két fontos jelenséget. (1) Ha a mintavételi frekvenciát csökkentjük, romlik az időbeli felbontás. (2) Ha a vizsgált jelben olyan lecsengő szinuszok vannak, amelyek fázisa nem azonos, akkor az FFT végrehajtása után a spektrumban olyan helyen is csúcsok lesznek, ahol elméletileg csak egy csúcs lehetne.

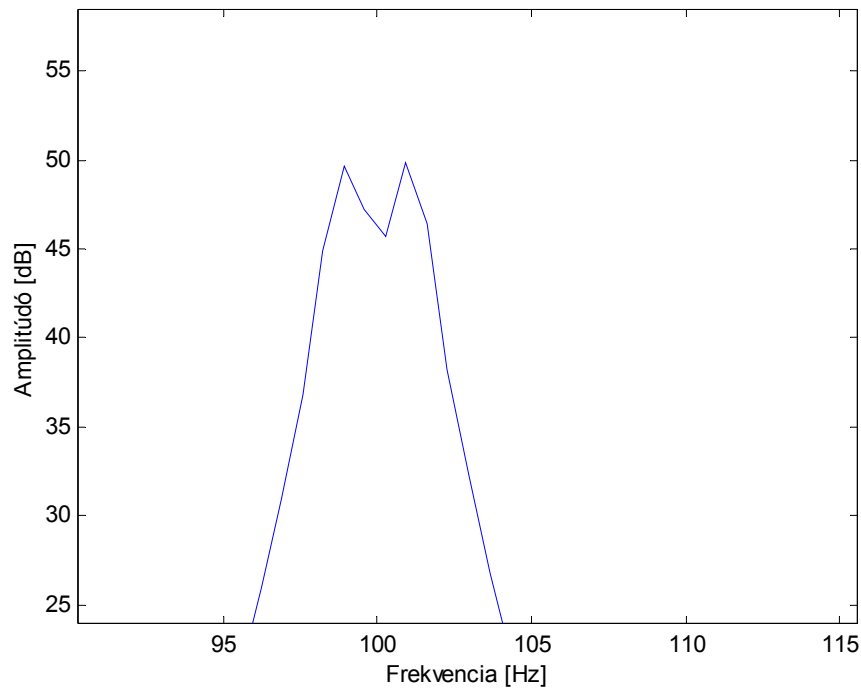
Vizsgáljuk az alábbi jelet:

$$f(t) = A_1 \exp\left(\frac{t * ts}{\tau_1}\right) \sin(2\pi f t * ts) + A_2 \exp\left(\frac{t * ts}{\tau_2}\right) \sin(2\pi f t * ts + \pi); \quad (4.4)$$

ahol  $A_1=0.8$ ,  $A_2=0.2$ ,  $\tau_1=0.42$   $\tau_2=0.18$ . Mivel a jelek a  $\pi$  fázistolás miatt ellentétes fázisúak, ezért a jelnek van olyan szakasza - amikor a két jel egyforma amplitúdójú -, hogy a két lecsengő szinusz éppen kioltja egymást (4-2. ábra). A jel spektruma a 4-3. ábrán látható.



4-2. ábra Két nem azonos fázisú szinuszjel összegének spektruma



4-3. ábra Két nem azonos fázisú szinuszjel összege

A csúcsok nem az FFT nagy felbontásának következményei, hiszen az összeadott szinuszok frekvenciája egyforma. Ez a jelforma a lecsengő lebegésre hasonlít. Lebegés akkor áll elő, ha két körülbelül egyforma amplitúdójú szinuszt összeadunk, ez ugyanis a következőképpen írható fel:

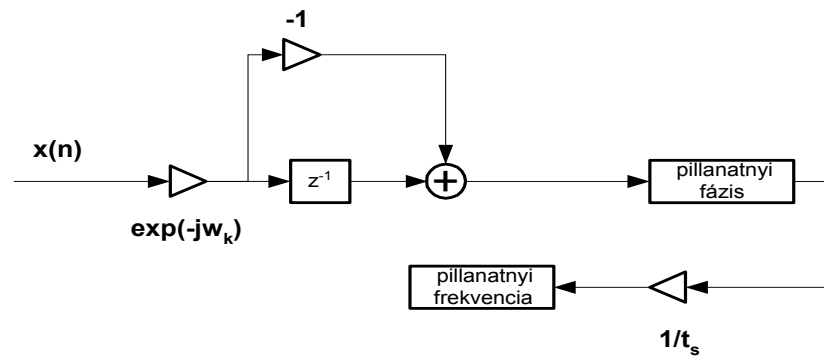
$$A \sin(\omega_1 t) + A \sin(\omega_2 t) = 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right). \quad (4.5)$$

Mivel  $\omega_1 \approx \omega_2$ , így a koszinusztényező sokkal lassabban változik a szinuszhoz képest. Így ezt a jelet felfoghatjuk egy  $(\omega_1 + \omega_2)/2$  körfrekvenciájú jelként, amelynek amplitúdója  $2A \cos(\omega_1 - \omega_2)/2$  és lassan ingadozik 0 és  $2A$  között.

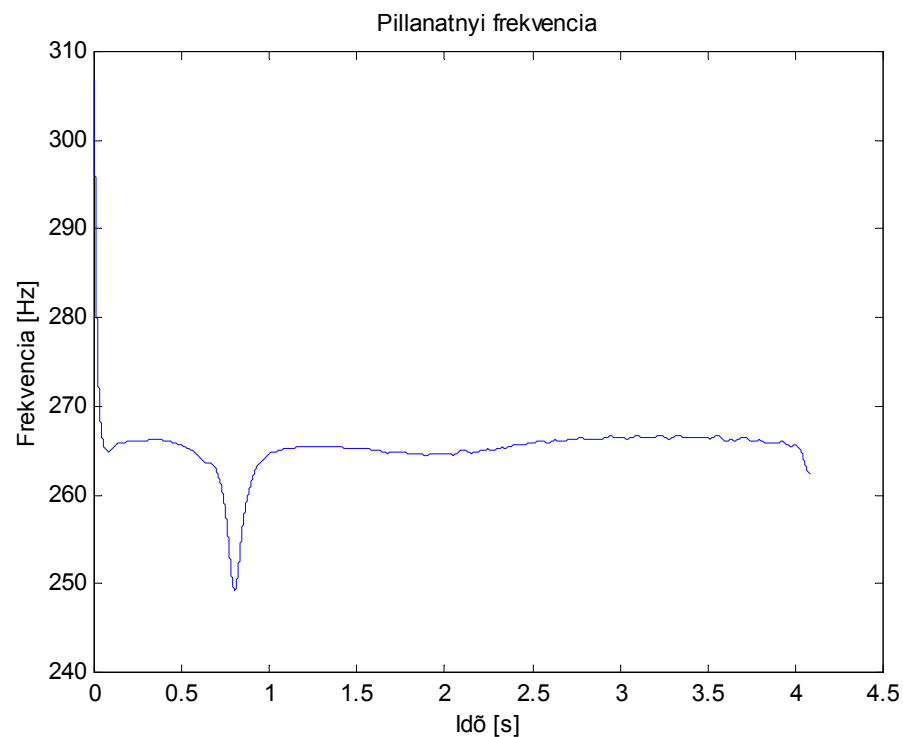
Mivel az FFT alapvetően nem lecsengő szinuszok vizsgálatára alkalmas, ezért nem egy frekvenciát talál meg, hiszen abból nem lehet egy lecsengési idővel előállítani a vizsgált jelet, hanem azon a két frekvencián lesznek csúcsok, amelyekből ez a jel, mint lebegés előállítható. Mivel a tapasztalatok szerint a hullámvezető által előállított jel ilyen is ilyen, ezért olyan módszert kellene találni, amely a fázisugrások ellenére a helyes frekvenciákat és lecsengési időket szolgáltatja.

## 4.1.2 Fázis alapján történő frekvenciamérés

A vizsgálandó jelet lekeverjük a 0 frekvencia környékére, és megsűrjük, hogy csak a lényeges módusok maradjanak a jelben. A lekevert és megsűrjt jel tulajdonképpen egy komplex forgóvektor. Az egy mintavételi idő alatti fázisváltozás a pillanatnyi frekvenciát adja (4-4. ábra).



4-4. ábra Pillanatnyi frekvencia meghatározása

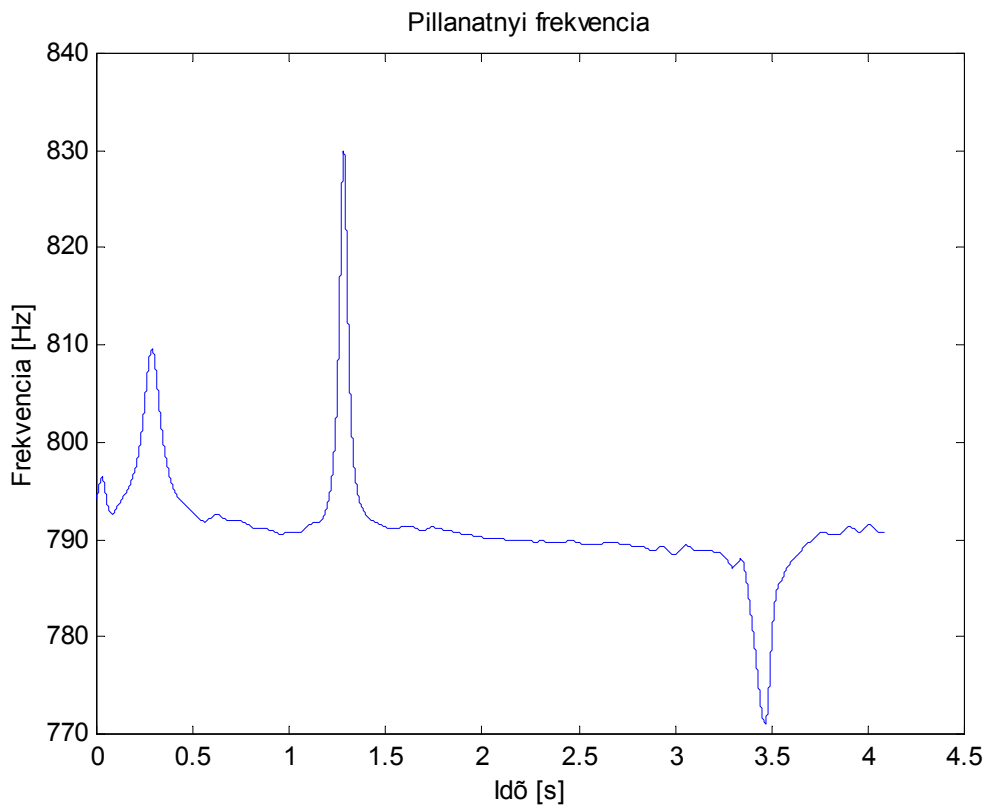


4-5. ábra Az egyvonalas hang első harmonikusának pillanatnyi frekvenciája

A 4-5. ábra az egyvonalas C (továbbiakban C<sup>1</sup>) hang pillanatnyi frekvenciáját ábrázolja. Láthatjuk, hogy ez nem stabil. Így a frekvencia meghatározásához a fázisváltozások átlagát kell venni:

$$f = \frac{d(ph)}{dt} = \frac{ph(t_2) - ph(t_1)}{NT_s}. \quad (4.6)$$

A fő problémát viszont átlagolással nem lehet megoldani. Az 4-5. ábrán ugyanis látszik, hogy a pillanatnyi frekvencia egy helyen ugrásszerűen változik. Ennek az oka nyilvánvalóan, hogy a jel fázisában valahol ugrás van. Ennek oka, hogy a zongorahangoknál is fellép a 4.1.1 fejezetben tárgyalt jelenség. Ez pedig a magasabb felharmonikusoknál hatványozottabban jelentkezik. A 4-6. ábra a C<sup>1</sup> 3. felharmonikusának pillanatnyi frekvenciáját mutatja, ezen még szembeötlőbb, hogy időnként ugrásszerűen változik a jel pillanatnyi frekvenciája, mind pozitív, mind negatív irányban. A probléma kiküszöböléséhez a figyelembe vett pillanatnyi fázisokat az amplitúdóval súlyozni kell, ezzel kivédhető az effektus, mivel a fázisváltozások környezetében kicsi az amplitúdó (ld. 4-2. ábra).



4-6. ábra A C<sup>1</sup> hang 3. felharmonikusának pillanatnyi frekvenciája

## 4.2 Auto Regressive Moving Average modellezés

### 4.2.1 Auto Regressive (AR) modell illesztése

Feltételezzük, hogy lineáris, kauzális, időinvariáns rendszereket (LTI = Linear Time Invariant) vizsgálunk. Az ilyen rendszerek átviteli függvénye, ha a rendszernek kevesebb zérusa van, mint pólusa, és a pólusok egyszeresek felírható az alábbi alakban:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_p z^{-p}} = \frac{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^p a_k z^{-k}} = \frac{A_1}{1 - p_1 z^{-1}} \dots + \frac{A_p}{1 - p_p z^{-1}}. \quad (4.7)$$

Vagyis ezek a rendszerek felfoghatók egy végtelen impulzusválaszú (IIR) szűrőként, amelyek impulzusválasza felírható rezidumos alakban, ahol  $p_k$  a nevező polinomjának  $k$ -ik gyöke. A rezidumos alak minden tagja egy lecsengő exponenciális  $z$  transzformáltja. Mivel a nevező polinomja valósegýtthetős, ezért a pólusok komplex konjugált párokban fordulnak elő, amelyek felírhatók egy exponenciálisan lecsengő szinuszként. Ebből is látszik, hogy egy ilyen rendszer impulzusválasza exponenciálisan lecsengő szinuszokból állítható össze. Tudjuk, hogy minden zongorahang lecsengő komplex exponenciális tagok összegeként írható fel, tehát felfoghatjuk egy IIR szűrő impulzusválaszaként. Ezért ha tudunk találni olyan rendszert, amelynek impulzusválasza a keresett móduspár, akkor ennek a rendszernek a pólusaiból és a rezidumaiból leolvashatjuk a módusok minden szükséges paraméterét. A pólus valós része az időállandó reciproka, a képzetes része pedig a körfrekvenciája. A rezidumok az adott módus amplitúdóját adják közvetlenül. Sokféle módszer létezik arra, hogyan találjunk olyan LTI rendszert, amely optimálisan illeszkedik egy megadott impulzusválaszra. Ezek közül az egyik legfontosabb a lineáris predikció [Karjalainen et al. 2002].



### 4.2.1.1 Lineáris predikció

Lineáris predikció esetében azt feltételezzük, hogy  $x(n)$  felírható az öt megelőző minták lineáris kombinációjaként:

$$\hat{x}(n) = \sum_{i=1}^P a_i x(n-i). \quad (4.8)$$

Amikor a legkisebb négyzetek módszerével minimalizáljuk a hibát  $x(n)$  és  $\hat{x}(n)$  között, akkor az autokorrelációs együtthatók központi szerephez jutnak.

$$r_x(k) = \sum_{i=0}^{P-1} x(i)x(i+k) \quad (4.9)$$

A leggyakrabban használt lineáris predikciós módszer az autokorrelációs módszer, ahol az optimális  $a_i$  modellparamétereket egy lineáris mátrixegyenletből kapjuk,

$$\begin{bmatrix} r_0 & r_1 & r_2 & \cdots & r_{P-1} \\ r_1 & r_0 & r_1 & \cdots & r_{P-2} \\ r_2 & r_1 & r_0 & \cdots & r_{P-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{P-1} & r_{P-2} & r_{P-3} & \cdots & r_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \cdots \\ a_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \cdots \\ r_P \end{bmatrix}; \quad (4.10)$$

ahol  $r_k$ -k a fenti egyenletből számított autokorrelációs együtthatók és  $P$  a csak pólusokkal rendelkező szűrő pólusszáma. Az  $a_i$  együtthatók a 4.7 egyenlet nevezőpolinomjának együtthatói. A fenti módszer csak abban az esetben használható, ha a vizsgált rendszer pontosan AR típusú. Ellenkező esetben sajnos nem lehet pontosan illeszteni. Ha például nem lecsengő szinuszjelet, hanem koszinuszt vizsgálunk, akkor a fázist már nem tudjuk pontosan illeszteni [Karjalainen et al. 2002].

### 4.2.2 Auto Regressive Moving Average (ARMA) modellezés

Az ARMA modellezés általános típusú szűrőt próbál illeszteni a megadott impulzusválaszra, így sokkal többféle rendszer modellezésére alkalmas. Sajnos megvalósítása sokkal bonyolultabb, mint az AR modellezésé, mivel nem lehet felírni általánosan zárt alakban a megoldást, ahogy ezt az AR modellezésnél megtehettük, ezért

nemlineáris optimalizációs algoritmusokra van szükségünk. Az ARMA becselő algoritmusok iteratívak, és egy jó AR modellből indulnak, majd az optimális paraméterértékek felé iterálnak. Sajnos ezeknél az optimalizációs eljárásoknál előfordulhat, hogy lokális maximum felé tart az algoritmusunk. Kétféle módszer használatos erre a célra: a Prony és a Steiglitz-McBride módszerek.

### **4.2.3 Optimalizációs algoritmusok**

Prony módszere az első  $N+1$  mintát illeszti pontosan, míg a pólusok segítségével illeszti a kapott mintából maradt farokrészt. Mivel az AR illesztés kovarianciatípusú, ezért a kapott szűrő akkor is instabil lehet, ha a modellezett rendszer nem az [Karjalainen et al. 2002].

A Steiglitz-McBride módszer egy szűrőből indul, majd a hibát négyzetesen minimalizálva közelíti ennek a szűrőnek a paramétereit az optimálishoz. Kiindulásként felhasználható például a Prony algoritmus segítségével megkapott szűrő. Sajnos ebben az esetben is elképzelhető, hogy a kapott rendszer instabil lesz [Karjalainen et al. 2002].

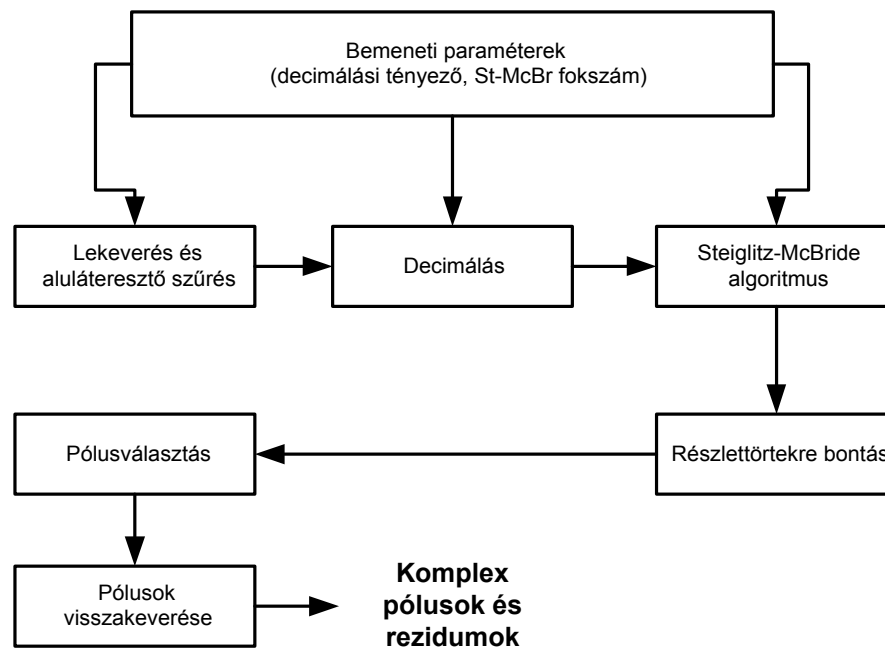
### **4.2.4 A modellezés korlátai**

Mind az AR mind az ARMA modellezésnél figyelmet kell fordítani a megfelelő fokszám kiválasztására. Nincs általános és automatikus módszer arra, hogyan kell ezt optimálisan megválasztani. Itt előnyös, ha előzetes információkkal rendelkezünk a rendszerről, és tudjuk, hogy körülbelül milyen fokszámot válasszunk ahhoz, hogy optimális eredményt kapjunk.

Az ARMA modellezés nagyon hatékony kis fokszámú rendszerek esetén, viszont magasabb fokszámú rendszerek modellezésénél problémák jelentkeznek. Ezek a problémák gyakran a korlátos számítási pontosságban gyökereznek, de a Prony és Steiglitz-McBride módszerek esetében a lehetséges instabilitás is probléma, amelynek valószínűsége ráadásul a magasabb fokszámok esetén növekszik [Karjalainen et al. 2002].

### 4.3 Közeli frekvenciájú módusok keresése frekvencianagyítással

Ha olyan jeleket vizsgálunk, amelyek egymáshoz nagyon közeli frekvenciájú módusokból állnak, akkor ezeknek a frekvenciáknak a meghatározásával problémák adódhatnak, ahogy azt a 4.1.1 fejezetben már tapasztalhattuk. Ennek a problémának a kikerülésére előnyösen használhatjuk az előzőekben megismert ARMA modellezést (4-7. ábra).



4-7. ábra Közeli frekvenciák keresése Steiglitz-McBride módszerrel

Mi a felvett zongorahangokban akarjuk megkeresni a módusokat. Ebben a mintában viszont nagyon sok a módus a felharmonikusok miatt, ezért egy az egyben nem alkalmazhatjuk a Steiglitz-McBride algoritmust, mivel az szinte biztosan instabilitáshoz vezetne. Ezért azt a harmonikust (tulajdonképpen harmonikuspárt), amelyet vizsgálni szeretnénk, először a 0 frekvencia környékére lekeverjük. A lekeverési frekvencia meghatározására akár a fázismérésen, akár az FFT-n alapuló módszert használhatjuk. A lekevert jel a következő:

$$h_m(k) = e^{j\Omega_m k} h(n); \quad (4.11)$$

ahol  $\Omega_m = 2\pi f_m / f_s$ ,  $f_m$  a moduláló frekvencia, és  $f_s$  a mintavételi frekvencia. Ezután egy aluláteresztő szűrést hajtunk végre a jelen, ezzel csak a kívánt harmonikustartalom marad a jelben. A lekeverés és szűrés azért is fontos, mert ezután még egy decimálást is végre kell hajtani a jelen a frekvenciafelbontás növelése érdekében, ehhez pedig szükséges a jel spektrumának sávkorlátozása.

Ezután decimáljuk a jelet egy  $K$  nagyítási tényezővel. Ekkor az új mintavételi frekvencia:  $f_{s,n} = f_s / K$ . A decimálás a  $z$  tartományban megváltoztatja a pólusok helyét (a pólus  $n$  indexe a nagyításra utal):

$$z_{i,n} = z_i^K \quad (4.12)$$

A decimált jelen végrehajtva a Steiglitz-McBride algoritmust, pólusokat és zérusokat kapunk. Számunkra nagyobb jelentőséggel bírnak a pólusok, hiszen, ezek képzetes része hordozza a frekvenciára, míg valós része a lecsengési időkre vonatkozó információkat.

Tehát ha pl.  $z_n = a + jb$  egy pólus, akkor

$$z = \sqrt[K]{z_n} \quad (4.13)$$

lesz az eredeti pólusunk [Karjalainen et al. 2002].

$\text{Im}(z)$  a lekevert mintavételezett jel körfrekvenciája, vagyis a keresett frekvenciát a következőképpen kaphatjuk meg:

$$f_n = \frac{\text{Im}(\sqrt[K]{z_n})}{2\pi} f_s + f_m. \quad (4.14)$$

A csillapítási tényező számítását pedig az alábbi képlettel végezzük:

$$d = \frac{\text{Re}(\sqrt[K]{z_n})}{2\pi} f_s. \quad (4.15)$$

Az aluláteresztő szűrő tranziense miatt a szűrt jel elejét nem érdemes használni az ARMA modell illesztéshez. Emiatt viszont a rezidumok nem a kezdeti amplitúdót fogják megadni, ezt még vissza kell interpolálni a 0. időpontra a kivágás hossza alapján.

Ennek a technikának nagy előnye, hogy a vizsgált sávban drasztikusan csökkenthető az ARMA modellezés fokszáma, ezzel csökkenthető az instabilitás valószínűsége, valamint könnyebben meghatározhatók a nevező polinomjának gyökei

(amik a pólusok). Az ismertett módszert a továbbiakban frekvencianagyításnak nevezem.

A komplex exponenciálissal történt lekeverés és a szűrés miatt a Steiglitz-McBride algoritmus futtatása már egy komplex jelen történik. Ezért a pólusok nem komplex konjugált párokban jelennek meg. A továbbiakban, amikor burkológörbét ábrázolok, mindig a jelek komplex burkolóit értem alatta, és komplex pólusokat (ld. 4-8. ábra, 4-10. ábra, 4-11. ábra, 4-12. ábra, 4-13. ábra). Ezért ahhoz, hogy valós jelet kapjunk vissza a rendszerből minden – értelmes – pólushoz még fel kell venni annak komplex konjugáltját is.

### 4.3.1 A módszer analízise szintetikus jeleken

A 4-7. ábrán látható folyamatábra alapján készített Matlab programmal vizsgáltam általam generált szintetikus jeleket.

Az bemeneti jel lecsengő szinuszjelek összege:

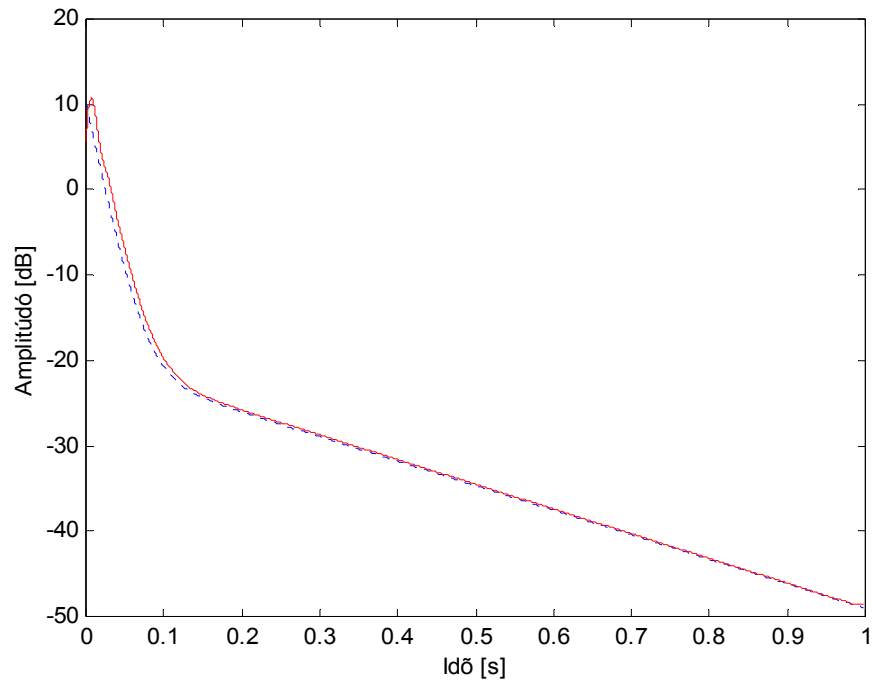
$$s(n) = \sum_{k=1}^M a_k e^{-n/\tau_k} \sin\left(2\pi n \frac{f_k}{f_s} + \Theta_k\right); \quad (4.16)$$

ahol  $M$  a jelben jelenlévő módusok száma,  $f_s$  a mintavételi frekvencia,  $\Theta_k$  a  $k$ -ik kezdőfázisa,  $f_k$  a  $k$ -ik módus frekvenciája,  $\tau_k$  pedig a  $k$ -ik módus időállandója,  $a_k$  pedig a  $k$ -ik módus amplitúdója.

Először a kétütemű lecsengés esetét vizsgáltam  $M = 2$  esetére. A beadott és a szintetizált jelből visszaszámított jelparaméterek a 4-1. Táblázatban láthatók (a fázisokat minden esetben 0-ra választottam). Az eredeti és a visszaszintetizált jel burkolóit a 4-8. ábra szemlélteti.

**4-1. Táblázat Az eredeti és visszaszintetizált jel paramétereinek összehasonlítása kétütemű lecsengés esetén**

	F1 [Hz]	F2 [Hz]	a1	a2	$\tau_1$	$\tau_2$
Eredeti jel	100,0000	100,0000	0,2000	8,0000	0,3000	0,0200
Visszaszintetizált jel	100,0002	100,0018	0,1966	7,8098	0,3020	0,0201

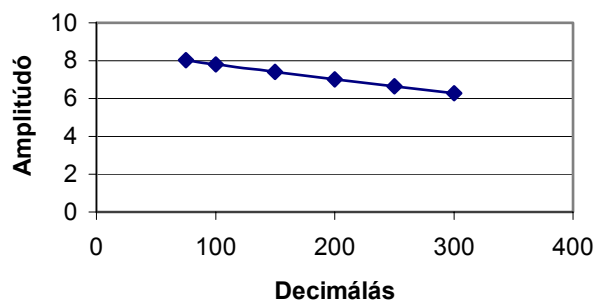


**4-8. ábra A generált kétüteműen lecsengő jel burkolója (folytonos vonal). A visszaszintetizált jel burkolója (szaggatott vonal)**

A fenti eredményeket 200-szoros decimálás mellett kaptam. A decimálás növelése csökkenti a gyorsabban lecsengő harmonikus visszakapott amplitúdóját, mivel ebben az esetben sokkal kevesebb mintát használunk fel az optimalizáláshoz a jel elejéből, amikor annak még nagy az amplitúdója (ld. 4-2. Táblázat, 4-9. ábra).

**4-2. Táblázat A decimálás hatása a meghatározott amplitúdóra**

Decimálás	a1	a2
75	0,1965	8,0192
100	0,1966	7,8097
150	0,1968	7,4045
200	0,1966	7,0146
250	0,1962	6,638
300	0,1956	6,2757



4-9. ábra A meghatározott amplitúdó függése a decimálástól

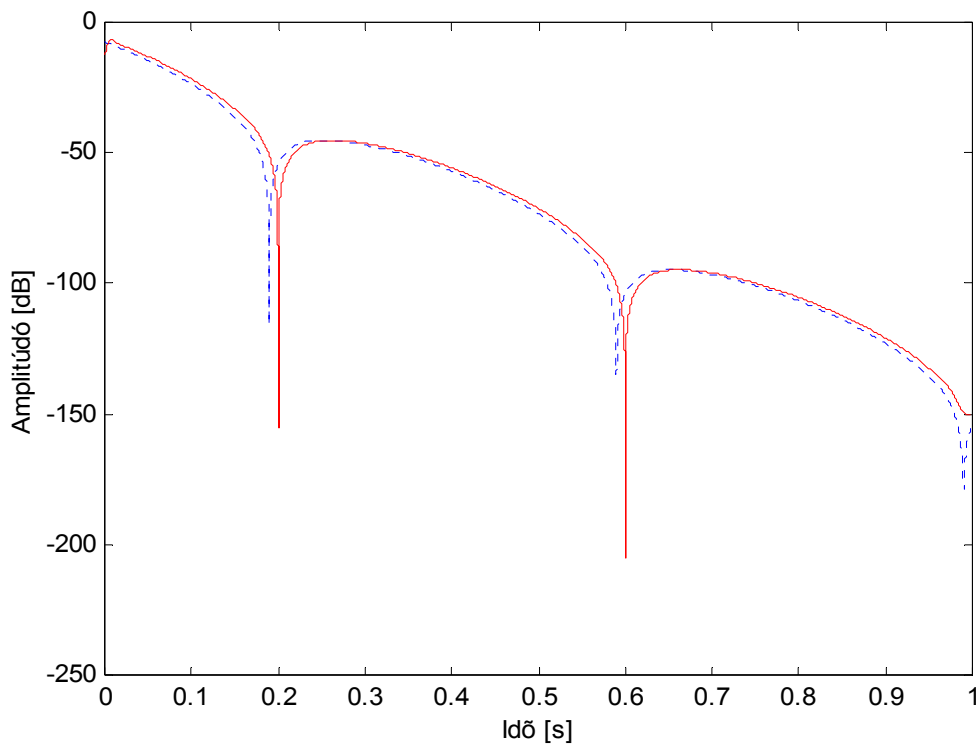
Figyelni kell a szűrő megvalósítására is. Keskeny sávú szűrő kell, de a túl keskeny sáv elronthatja a modellezést a szűrő tranziense miatt.

A második esetben közeli frekvenciájú egyforma lecsengései idejű szinuszjeleket vizsgáltam, a paramétereik a 4-3. Táblázatból olvashatók ki, a burkolók pedig a 4-10. ábrán láthatók:

4-3. Táblázat Az eredeti és visszaszintetizált jel paramétereinek összehasonlítása lebegés esetén

	f1 [Hz]	f2 [Hz]	A1	a2	$\tau_1$	$\tau_2$
Eredeti jel	100,0000	102,5000	0,5000	0,5000	0,0700	0,0700
Visszaszintetizált jel	99,9990	102,5022	0,4685	0,4687	0,0699	0,0699

A modellezés mindkét esetben negyedfokú szűrőt illesztett. Ebből én a két legnagyobb energiataralmút választottam ki. A másik két pólus a szűrt jel tranzienseit illeszti, vagyis nagy hibát ezek elhagyásával semmiképpen nem követünk el.

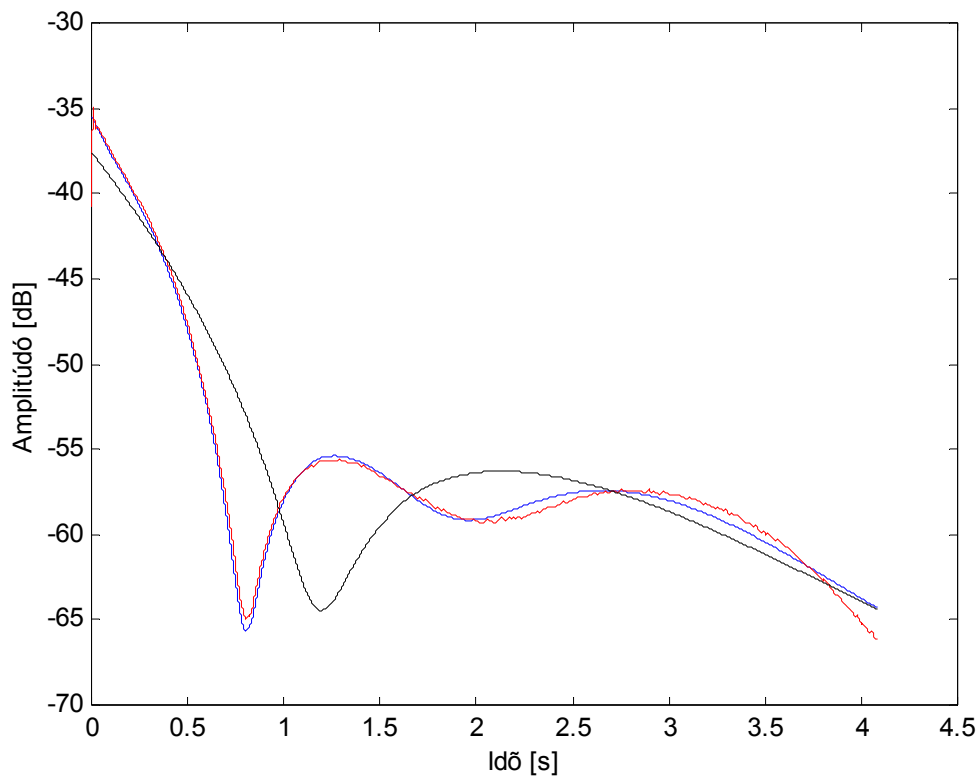


4-10. ábra Két közeli frekvenciájú szinusz burkolója (folytonos vonal). Visszaszintetizált jel burkolója (szaggatott vonal).

#### 4.4 Zongorahangok vizsgálata frekvencianagyítással

Most az előzőekben már kipróbált algoritmust fogom használni valódi zongora felvett hangjainak analizálásához. Ebben az esetben is rendelkezünk információval a rendszerről, de nyilván kevesebbel. A zongorahangok két vagy három húr együttes megütésével keletkeznek, vagyis a kéthúros csatolás elemzésénél kapott eredmények csak korlátozottan használhatók több szempontból is. Három húr megütésénél nyilván más jelenségek is érvényesülnek, mint amiket vizsgáltunk, így valószínűleg a megszürt jel harmonikustartalma is nagyobb. Valódi zongorahangoknál azt is figyelembe kell venni, hogy a csatolás is frekvenciafüggő, a húrok vastagsága különböző, a húrokon longitudinális hullámok is keletkeznek.





**4-11. ábra C<sup>1</sup> zongorahang első harmonikusának burkolója (kék görbe), 2 pólus segítségével visszaszintetizált jel burkolója (fekete görbe), 4 pólus segítségével visszaszintetizált jel burkolója (piros görbe)**

A 4-11. ábrán megfigyelhető, hogy a 2 pólusú szűrő nem olyan pontos modellje a jelnek, mint a 4 pólusú, ami már tényleg elég jó közelítés. Ennek ellenére én a kétpólusú modellt fogom használni, mert erre van megbízhatóan megvalósítható modell. A 4-4. Táblázatban az analízisből kapott 4 módus frekvenciái (f), lecsengési idői (D), és amplitúdói (A) láthatók.

**4-4. Táblázat Felvett zongorahang analíziséből adódó módusok az első harmonikusra**

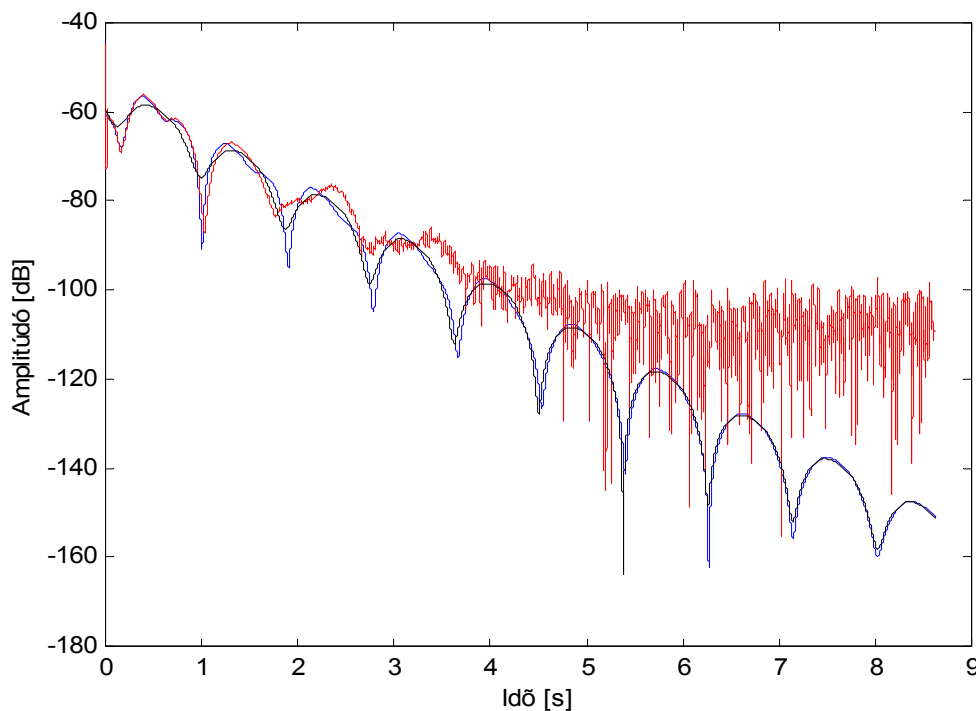
	f [Hz]	D	A
1 módus	263.077	-0,4704	0,0039
2 módus	262.8612	-1,3205	0,013
3 módus	263.4035	-1,1604	0,0046
4 módus	264.4622	-8,2079	0,0019

Az első kettő a két legnagyobb energiataartalmú módus, ezért ezeket használom fel a kétpólusú modellhez.

Az első 20 harmonikusra elvégezve az analízist a kapott pólusok és rezidumok alapján visszaszintetizáltam a hangot, és az eredetihez nagyon hasonlót kaptam.

#### 4.5 Felharmonikusok vizsgálata

A reflexiós és csatolási szűrő tervezéséhez több harmonikus vizsgálatára van szükség. Az optimális az lenne, ha az összes olyan harmonikust vizsgálnánk, ami a zajszint fölött van. Ehhez viszont a már meglévő módszert bővíteni kell. Első feladat a harmonikusok megkeresése. Ez a diszperzió miatt nem triviális feladat. A felharmonikusok elvileg az alapharmonikus egész számú többszöröseinél vannak. A diszperzió miatt a magasabb frekvenciájú harmonikusok gyorsabban terjednek, vagyis a frekvenciájuk növekedni fog a számított frekvenciához képest. Figyelni kell arra is, hogy a nemlinearitások miatt a különböző összegfrekvenciáknál is jelenhetnek meg csúcsok (ezek a fantom felharmonikusok [Conklin 1999]).

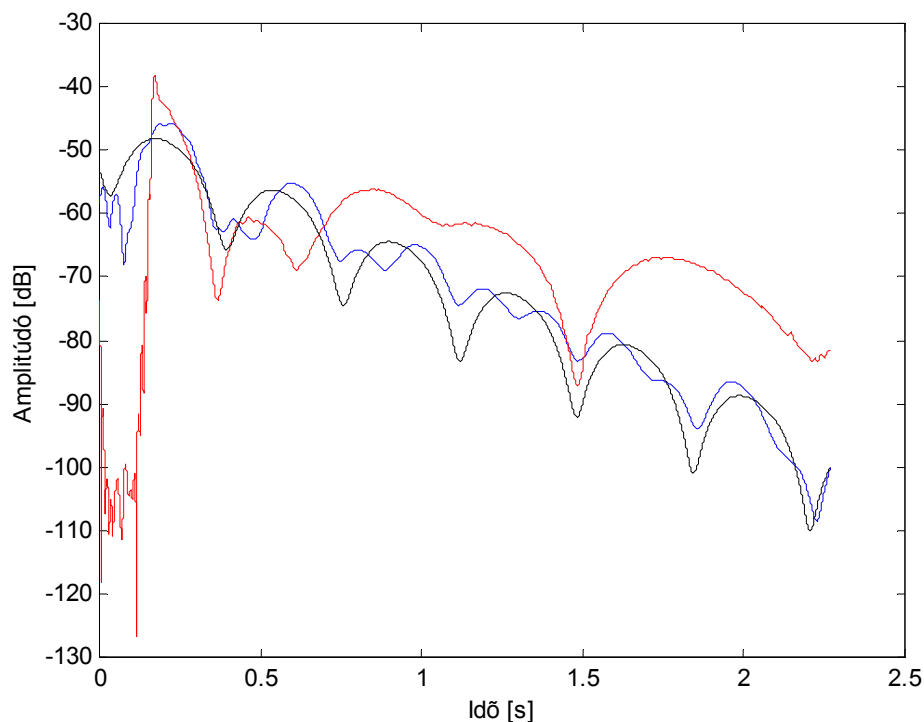


4-12. ábra A C<sup>1</sup> hang 10. harmonikusának burkolója (piros), és a 4- (kék) és 2 pólusú (fekete) illesztett jelek burkolói

Azt is figyelembe kell venni, hogy a magasabb harmonikusok hamarabb beleolvadnak a háttérzajba, vagyis a felharmonikusok vizsgálatánál rövidebb mintát kellene vizsgálni. Bár a tapasztalatok szerint nem okozott nagy hibát ennek figyelmen kívül hagyása, ahogy a 4-12. ábra mutatja.

Látható, hogy az eredeti zongorahang a 4. másodperc körül eléri a zajszintet, viszont a modellillesztésnél a teljes regisztrátumot használtam. Ez mégse rontotta el az illesztést. Ennek oka az, hogy a négyzetes hiba minimalizálása miatt csak a nagyobb jelszintek számítanak.

Viszont arra figyelni kell, hogy a regisztrátumok elején van egy olyan szakasz, amikor még nincs hang, és az erre való illesztés jelentősen elrontja a módusillesztést. Ez abból adódik, hogy olyan szűrőt kellene illeszteni, amelynek jelentős késleltetése van, erre pedig a négypólusú szűrő nem elegendő (ld. 4-13. ábra).



**4-13. ábra Zajjal kezdődő jel analízise. Eredeti jel burkolója piros vonal, kétpólusú illesztett modell burkolója: fekete vonal, négypólusú illesztett modell burkolója: kék vonal.**

## 4.6 A csatolási paraméterek számítása a kétpólusú modellből

A csatolási paramétereket Smith csatolási modelljéhez számolom. Vagyis csak egy frekvenciafüggő csatolást szeretnék meghatározni. A hurok veszteségét ebben a modellben csak a csatolás okozza, saját csillapítása nincs a huroknak (ld.3-4. ábra).

A 4.3 fejezetben leírt analízis módszerrel – rögzített zongorahangból – meghatározok két komplex sajátértéket, melyeknek valós része a frekvenciáért, képzetes része a csillapításért felelős. A továbbiakban ezeket  $\text{Re}(\lambda_m)$ -val, illetve  $\text{Im}(\lambda_m)$ -val jelölöm. Az  $m$  index azt emeli ki, hogy ezek a mért sajátértékek (vagyis az analízissel a felvett hangból meghatározott sajátértékek).

Az alábbi képlet a kéthúros modell analitikai elemzéséből kiadódó sajátérték (2.25). Ezt fogom felhasználni arra, hogy megkeressem a szükséges csatolási paramétereket. A  $2\varepsilon$  érték a csatolatlan hurok frekvenciabeli különbsége, a továbbiakban erre elhangolásként hivatkozom.

$$\lambda_{1,2} = \zeta + \varepsilon \pm (\varepsilon^2 + \zeta^2)^{1/2} - \zeta = \varepsilon + j\eta \pm (\varepsilon^2 + \zeta^2 - \eta^2 + 2j\xi\eta)^{1/2}. \quad (4.17)$$

Mivel a fenti sajátérték csak a középtől való eltérést jelenti, ezért a valódi hang sajátértéke a következő képlettel számítható ( $d$  a húr saját csillapítása, míg  $\omega_0$  az elhangolatlan húr körfrekvenciája):

$$\lambda_{m1,m2} = \varepsilon + j\eta \pm (\varepsilon^2 + \zeta^2 - \eta^2 + 2j\xi\eta)^{1/2} + \omega_0 + jd. \quad (4.18)$$

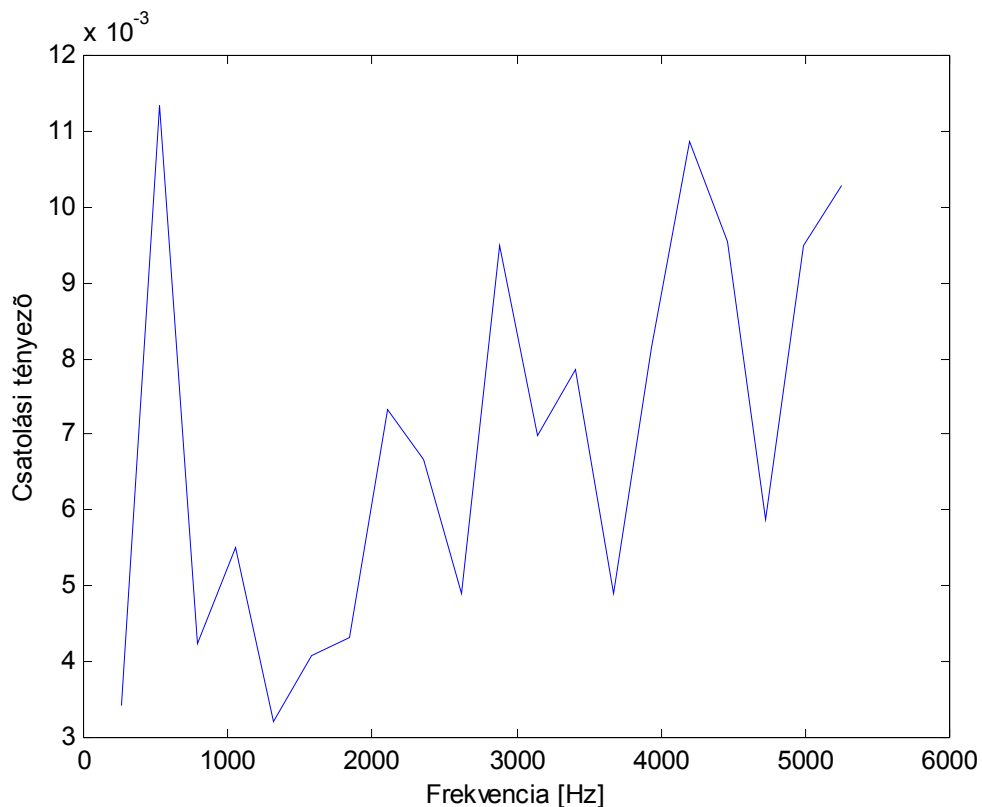
A frekvencianagyítással meghatározott két sajátérték összegének illetve különbségének felírásával a következő egyenletekhez jutunk:

$$\lambda_{m1} + \lambda_{m2} = 2(\varepsilon + j\eta + \omega_0 + jd), \quad (4.19)$$

$$\lambda_{m1} - \lambda_{m2} = 2\sqrt{\varepsilon^2 + \zeta^2 - \eta^2 + 2j\xi\eta}. \quad (4.20)$$

Ez két komplex egyenlet, ezeket valós és képzetes egyenletekre szétbontva összesen 4 egyenletünk van, viszont 5 ismeretlenünk, vagyis valamelyik ismeretlent nekünk kell, valamilyen előzetes modellismeret alapján megválasztanunk. Mivel én Smith modelljét szeretném megvalósítani, ezért  $d$ -t 0-nak választom. Így a 4.19-4.20 egyenletrendszer segítségével ki tudom számolni a mért módusok csatolt

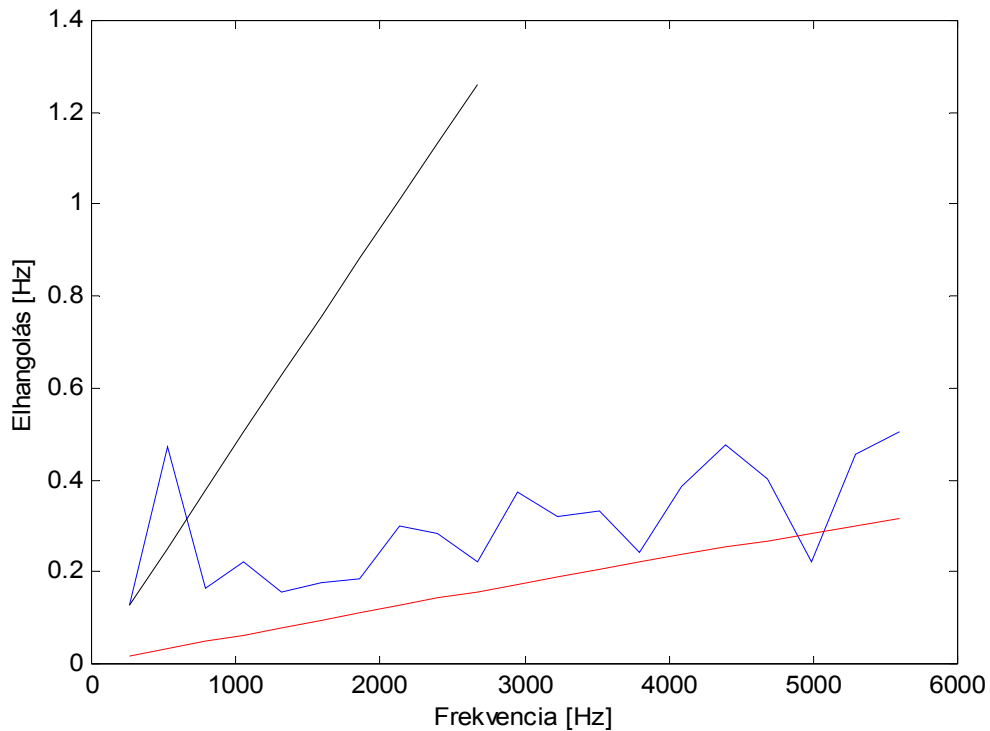
hullámvezetőkkel történő előállításához szükséges paramétereket (elhangelés, frekvencia,  $\zeta$  : ezeket a továbbiakban p index-szel jelölöm). A visszaellenőrzés szerint ezekkel a paraméterekkel ( $\varepsilon_p$ ,  $\zeta_p$ ,  $\omega_{0p}$ ) valóban pontosan meg lehet kapni azt a két módust, amelyeknek létezését a felvett hangban az analízis kimutatta.  $\zeta_p$  segítségével a 2.24 és a 3.13 egyenletek felhasználásával a csatolási tényező ( $c_p$ ) meghatározható. A csatolási tényező komplex, és frekvenciafüggő. A 4-14. ábrán a csatolási tényező abszolút értéke ( $c_{p,abs}$ ) látható a frekvencia függvényében.



**4-14. ábra A csatolási tényező frekvenciafüggése**

A csatolási tényező felüláteresztő jellegű. A csúcs a második harmonikusnál mérési hibából származik. Ez kiküszöbölhető lenne azzal, hogy az analízis módszernél a különböző harmonikusok vizsgálatát különböző hosszú időszelleteken vizsgáljuk. A felüláteresztő viselkedés magyarázata a következő: nagyobb csatolási tényezőnél jobban csillapodnak a harmonikusok, és minthogy a magasabb harmonikusok jobban csillapodnak érthető, hogy nagyobb csatolási tényezővel kell rendelkezniük.

Az elhangolás is frekvenciafüggő, és lineárisan növekvő trendet mutat (ld. 4-15. ábra, kék görbe). Az elhangolás egy igazi zongoránál is lineáris.



4-15. ábra Az elhangolás frekvenciafüggése (kék görbe),  $D_1$  alapján számított elhangolás (fekete egyenes),  $D_m$  alapján számított elhangolás (piros egyenes)

A 4-15. ábrán látható az  $D_1$  és  $D_m$  állandó késleltetéssel megnövelt hullámvezető elhangolása is a frekvencia függvényében. Az állandó késleltetés a következő képlettel számítható ki:

$$\varepsilon_v = \frac{1}{(Nt_s - D)} - \frac{1}{Nt_s}; \quad (4.21)$$

ahol  $N$  a hullámvezető teljes hossza,  $t_s$  a mintavételi idő,  $D$  pedig a késleltetés. Látható, hogy az elhangolás frekvenciafüggése lineáris. Az állandó késleltetés felel meg annak, hogy egy kicsit hosszabbra, vagy rövidebbre vesszük a hűrt a hangolószegek segítségével, ezért én is így fogom megvalósítani az elhangolást. Ezért is fontos a fix késleltetésből származó elhangolás vizsgálata. A fix késleltetést ( $D$ ) a 4.22 képlet szerint számítottam (amit a 4.21 képletből kaphatunk az egyenlet átrendezésével), először az első harmonikusra ( $D_1$ ) (ld. 4-15. ábra, fekete egyenes).

$$D_k = \frac{2\varepsilon_k N^2 t_s}{k + 2\varepsilon_k N t_s}; \quad (4.22)$$

ahol  $N$  a hullámvezető hossza,  $2\varepsilon$  a húr elhangolása,  $k$  a vizsgált harmonikus sorszáma,  $D_k$  pedig az ebből számolt késleltetés.

A  $D_1$ -ből származó elhangolás gyorsan növekszik. Ezután úgy számoltam a késleltetést, hogy minden harmonikusra kiszámoltam a késleltetést és ezek átlagát vettem ( $D_m$ ). Az ilyen késleltetéssel számított elhangolódás a frekvencia függvényében már az előző egyenletrendszerből kapott frekvenciafüggő elhangolással egy nagyságrendben van (4-15. ábra piros egyenes), viszont például az első harmonikus esetében jóval kisebb a kívánatosnál, amelynek pontossága fontos lenne az alapharmonikus nagy amplitúdója miatt.

Ennek a megközelítésnek hibája, hogy a frekvencia is változó. A frekvenciafüggő elhangolás miatt pedig kicsit el is rugaszkodik a fizikai képtől.

#### 4.6.1 Konstans csatolási tényező vizsgálata

Az előzőekben meghatározott csatolási tényezőt először egy valós konstanssal közelíttem. Ezt azért is tehetem meg, mert  $c_p$  képzetes része a valós részhez képest kicsi. Ha a csatolási tényező valós, akkor a híd impedancia is valós. Ha a híd impedancia valós, akkor  $\zeta_p$  képzetes, és  $\zeta$  képzetes része alapvetően befolyásolja a két módus lecsengési idejét (ld. pl. 2.25 egyenlet). A 4-5. Táblázat első sora a felvett jelből ARMA analízissel meghatározott módusok lecsengési időit ábrázolja. A második sorban a  $\varepsilon_p \zeta_p$ ,  $\omega_{0p}$  paraméterekből visszaszámolt lecsengési idők láthatók. A harmadik sor az  $\text{abs}(c_p)$ -vel visszaszámolt lecsengési időket mutatja.

4-5. Táblázat Frekvenciafüggetlen csatolás hatása a lecsengési időkre

Lecsengési idők	1. harmonikus		2. harmonikus		3.harmonikus		4. harmonikus	
Eredeti jel módusai	-1,3205	-0,4704	-2,9187	-2,9653	-1,6215	-0,5663	-1,8182	-1,0558
Komplex $c_p$ -vel visszaszámolva	-2,1352	-0,0526	-1,9624	-0,2254	-1,6215	-0,5663	-1,3409	-0,8469
$\text{abs}(c_p)$ -vel visszaszámolva	-2,1888	-0,0531	-2,0106	-0,2314	-1,5790	-0,6630	-1,1210	-1,1210
Hullámvezetővel szintetizálva	-2,1892	-0,0532	-2,0115	-0,2309	-1,5840	-0,6585	-1,1218	-1,3205

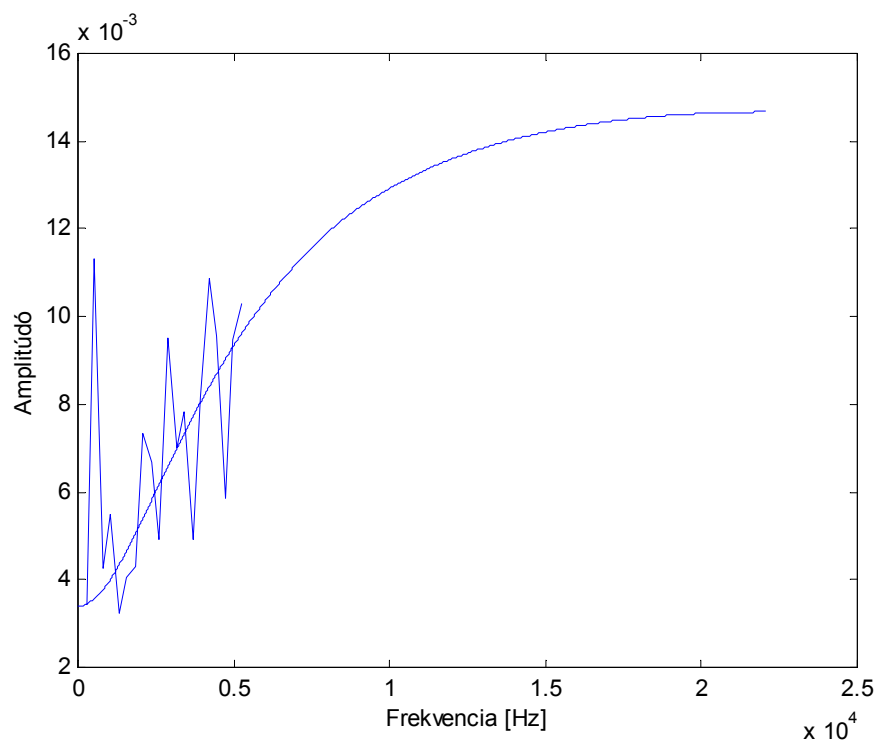
A 4-5. Táblázatból látható, hogy állandó csatolási tényezővel mindig csak egy harmonikus móduspárjára (jelen esetben a 3. harmonikusra) tudjuk jól beállítani a lecsengési időket. Azért nem tudja azokat sem egészen pontosan beállítani, mert a csatolási tényező fázisát elhanyagoltam.

Ahhoz, hogy a többi harmonikus lecsengési idejét is megfelelően elő tudjuk állítani, frekvenciafüggő csatolás szükséges.

#### 4.6.2 Frekvenciafüggő csatolás vizsgálata

A csatolási tényező felüláteresztő jellegű, ezért olyan szűrőt illesztettem a csatolási tényező amplitúdómenetére a négyzetes hibát minimalizálva, ami egy pólussal, és egy zérussal rendelkezik:

$$H(z) = g \frac{1 - bz^{-1}}{1 - az^{-1}}. \quad (4.23)$$



4-16. ábra A csatolási tényező görbéjére, mint amplitúdómenetre illesztett szűrő

Az elhangolást fix késleltetéssel valósítottam meg. Kipróbáltam a  $D_1$  és a  $D_m$  késleltetés hatását is a módusok lecsengési időire.



A 4-6. Táblázat első sora az eredeti jel első négy harmonikusának lecsengési idejét mutatja. A második sor a 4-16. ábrán látható amplitúdómenetű csatolással és az első harmonikus elhangolásából kiszámolt állandó késleltetéssel megvalósított jel lecsengési időit mutatja. Látható, hogy az első harmonikust elég pontosan közelíti, mivel ott még a szűrő is elég pontosan a kívánt érték. A harmadik sor az elhangolások átlagából kiszámolt fix késleltetéssel szintetizált jel lecsengési időit mutatja. Látható, hogy szükség lenne az elhangolás frekvenciafüggő beállítására is, az eredeti jel paramétereinek pontosabb visszanyeréséhez. Persze a teljesen pontos szintézis olyan csatolási szűrő előállítását igényelné, mely a csatolási tényező fázisát is figyelembe veszi. Az egy pólussal és egy zérussal rendelkező szűrő is közelítés. Magasabb fokszámú szűrővel, mely jobban követi az amplitúdómenetet, pontosabb lenne a szintézis.

**4-6. Táblázat Frekvenciafüggő csatolással szintetizált jel viselkedése**

Lecsengési idők	1. harmonikus		2. harmonikus		3.harmonikus		4. harmonikus	
Eredeti jel módusai	-1,3205	-0,4704	-2,9187	-2,9653	-1,6215	-0,5663	-1,8182	-1,0558
$D_1$ -el visszaszintetizált jel módusai	-1,3587	-0,4382	-1,0711	-0,7549	-1,0822	-0,7927	-1,1161	-0,8279
$D_m$ -el visszaszintetizált jel módusai	-1,6991	-0,0975	-1,4313	-0,3942	-1,2812	-0,5931	-1,2798	-0,6637

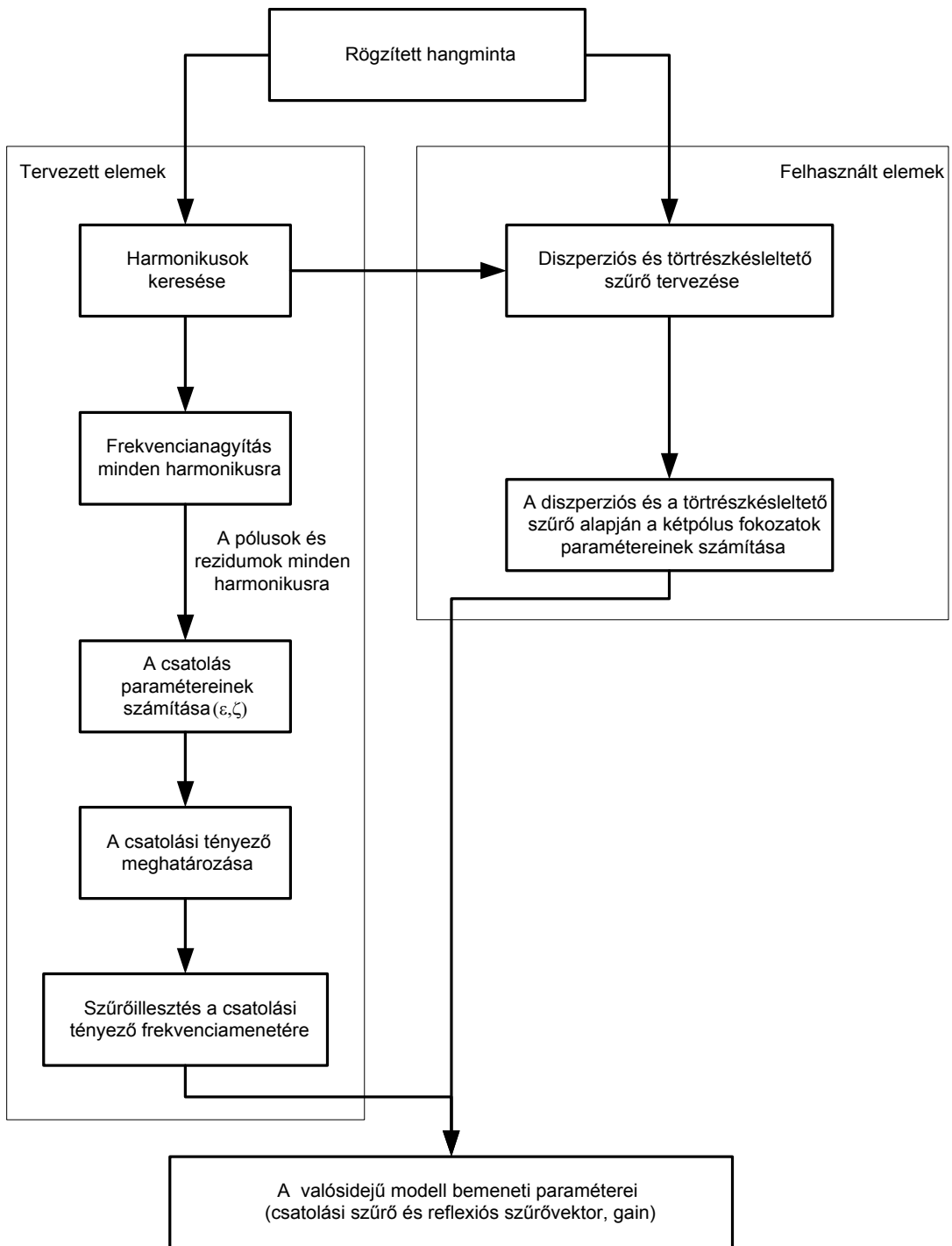
A csatolt modellt C-ben és Matlabban megvalósítottam. Meghallgatva a C-programmal visszaszintetizált jeleket azok között füllel nem tudtam különbséget tenni (ld. melléklet). De megállapíthatjuk azt is, hogy az eredeti jel magasabb harmonikusai gyorsabban csengenek le, mint a visszaszintetizált jel magas harmonikusai (ld. melléklet). Ez amiatt van, hogy a magasabb harmonikusoknak nagyobb a csatolási tényezője. Ezt az illesztett szűrő nem közelíti jól. Erősebb csatolás esetén gyorsabb lenne a magasabb harmonikusok lecsengése. Az eredeti hang módusainak lecsengési idői és a csatolásból kiadódó elméleti lecsengési idők különbségére aluláteresztő szűrőt illesztve is előidézhetnénk a magas harmonikusok gyorsabb lecsengését.

## **4.7 Offline analízisprogram a modell paramétereinek számítására**

Az előző részmegoldásokból már össze lehet állítani azt a programot, amely a felvett minták elemzésével automatikusan generálja a modell működéséhez szükséges húr paramétereket (4-17. ábra). Ehhez szükség van a harmonikusokat előállító programra, a diszperziós és a törtrészskéleltető szűrőket tervező programra és a csatolás szűrőjét tervező programra.

Az analízishez használt zongoramintákat Bank Balázstól kaptam. A diszperziós és a törtrészskéleltető szűrők tervezésével és megvalósításával nem foglalkoztam, – ezek a témámtól független feladatok – felhasználtam a Bank Balázs által készített szűrőket.

A harmonikusok megkeresése után minden harmonikusra lefuttatjuk a Steiglitz-McBride algoritmust, amely minden egyes harmonikushoz két komplex sajátértéket, valamint egy komplex rezidumot ad vissza. Ezekből a paramétereiből a már ismertetett módon generáljuk a komplex csatolási paramétereket. Ezekre például a négyzetes hiba minimalizálásával illeszthetünk szűrőt. Ezután már csak sorba kell kapcsolni a diszperziós és a törtrészskéleltető szűrőket, s belőlük kiszámolni a valósidejű modell működtetéséhez szükséges másodfokú szűrő paramétereket (ld. 5.5 pont).



4-17. ábra A húrparaméterek számítása

## 5 Valós idejű hangszintézis

Az előző fejezetekben leírt modell megvalósításához olyan módszereket és eszközöket kell használnunk, hogy a polifonikus hang mintáinak előállításához szükséges számítások ideje beleférjen egy mintavételi periódusba. Ez Matlabbal a jelenlegi processzorteljesítményekkel nem érhető el, de nem is lenne optimális. C kóddal a Matlabbnál nagyságrendekkel gyorsabb kódot lehet generálni. Mivel azonban a nagy számításigényű audio és video feladatokhoz legtöbbször célhardware-t használnak, ezért célszerű valamilyen jelfeldolgozó processzor választása. Természetesen a DSP sem ideális az összes megoldandó feladat végrehajtására. Például a dallam adatainak beolvasása és feldolgozása célszerűbb lenne valamilyen mikrokontrollerrel, esetleg megvalósítható lenne huzalozva is. Kész, a piacon eladható alkalmazás fejlesztésénél felmerülhet FPGA és DSP kombináció választása, illetve esetleg sorozatgyártás esetén a feladatra optimalizált jelfeldolgozó processzor kialakítása, amivel valószínűleg nagyságrendekkel gyorsabb kód generálása válna elérhetővé.

A dolog másik oldala persze az, hogy olyan modelleket találjunk, amelyek számításigénye eleve kicsi, hogy így ne legyen szükség nagyobb befektetésekre a hardware oldalán. Persze, ahogy egyszerűsítjük a modellünket, úgy rugaszkodunk el a fizikai képtől is, tehát eljutunk újra ahhoz a problémához, ahonnan elindultunk, vagyis, hogy esetleg már nem is fizikai modellel állítjuk elő a hangot, hanem csak a jelforma, vagy a spektrum valamilyen tulajdonságát próbáljuk megfelelő eszközökkel utánozni. Összegezve tehát mind a hardware, mind a software oldal együttes optimalizálására lenne szükség, leginkább persze csak a software részt tudjuk optimalizálni. Részint a modell alkotóelemeinek ügyes megválasztásával, részint pedig a kód minél finomabb illesztésével az adott hardware eszközhöz.

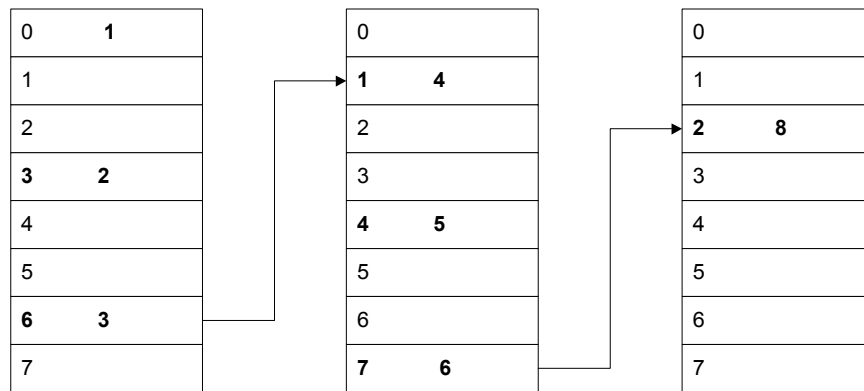
### 5.1 Jelfeldolgozó processzorok általános jellemzői

A jelfeldolgozó processzorok legnagyobb eltérése a hagyományos mikroprocesszoroktól, hogy nem Neumann, hanem Harvard architektúrát használnak, vagyis az adatokhoz, és a programkódhoz párhuzamosan férhetünk hozzá, mivel külön

memóriában vannak tárolva, és saját adatbusszal rendelkeznek. Ez a tulajdonság a szűrők megvalósításánál nagyon előnyösen felhasználható.

Ezen kívül a jelfeldolgozó processzorok még számos hardware-el támogatott eszközt biztosítanak. Fontos például a hardware szorzó. A Harvard architektúrának köszönhetően a két szorzandó számhoz egyszerre férhetünk hozzá egyiket a program, másikat az adatmemóriában tárolva. Így a szorzás egy órajel ciklus alatt megvalósítható. A memória könnyebb használatát, és elsősorban a FIR szűrők egyszerű megvalósíthatóságát biztosító cirkuláris címezéssel is dolgozhatunk.

Ehhez külön regiszterkészlet áll rendelkezésre: az index-, a hossz-, és az eltolásregiszterek. Az indexregiszter a cirkuláris buffer kezdőcímét jelöli ki. Az eltolásregiszterekben lévő értékekkel ugorhatunk a cirkuláris bufferben. Ha kilépnénk a hosszregiszterek által megadott tartományból, akkor automatikusan a cirkuláris buffer elején folytatódik a címezés (5-1. ábra).



5-1. ábra A cirkuláris címezés szemléltetése  $m = 3$  esetére [ADSP User's Manual]

Ezzel a rendszerrel a FIR szűrés nagyon hatékonyan végezhető:

$$y_n = \sum_0^N h_k x_{n-k} ; \tag{5.1}$$

ahol  $x$  a szűrendő jel,  $h$  a szűrőegyütthatók halmaza. Az együtthatókat egy cirkuláris bufferbe töltjük. Az aktuális mintát egy másik – az együttható bufferével azonos hosszúságú – bufferbe töltjük. Itt arra kell figyelni, hogy az aktuális mintát mindig a legrégebben beérkezett minta helyére töltsük be. A szorzás folyamán mindkét bufferben körbe járunk. Az újabb DSP-k ezeken kívül a párhuzamos utasítás végrehajtást is

támogatják, így szorzás, összeadás, új adat beolvasás akár egy órajelciklus alatt megtehető.

## **5.2 Az ADSP 21061 jelfeldolgozó processzor jellemzői**

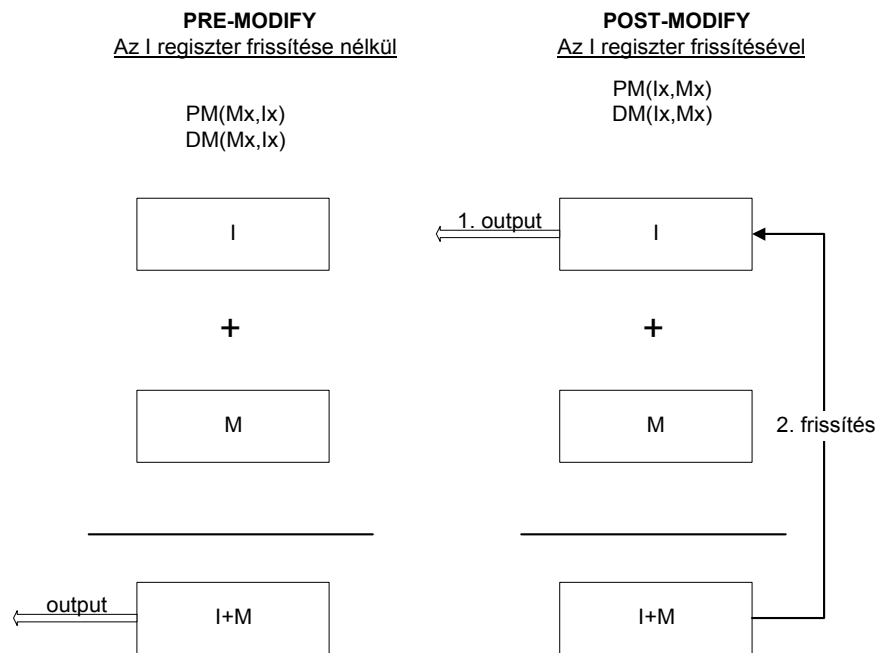
Az ADSP 21061 egy lebegőpontos processzor. Ez azért előnyös, mert így az eredmények skálázására nincs szükség, ezt a processzor hardware-ben megoldja. Az adatok a processzoron belül 5 byte-os lebegőpontos formátumban tárolódnak, és a számítási egységek is 40 bit pontossággal dolgoznak, így a kerekítési pontatlanságok kicsik. A processzoron kívülre akár 32 akár 40 bites lebegőpontos formátumban továbbíthatók az adatok.

A számítási egység egy ALU-ból, egy szorzóból és egy shiftregiszterből áll (ld. 5-3. ábra). A számítások gyors végzésére egy 16 regiszterből álló regiszter file van kialakítva. Ezek a regiszterek (és csak ezek) használhatók fel a szorzás és az összeadás végzésére, és az eredmények tárolására. A számításokat akár lebegő, akár fixpontos formátumban végezhetjük. A váltást a DSP automatikusan elvégzi attól függően, hogyan hivatkozunk egy regiszterre. Pl. az ADSP 21061 assembly nyelvén  $f1 = f1+f2$  lebegőpontos az  $r1 = r1+r2$  fixpontos összeadást jelöl. Viszont a fix és lebegőpontos szorzás megvalósítása nem teljesen egyforma. Mivel a lebegőpontos számok ábrázolása mindig a 32 (vagy 40 biten) történik, ezért ott az eredményt a regiszter file bármelyik regiszterében tárolhatjuk. Fixpontos számok esetén viszont figyelembe kell vennünk azt, hogy szorzásnál az eredmény kétszer akkora bitszélességen is képződhet, mint az összeszorozott számok. Ezért a fixpontos számok szorzásához egy dedikált MRF regiszter tartozik, amiben a szorzás végeredménye tárolódik. Ez a regiszter 80 bites. Ez a regiszter tulajdonképpen három regiszterből áll, amelynek a megfelelő bitjeit használjuk fel. A regiszterek külön-külön hozzáférhetők, így az eredmény bármely részét hasznosíthatjuk.

Az, hogy a processzorban egyidejűleg használhatunk fix és lebegőpontos számokat is egy veszélyt rejt magában. Ha például ezt a kódrészletet írjuk le:  $f1 = 5$ , akkor az  $f1$  regiszterbe az 5 mint fixpontos szám töltődik be, és ezzel számolva természetesen értelmetlen eredményt kapunk. A helyes változat  $f1 = 5.0$ . Két dedikált címgenerátor (DAG = Data Address Generator) és egy program sequencer támogatja a címelőállítást a memória hozzáférésekhez. A két címgenerátor segítségével az ADSP 21061

egyidejűleg olvas be egy utasítást a programmemóriából, illetve fér hozzá két operandushoz az adatmemóriában. Címgenerátorok valósítják meg a cirkuláris címzést is.

Mindkét címgenerátorhoz tartozik 8 pointer, 8 módosító érték, és 8 hosszúság érték. Ha a pointerhez tartozó megfelelő hosszérték nem 0, akkor ezen regiszterek segítségével cirkuláris címzést valósíthatunk meg. Ezek használata a következő: egy bázisregiszterbe betöltjük a cirkuláris buffer kezdőcímét, beállítjuk a hosszát, valamint egy eltolásregiszterbe azt az értéket, amennyivel ugrálni akarunk. Ezután már nem a bázisregisztert használjuk címzésre, hanem az indexregisztert. A  $dm(i1,m1)$  utasítás hatására a processzor az  $i1$  címről kiolvassa az adatot, majd ezután  $m1$  értékkel megnöveli az indexregisztert (post-modify címzés, ld. 5-2. ábra).



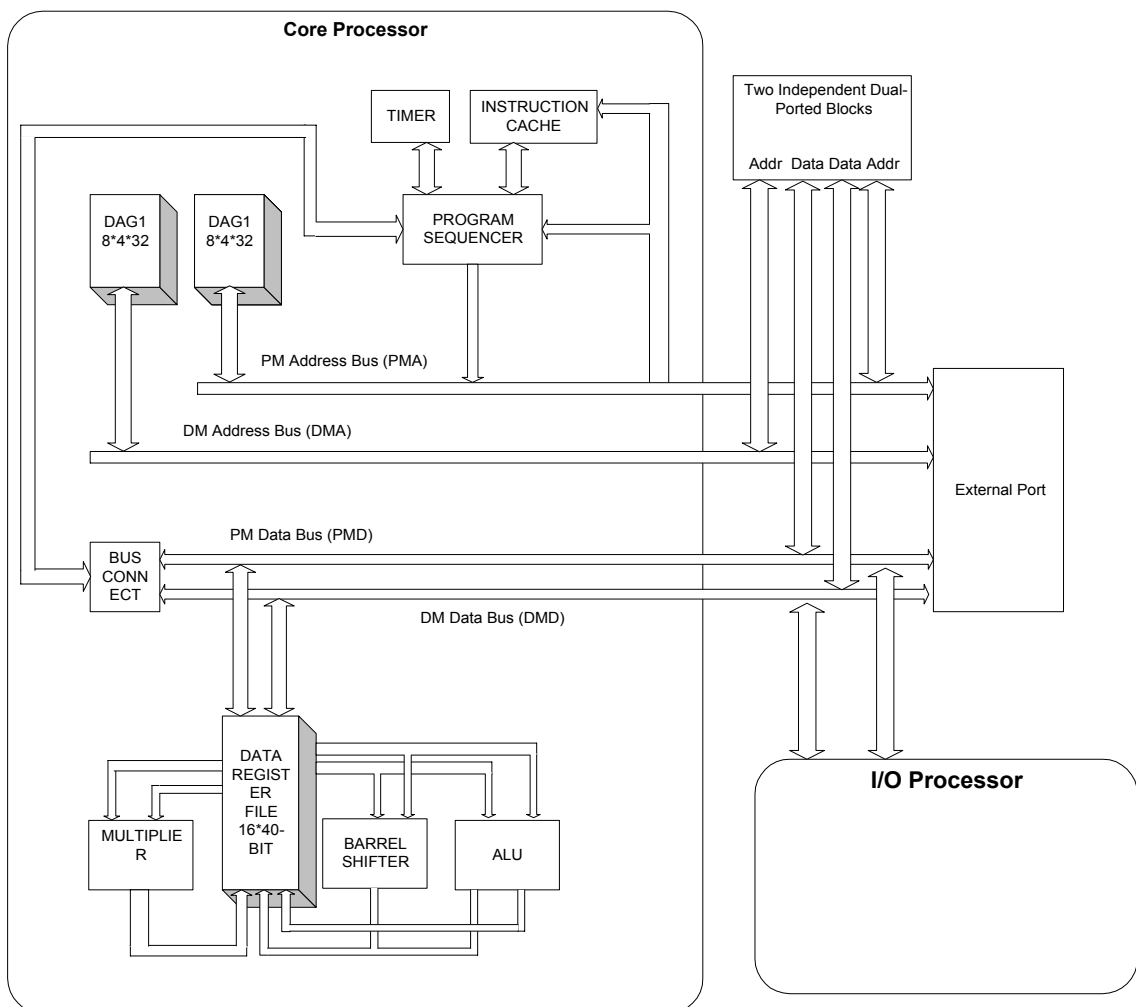
5-2. ábra Címzési lehetőségek ADSP 21601-el [ADSP User's Manual]

Van lehetőségünk pre-modify címzésre is. Ez azt jelenti, hogy az eltolásregiszter értékével módosított index címről olvassa ki a processzor az adatot. Viszont ebben az esetben az index regiszter értéke nem változik, ténylegesen nem adja hozzá az eltolásregiszter értékét az indexregiszterhez, csupán ezzel az összeggel címez (ld. 5-2. ábra).

A program sequencer támogatja a ciklusok kialakítását és értékeli a feltételes utasítások végrehajthatóságát. Egyszerűen tudunk például hardware ciklust szervezni a következőképpen:

```
lcntr=r0, do cím until lce;
```

A ciklusszámlálót (loop counter = lcntr) beállítjuk valamilyen egész értékre. Ezután a processzor a „cím” címkéig végrehajtja az utasításokat addig, amíg az utasítás végén megadott feltétel igazsá nem válik. A fenti parancssorban az lce jelentése: kinullázódott a ciklusszámláló (loop counter expired). Ez akkor válik igazsá, ha lcntr = 0. Ekkor már nem hajtja újra végre az utasításblokkot.



5-3. ábra Az ADSP 21061 processzormagja [ADSP User's manual]

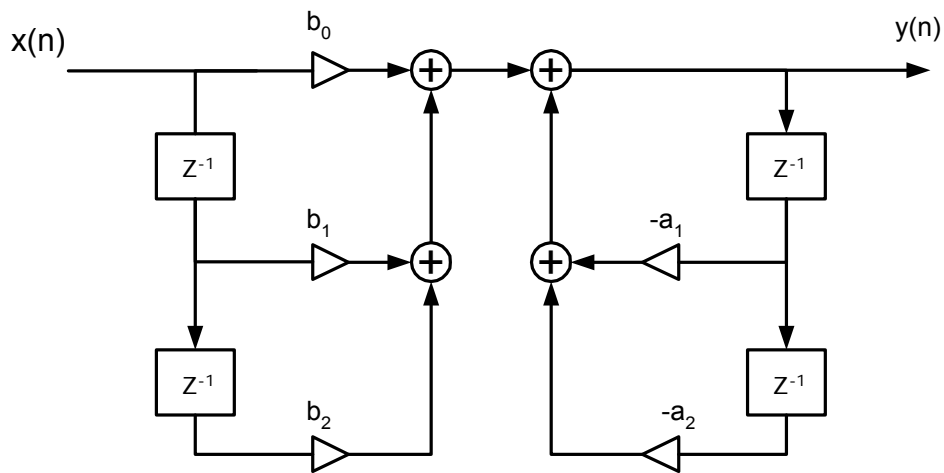


### 5.3 IIR szűrő hatékony megvalósítása

Kétpólusú IIR szűrő első normálformája az alábbi alakú:

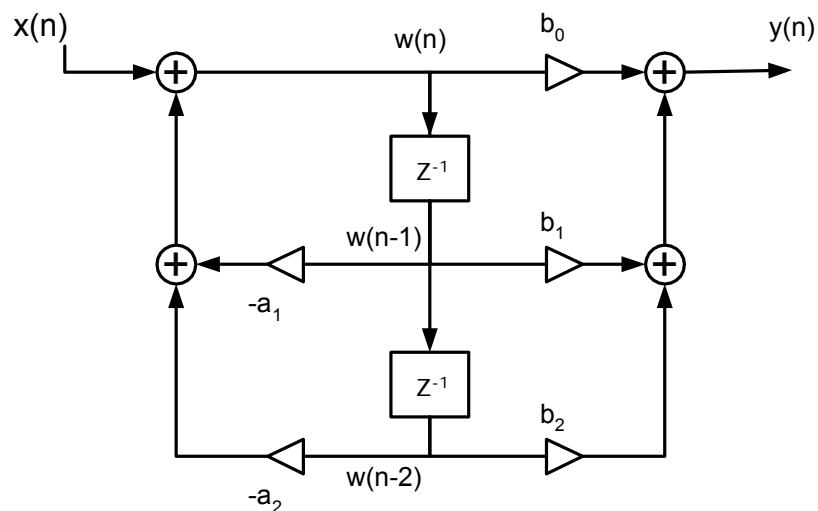
$$y(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1) + b_2x(n-2) + a_1y(n-1) + a_2y(n-2). \quad (5.2)$$

Ez a szűrő egy FIR és egy csak pólusokból álló IIR szűrő soros kapcsolása (5-4. ábra).



5-4. ábra Kétpólusú IIR szűrő első normálalakja

A szűrőt megvalósíthatjuk úgy is, hogy nem a FIR, hanem az IIR szűrő kerül a bemenetre, ez az IIR szűrők második normálalakja (5-5. ábra).



5-5. ábra Kétpólusú IIR szűrő második normálalakja

Az ábra alapján a kimenetet a következőképpen is számíthatjuk:

$$\begin{aligned} w(n) &= x(n) + a_1 w(n-1) + a_2 w(n-2) \\ y(n) &= b_0 w(n) + b_1 w(n-1) + b_2 w(n-2) \end{aligned} \quad (5.3)$$

A programbeli megvalósítás során a nem másodfokú IIR szűrőket másodfokú részekké bontjuk szét, és a fenti egyenletek alapján valósítjuk meg, azzal a kivétellel, hogy  $b_0$ -t kiemelünk a második egyenletből a szorzások mennyiségének csökkentése végett. Ezáltal a  $b$  együtthatók megváltoznak persze, de így elég a kétpólusú részekből kiemelt  $b_0$ -k szorzatával beszorozni a végén a szűrőkimenetet (ez a gain). Az alábbi kódrészlet IIR szűrő hatékony megvalósítását szemlélteti [ADSP Users Manual]. A szűrőegyütthatókat a programmemóriában, a késleltetősort az adatmemóriában tároljuk.

```

cascaded_biquad: /* --- minden szürendő mintára meg kell hívni---*/
    b1=b0;
    r12=r12-r12,          f2=dm(i0,m1), f4=pm(i8,m8);      /* #1 */
    lcntr=r0, do quads until lce;                          /* #2 */
    f12=f2*f4, f8=f8+f12, f3=dm(i0,m1), f4=pm(i8,m8);    /* #3 */
    f12=f3*f4, f8=f8+f12, dm(i1,m1)=f3, f4=pm(i8,m8);    /* #4 */
    f12=f2*f4, f8=f8+f12, f2=dm(i0,m1), f4=pm(i8,m8);    /* #5 */
quads:  f12=f3*f4, f8=f8+f12, dm(i1,m1)=f8, f4=pm(i8,m8); /* #6 */
    rts(db), f8=f8+f12;                                     /* #7 */

```

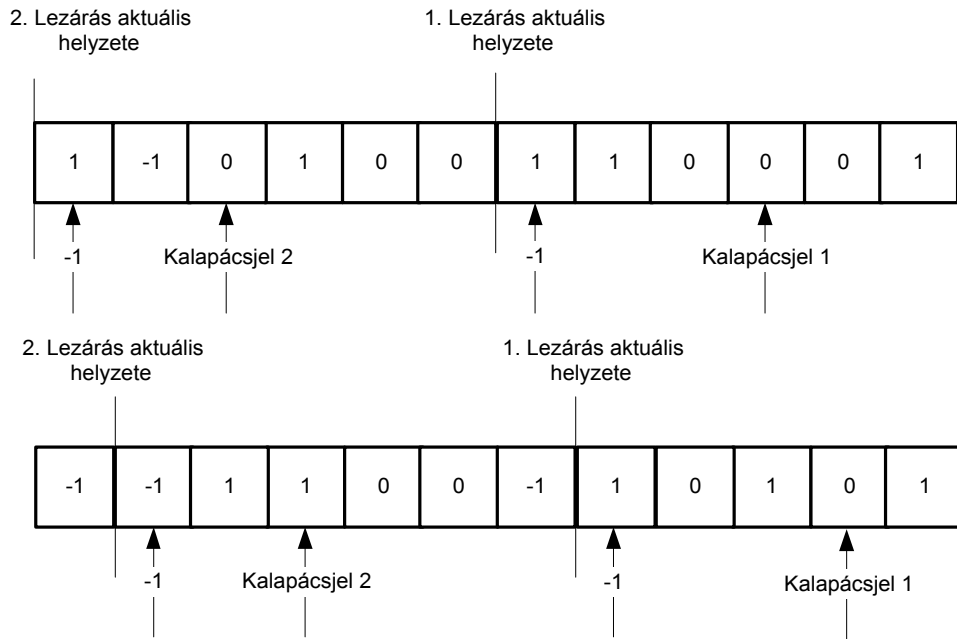
Először (#1) beolvassuk az első együtthatót ( $f4=a2$ ) és  $w(n-2)$ -t ( $f2=w(n-2)$ ). Ezeket összeszorozzuk (#3), hozzáadjuk, az akkumulálódó összeghez, közben olvassuk a következő együtthatót ( $a1$ ) és  $w(n-1)$ -et. A szorzás és összeadás minden sorban megjelenik, ezeket ezután már nem írom le. Az összeadás az előző sorban végrehajtott szorzás eredményét használja fel. A szorzás az előző sorban beolvasott együtthatókat, és késleltetett értékeket szorozza össze. Ezután (#4) kiírjuk az új  $w(n-2)$ -t, ami a mostani  $w(n-1)$  és beolvassuk  $b2$ -t. A következő (#5) sorban  $b1$  olvasása mellett a következő szűrőtag  $w(n-2)$ -jét olvassuk be. Végül (#6) kiírjuk az új  $w(n-1)$ -et. A programban az egymás után következő szűrőfokozatokat hardware ciklussal valósítjuk meg (#2). A ciklusból kilépve szükség van még egy összeadásra, mivel az utolsó szorzás eredményét még nem használtuk fel. (#7).

## 5.4 Hullámvezető megvalósítása jelfeldolgozó processzorral

A hullámvezető programozási szempontból egy számsor, melynek elemeit el kell tolnunk minden mintavételi periódusban, és a végeken pedig meg kell szoroznunk -1-gyel. Matlabban ezt könnyen meg lehetett tenni úgy, hogy a hullámvezető alsó és felső részét egy-egy vektorban tároltuk, majd egy for ciklusban ezeket az elemeket rendre balra illetve jobbra toltuk, illetve egymásba átirtuk. A következő Matlab kódrészlet ezt szemlélteti:

```
for k = 1 : 1000
    i2 = v2(1);
    i1 = v1(i);
    v1 = [c*i2 , v1(1:i-1)];
    v2 = [v2(2:i), c*i1];
end,
```

ahol  $v1$  és  $v2$  a két vektor,  $c$  értéke  $-1$ . Az első vektorból kicsorduló elemet a második végére, a második vektorból kicsorduló elemet az első elejére illesztjük. Természetesen ez feleslegesen sok számítás, hiszen a vektorbeli elemek eltolása a processzor szempontjából utasítás, így ez egy mintavételi periódusban is több száz utasítást igényelne. A gyakorlatban alkalmazott módszer az, hogy a vektor indexeit mozgatjuk a számokon, a számok vektoron belüli mozgatása helyett. Vagyis a vektorok végeit mozgatjuk a számsoron, nem a számokat mozgatjuk a vektor végéhez. Természetesen fölösleges két vektorral megvalósítani a hullámvezetőt, hiszen csak arra kell figyelni, hogy bizonyos pozíció átlépése esetén a szám értéke  $-1$ -gyel megszorozódjon.



5-6. ábra Hullámvezető megvalósítása cirkuláris bufferrel

Most nézzük a 5-6. ábrán látható számsort: tegyük fel, hogy kiolvassuk az első helyen álló számot, majd -1-gyel megszorozva visszaírjuk. Ez azt jelenti, hogy ez a szám pont ebben a mintavételi ciklusban ütközött a lezárásnak. A következő mintavételi időpontban az előzőtől jobbra lévő számot olvassuk ki és szorozzuk meg -1-gyel. Vagyis a lezárást jobbra mozgatjuk a számokon. A következőkben az első lezárástól jobb felé a második lezárásig elhelyezkedő hullámvezetőt felső hullámvezetőnek fogom hívni, a másik részt pedig alsónak. Vagyis úgy tekintem, mintha nem lennének összefogva egybe. Az alábbi kódrészlet a hullámvezető DSP-n történő megvalósítását szemlélteti.

```

f3 = dm(i2,0); /*#1*/
f1 = dm(prev); /*#2*/
f11 = dm(refl); /*#3*/
f7 = f1+f3; /*#4*/
pm(out) = f7; /*#5*/

f13 = f11*f8; /*#6*/
dm(prev) = f3; /*#7*/
dm(i2,m4) = f3; /*#8/

```

```

f12 = dm(i2,0); /*#9*/
f3 = f11*f12;
dm(i2,m4) = f3; /*#10*/
f12 = dm(i2,1); /*#11*/

```

Először (#1) beolvasom a felső hullámvezető utolsó elemét (amelyik éppen a falhoz érkezik). Ezután (#2) beolvasom alsó hullámvezető utolsó elemét. Ezt mindig kimentem az előző periódusban egy prev nevű változóba, hogy kevesebb lépegetést kelljen végezni a cirkuláris bufferben. Most tehát csak ezt a változót kell beolvasnom. A következő lépés (#3) a reflexiós tényező beolvasása. Ezután (#4) a felső és alsó hullámvezető utolsó elemeinek összegzésével előállítom a kimenetet, majd kiírom a memóriába (#5). Ezután a most beérkezett elemet megszorozom a reflexiós tényezővel (#6), majd ezt követi ennek kimentése a prev változóba (#7), és visszairása a hullámvezetőbe (#8). Ezek után a húr másik végéhez érkezett mintát is meg kell szorozni a reflexiós tényezővel (#9), és vissza kell írni a hullámvezetőbe (#10). Ezután eggyel meg kell növelni az indexregisztert, ez felel meg az index léptetésének, vagyis a hullám haladásának (#11).

## **5.5 Zongoramodell megvalósítása jelfeldolgozó processzorral**

A zongoramodell központi eleme a hullámvezető. Az egyik oldalon a -1-es szorzó mellé bekerül a reflexiós szűrő, amelyik a diszperzióért és a finomhangolásért felelős. Mivel a reflexiós szűrő általános IIR szűrő, ezért azt másodfokú fokozatok soros kapcsolásával tudjuk megvalósítani. A húrok csatolásának számításához két húrra van szükség, így egymás mellett egyszerre két húr programja fut. A gerjesztés létrehozásáról az egyszerű kalapácsmodell gondoskodik, amelynek implementációja lényegében nem különbözik a Matlab kódtól. Mindkét húr ugyanaz a kalapács modell gerjeszti.

```

ah = -fh/mh ;
vh = vh + ah*ts;
yh = yh+vh*ts;
if (yh-s(b)) > 0
    fh = kh*((yh-s(b))^2);
    %fh = 0;

```

```
else
    fh = 0;
end
```

A bemenő paraméter a kalapács sebessége. Az első sor Newton második törvénye. A második, illetve harmadik a sebesség, illetve a gyorsulás integrálása. Ha hozzáér a kalapács a húrhoz, akkor a már ismertetett nemlineáris kapcsolat alapján kiszámoljuk az erőt. Ha nem ér hozzá, akkor az erő természetesen 0.

A gerjesztés számításához folyamatosan számítani kell a megadott pont elmozdulását. Ezen kívül a nemlineáris kalapács miatt figyelni kell arra, hogy hogyan adjuk be az erőt. Én a már ismertetett megoldást választottam (ld. 3-7. ábra): a felső hullámvezetőbe az eredeti helyen adom be a gerjesztést. Az alsóba viszont csak egy mintavételi ütemmel később. Mivel ekkor a kiolvasás indexe már arrébb haladt, ezért a gerjesztést ugyanabba a pontba kell beadni, mint az előbb.

## **5.6 A polifonikus dallamlejátszás megvalósítása**

A szűkös hardware erőforrások miatt nem szólhat egyszerre az összes hang, mint egy igazi zongora esetén, csak annyi, amennyinek generálásához szükséges kód végrehajtása belefér a mintavételi időbe. Így definiálni kell a modell polifónia fokát, ami az egyszerre megszólaltatható hangok számát jelenti.

A bejövő paraméterek hasonlítanak a MIDI formátumra. A különbségek főleg abból adódnak, hogy esetemben inkább a dallam paramétereinek kell némileg redundánsnak lennie, ha ez elősegíti a kód csökkentését, mivel bonyolult algoritmusok megvalósítására az időbeli korlátok miatt nincs lehetőség.

Csatornának nevezem a hang előállítását végző kódot. Ezzel a terminológiával a program annyi csatornát valósít meg, amekkora a program polifónia foka (ld 5.5. pont). Dallamvektornak nevezem azt az adatsort, amelyik a lejátszandó dallam paramétereit tartalmazza.

A bejövő paraméterek: a lejátszás időpontja, a lejátszó csatorna megadása, a hangmagasság és a hangerősség. Ha a lejátszás időpontja egyezik az éppen aktuális időponttal, akkor a program bekéri a másik három adatot is (ld. 5-7. ábra). Viszont megszorítás, hogy egy időpontban csak egy új hang állhat. Így a hangbeolvasó rutinnak

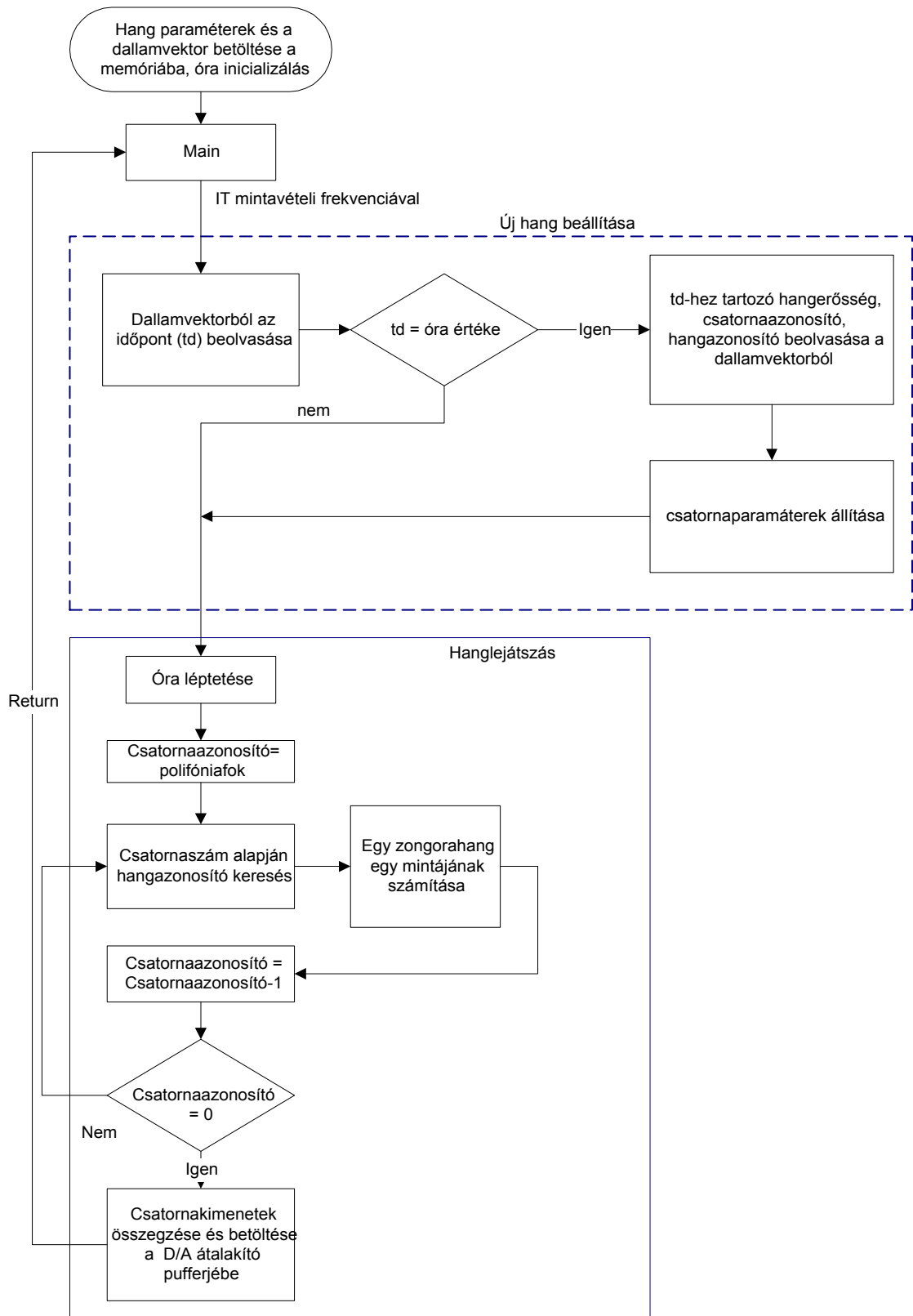
csak egyszer kell futnia mintavételi periódusonként. Ezzel csökkenthető a kód mérete. Nagy megszorítást ez viszont nem jelent, mert a mintavételi periódus 44100kHz-es mintavételi frekvencia mellett alig 3 szézezred másodperc, ilyen rövid időköz megkülönböztetésére egyébként sem vagyunk képesek.

A következő paraméter azt határozza meg, hogy melyik csatornán kell futtatni az adott hangot. Erre azért van szükség, mert egyébként valamilyen algoritmussal még azt is ki kellene szűrni, hogy melyik csatornán nem fut semmi, illetve meg kellene állapítani, hogy melyik fut a legrégebben, vagy valamilyen más algoritmussal ki kellene választani azt, hogy a bejövő új hangot melyik régi hang helyére tegyük be. Erre természetesen a szigorú időkorlát miatt nincs lehetőség. Jobban megéri, hogy valamilyen külső hardware vagy software a lejátszandó eredeti dallamból generál egy olyan adatsort, amit már a mi szintetizátorunk is képes lejátszani. Ezt az adatsort a memóriában letárolva már egyszerű a szintézis. Egy továbbfejlesztett változatban akár soros vonalon is érkezhethet az adat.

Külön kell választani azokat a paramétereket, amelyek egy húrpárhoz tartoznak (ezek a hangparaméterek), és azokat, amelyek a csatornához (ezek a csatornaparaméterek). Így válogatva a húrok impedanciája, sajátfrekvenciája, a kalapács tömege, a rugalmassági konstans, valamint a reflexiós szűrő a húrpárokhoz tartozik (tehát hangparaméter). Míg a húr pontjainak sebessége, a kalapács sebessége, gyorsulása, elmozdulása, a húr és a kalapács között ható erő, valamint a reflexiós tényező a csatornához tartozik. Utóbbi azért, mivel a hang elhalkulásához a reflexiós tényező megváltoztatását használom.

A hangparaméterekből paraméterekből annyi van, ahány húrpárt megvalósítunk (vagyis ahányféle hangból szeretnénk, hogy álljon a zongora). A csatornához tartozó paraméterek számát a polifónia fok befolyásolja. Vagyis annyi ilyen paraméterre van szükségünk, ahány hangot akarunk egyszerre megszólaltatni.

A csatorna kódja ciklusban fut. A ciklusváltót a polifónia fokra kell beállítani, így egy mintavételi ciklusban annyi hangot állíthatunk elő, amekkora a polifónia fok.



5-7. ábra Dallamlejátszás megvalósítása DSP - vel<sup>1</sup>

<sup>1</sup> A használt fogalmak értelmezése a 5.5 fejezet elején és az 5.6 fejezetben megtalálható



Az egyféle paramétereket egy helyen tároljuk, gyakorlatilag egy tömbben. Ennek kezdőcímét, mint báziscímet használjuk. Az eltolás regiszterbe pedig annyit töltünk, ahányadik paraméterhez hozzá akarunk férni. Így egy pre-modify címmel egyszerűen hozzáférhetünk a kívánt értékhez. Ezzel a rendszerrel egyszerűvé válik a hozzáférés a paraméterekhez.

Vegyük először a hangparamétereket. Felveszünk erre a célra egy dedikált tömböt, erre a továbbiakban csatorna-hang tömbként hivatkozom. Ennek memóriarekeszébe a megszólaltatandó hangok sorszámát tesszük. A memóriarekeszek sorszáma pedig azt határozza meg, hogy hányadik csatorna játssza le a hangparaméterek által meghatározott hangot. A csatornák ciklusban futnak. A ciklust a beépített hardware ciklusszervezővel alakítom ki. Ennek ciklusváltozója adja meg a csatorna számát. Ezt a számot felhasználva a csatorna-hang tömb címzéséhez, megkapjuk a megszólaltatandó hang sorszámát, amit felhasználva a hangparaméterek címzéséhez hozzáfértünk az összes a szintetizáláshoz szükséges paraméterhez.

Így a polifónia foka és a szintetizálható hangok halmaza tetszés szerint – és persze a hardware feltételek függvényében – változtatható. Mindkettőt egy konstans határozza meg, csak arra kell figyelni, hogy a megfelelő méretű tömböket létre is hozzuk. A leggyakoribb hibaforrás ugyanis, hogy kicímzünk a számunkra hozzáférhető tartományból.

## 5.7 Összegzés

A valósidejű zongoramodellben két húr fut párhuzamosan, de csatolás és elhangolás nélkül. A program kipróbálásához a reflexiós szűrő paramétereit Bank Balázstól kaptam.

A csatolás megvalósítása – a tervezett egypólusú szűrővel – rövid idő alatt beépíthető lenne. A csatolási szűrővel kiegészített program egy kódkompatibilis nagyobb teljesítményű processzoron lényegi változtatás nélkül futhatna.

Ha a processzoron a modellt a rezonátorlemez FIR szűrője nélkül futtatjuk, akkor 3 szólamú dallamot tud lejátszani. Ezen a DSP-n a rezonátor FIR szűrője az alacsony órajelfrekvencia miatt nem tud a modell többi részével együtt futni. Ezért az egy másik ugyanilyen DSP-n fut. A FIR szűrő együtthatóit a Bank Balázstól kapott rezonátorlemez-impulzusválasz első ezer mintájából képeztem. A két DSP

összekötéséhez használt plusz AD és DA átalakító a szintetizált hang jel/zaj viszonyát nagyságrendekkel lerontja. Sajnos a jel digitális továbbítását a két DSP között nem sikerült megoldani. Ezért a polifonikus dallamlejátszást bemutató hangmintákat rezonátorlemez FIR szűrője nélkül vettem fel (ld. melléklet).

Az erőforrásokat jelentősen fogyasztja, hogy a csatolás modellezéséhez hangonként két húr programjának futtatása szükséges. A mintavételi frekvencia csökkentésével persze növelhető a polifónia fok, de 22000Hz-es mintavételi frekvencia alá nemigen érdemes menni, mert az már hallhatóan a hangminőség romlását eredményezné. Azzal is növelhettem volna a polifónia fokot, ha csak egy húr futtatására koncentrálok. De nem a modell egyszerűsítése a kulcs a megoldáshoz.

Az 5-1. Táblázatból ugyanis kiderül, hogy már létezik olyan DSP, amivel ezt a modellt is meg lehetne úgy valósítani, hogy magas polifónia fokú, egy igazihhoz hasonló zongorát kapjunk. Sajnos a laborban csak az ADSP 21061-es DSP állt rendelkezésre.

**5-1. Táblázat DSP-k által elérhető polifónia fok**

DSP típus	Órajel frekvencia [MHz]	MFLOPs	Utastítás/Mintavételi ciklus $f_s = 48000\text{Hz}$	Polifónia fok
ADSP-21061	50	150	3125	3
ADSP-21363	333	1998	41625	52
ADSP-21369	400	2400	50000	62
ADSP-TS203S	500	4000	83333	104

A táblázatban látható DPS-k mind az Analog Devices termékei. A táblázat második és harmadik sorában található DSP-k kódkompatibilisek a használttal, azokon változtatás nélkül futtatna a megírt program.

## 6 Összefoglalás és továbbfejlesztési lehetőségek

### 6.1 Eredmények

A diplomatermben megterveztem egy fizikai zongora modellt. A húr megvalósítása a digitális hullámvezetők elméletén alapult. A két húrt két hullámvezetővel implementáltam, ez lehetőséget nyújt a csatolás létrehozására. A kalapács és a húr kölcsönhatását nemlineáris egyenletrendszer segítségével számítottam. A rezonátorlemez egy FIR szűrővel valósítottam meg. A diplomaterv egyik központi témája a csatolt húrok vizsgálata. Ehhez megvizsgáltam a csatolás fizikai alapjait, a híd szerepét a csatolásban, valamint részletesen foglalkoztam a húron kialakuló közeli módusok paraméterbecslési lehetőségeivel.

Az elméleti vizsgálatok alapján Matlabban megvalósítottam egy olyan analízis programot, mely felvett zongorahangokban megkeresi a harmonikusokat, és meghatározza a harmonikusokat alkotó közeli módusok frekvenciáit, amplitúdóit, és lecsengési időit. A módusok keresésére ARMA modellezést használtam. Ezekből a módusokból kettőt vettem figyelembe a frekvenciafüggő csatolási tényező kiszámítására. Elkészítettem – szintén Matlabban – egy olyan programot is, mely a módusok paramétereiből meghatározza a frekvenciafüggő csatolási tényezőt és hűrelhangolást, és a csatolási együttható amplitúdómenetére szűrőt illeszt.

A csatolt húros modellt Matlabban és C-ben valósítottam meg. Kipróbáltam a konstans és a frekvenciafüggő csatolási tényező, valamint a különböző elhangolások hatását a módusokra. A valós idejű megvalósítást az ADSP 21061 assembly nyelvén a húrok csatolása nélkül készítettem el. A DSP-n futó program 48000Hz-es mintavételi frekvenciával 3 szólamú dallam lejátszására képes a rezonátorlemez FIR szűrőjének futtatása nélkül. A FIR szűrőt egy másik ugyanilyen típusú DSP-n futtattam, de a csatlakoztatás miatt az így szintetizált jel eléggé zajos. A FIR szűrő nélkül szintetizált hangok meghallgathatók a mellékelt CD-n.

## 6.2 *Értékelés és továbbfejlesztési lehetőségek*

Az ARMA modell illesztésén alapuló frekvencianagyító program még nem teljesen automatikus. Például az alapharmonikus frekvenciáját kézzel kell beállítani. Szintén nem tökéletesen megoldott kérdés, hogy a regisztrátum hányadik mintájától indítsuk az illesztést. Ugyanis a hang elején lévő tranzienst az illesztést elrontja, ezért nem szabad felhasználni a hang első pár ezer mintáját.

A csatolt modellt megvalósító C-programmal generált hangok magasabb harmonikusainak lecsengése a csatolás megvalósítása miatt lassabb a kívánatosnál. Az eredeti hang lecsengési idői és a csatolásból kiadódó elméleti lecsengési idők különbségére aluláteresztő szűrőt illesztve a hangok valószínűleg valóságosabbak lennének. A másik lehetőség, hogy erősebbre választjuk a csatolást, esetleg annak árán is, hogy az első harmonikus módusainak viselkedését így kevésbé pontosan modellezzük.

A modellt tovább pontosíthatjuk nagyobb fokszámú csatolási szűrő tervezésével és olyan törtrészkeleltetővel, mellyel a 4-15. ábrán látható elhangolás görbét elő lehet állítani. A csatolás elemzése csak két húrra történt meg, holott a legtöbb hang három húr megütésével keletkezik. Ennek további vizsgálatára lenne szükség egy pontosabb modell megalkotásához. Lehetne vizsgálni nemcsak egy hang húrjai, hanem a különböző hangok húrjai közötti csatolást is. Szintén megoldásra váró feladat a pedál hatásának megvalósítása. A kalapács és rezonátorlemez megvalósítására is léteznek pontosabb modellek.

A dallamot alkotó számsort egyelőre kézzel állítom elő, ami meglehetősen nehézkes. Valódi valósidejű zongora létrehozásához szükség lenne billentyűzetre, amivel a modell bemeneti jelét generálni lehet. Másik továbbfejlesztési lehetőség egy olyan program megírása, ami például egy MIDI file-ból képes generálni a modellem bemenetét alkotó számsort.

A polifonikus dallamlejátszás szépen működik a jelfeldolgozó processzoron, sajnos az említett okok miatt a rezonátorlemez FIR szűrője nélkül. A csillapító modellezése miatt (hirtelen változtatom a reflexiós tényezőt) a hangok elengedése egy kis zörejjel jár. Ezen egy pontosabb csillapító modell segíthetne, vagy akár az is, ha nem egy lépésben csökkenteném a reflexiós tényezőt a kívánt értékre.

A valósidejű megvalósítást célhardware-rel, vagy nagyobb teljesítményű DSP-vel lehetne tökéletesíteni. Ha például 60 hangot valósítanánk meg, akkor húszszor gyorsabb processzor kellene, vagy pedig olyan architektúra, ami valamilyen módon specifikusan támogatja a hullámvezető modellek megvalósítását. Például ha több dedikált bázis-, eltolás és indexregiszter lenne, akkor kevesebb utasítást emésztene fel az, hogy a szükséges paraméter címét betöltöm a bázisregiszterbe. Az inicializáláskor be lehetne tölteni, és aztán már nem igényelne CPU időt. Ilyen módon körülbelül 1/5-ével rövidebb kódot lehetne generálni.

Látható, hogy a modell tökéletesítésével és a megfelelő hardware megtervezésével lehetőség van jó minőségű fizikai alapú digitális zongora megvalósítására.

## Irodalomjegyzék

ADSP-21061 SHARC Processor Users Manual and Code Examples

Aramaki, M. Bensa, J. Daudet, L. Guillemain, Kronland-Martinet, 2001 R. Resynthesis of Coupled Piano String Vibrations Based on Physical Modeling *Journal of New Music Research* 22(5).

Askenfelt, A. Jansson, E. Five Lectures on the Acoustics of the Piano. WWW edition 1990. I.p. From touch to String Vibrations. [http://speech.kth.se/music/5\\_lectures](http://speech.kth.se/music/5_lectures)

Bank, B. 2000, Physics-Based Sound Synthesis of the Piano Master's Thesis, Budapest University of Technology and Economics

Beauchamp, J. Brass-Tone Synthesis by Spectrum Evolution Matching with Nonlinear Functions. *Computer Music Journal* 3(2) pp. 35-43, 1979. Reprinted in C. Roads and J. Strawn, *Foundations of Computer Music*. Cambridge, Massachusetts, The MIT press. 1985 pp. 6-29.

Borin, G. De Poli, G. A hysteretic hammer-string interaction model for physical modeling synthesis. *Nordic Acoustical Meeting* 12 – 14 June, 1996. Helsinki

Borin, G. Rocchesso, D., Scalcon, F. A Physical Piano Model for Music Performance. *Proceedings of the International Computer Music Conference*, 1997 Thessaloniki, Greece pp.350-353

Boutillon, X. 1988 Model for Piano Hammers: Experimental Determination and Digital Simulation, *Journal of the Acoustical Society of America* 83(2): 746-764

Chaigne, A. Askenfelt, A. 1994. Numerical simulations of piano Strings. II. Comparisons with measurements and systematic exploration of some hammer-string parameters *Journal of the Acoustical Society of America* 95(3): 1631-1640.

Chowning, J. M. The Synthesis of Complex Audio Spectra by Means of Frequency Modulation. *Journal of the Audio Engineering Society* 21(7), 1973. Reprinted in C. Roads and J. Strawn, *Foundations of Computer Music*. Cambridge, Massachusetts, The MIT press. 1985 pp. 6-29.

Conklin, H. A. 1996. Design and tone in the Mechanoacoustic Piano. Part I. Piano Hammers and Tonal Effects. *Journal of the Acoustical Society of America* 99(6): 3286-3296

Conklin, H. A. 1999. Generation of Partial due to Nonlinear Mixing in a Stringed Instrument. *Journal of the Acoustical Society of America* 105(1): 536-545

Garnett, G. E. Modeling piano sound using Waveguide Digital Filtering Techniques. *Proceedings of the International Computer Music Conference, 1987 Urbana, Illinois, USA*, pp. 89-95.

Horner, A. Lee, K. 1999. Modeling Piano Tones with Group Synthesis. *Journal of the Audio Engineering Society* 47(3) pp. 101-111.

Karjalainen, M. Esquef, P. A. A. Antsalo, P. Mäkitvirta, A. Välimäki, V. 2002 AR/ARMA Analysis and Modeling of Modes in Resonant and Reverberant Systems Convention Paper Presented at the 112th Convention of the Audio Engineering Society, Munich, Germany 10-13 May, 2002.

Laakso, T. I. Välimäki, V. Karjalainen, M. Laine, U. K. 1996 Splitting the Unit Delay – Tools for Fractional Delay Filter Design, *IEEE Signal Processing Magazine* 13(1):30-60.

Michels, Ulrich. *Dtv-Atlas zur Musik*, Hungarian Translation: Springer Hungarica 1994

Morse, P. M. 1948 *Vibration and Sound*. 2nd (paperback) printing, 1983, USA sec. III. 9, sec. III. 10, sec. IV. 16.

Roads, C. A Tutorial on Nonlinear Distortion or Waveshaping Synthesis. *Computer Music Journal* 3(2) pp. 29-34. 1979. Reprinted in C. Roads and J. Strawn, *Foundations of Computer Music*. Cambridge, Massachusetts, The MIT press. 1985 pp. 84-94.

Rocchesso, D. Scalcon, F. 1996. Accurate Dispersion Simulation for Piano Strings Proceedings of the Nordic Acoustical Meeting, Helsinki, 12-14. June 1996. pp. 407-414.

Schottstaedt, B. The Simulation of Natural Instrument Tones Using Frequency Modulation with a Complex Modulating Wave. *Computer Music Journal* 1(4) pp. 46-50. 1977. Reprinted in C. Roads and J. Strawn, *Foundations of Computer Music*. Cambridge, Massachusetts, The MIT press. 1985 pp. 54-64.

Smith, J. O. 1991 Viewpoints on the History of Digital Synthesis Proceedings of the International Computer Music Conference, 1991 Montreal, Canada, pp. 1-10.

Smith, J. O. 1992 Physical Modeling using Digital Waveguides. *Computer Music Journal* 16(4) pp. 74-91

Smith, J. O. 1993, Efficient Synthesis of Stringed Musical Instruments. Proceedings of the International Computer Music Conference, 1993 Tokyo, Japan. pp. 64-71.

Stulov, A. 1995 Hysteretic Model of the Grand Piano Hammer Felt. *Journal of the Acoustical Society of America* 97(4): 2577-2585.

Välimäki, V. Takala, T. Virtual musical instruments – natural sound using physical models. 1996 *Organised sound* 1(2) pp. 75-86.

Weinrich, G. 1977 Coupled Piano Strings. *Journal of the Acoustical Society of America* 62(6) pp. 1474-1484.



## Függelék

A melléklet 1 db (adat) CD-t tartalmaz.

A CD-n a következő négy alkönyvtár található:

- C\_forráskód
- C++\_hangok
- DSP\_forráskód
- DSP\_dallamok

A C\_forráskód könyvtár a csatolt modellt megvalósító program forráskódját tartalmazza.

A DSP\_forráskód könyvtárba a polifonikus dallamlejátszást egy húrral, FIR szűrő nélkül megvalósító programot tartalmazza.

A DSP\_dallamok alkönyvtár az ADSP 21061-re írt programmal generált polifonikus dallamokat tartalmazza. A hangok egy húr megütésével keletkeztek, a rezonátorlemez FIR szűrése nélkül. A DSP az egyvonalas és a kétvonalas oktávok hangjait használja. A file-ok nevében a C betű az egyvonalas C-t, a C2 a kétvonalas C-t jelenti.

A C++\_hangok alkönyvtár a C-ben a csatolt modellel előállított hangokat tartalmazza, és viszonyításnak az eredetit. A felvett eredeti zongorahang mintákat Bank Balázstól kaptam. Az előállított hangok mind az egyvonalas oktávban vannak.

A minták nevében a következő jelöléseket alkalmazom:

Eredeti : Eredeti zongorahang

Konstans\_csat : konstans csatolási tényezőre utal

Függő\_csat : frekvenciafüggő csatolásra utal

1d: az első harmonikus elhangolásából számolt késleltetéssel megvalósított elhangolás

md: a harmonikusok elhangolásainak átlagából számolt késleltetéssel megvalósított elhangolás

+R : a rezonátorlemez FIR szűrőjével együtt (ennek a FIR szűrőnek az együtthatóit az impulzusválasz mintáiból csonkolás nélkül képeztem (20000 együttható)), ahol ez nincs, ott FIR szűrő nélkül

pl. C\_Konstans\_csat\_1d+R: konstans csatolással és rezonátorlemezzel megvalósított egyvonalas C hang .